CHAPITRE 2

SÉRIES ENTIÈRES

2.1 Séries entières

Définition 2.1.1 On appelle série entière toute série de fonctions $\left(\sum f_n\right)$ dont le terme général est de la forme $f_n(x) = a_n x^n$, où $(a_n)_n$ désigne une suite réelle ou complexe et $x \in \mathbb{R}$.

Une série entière est notée $\left(\sum a_n x^n\right)$. Comme pour les séries de fonctions, on cherche l'ensemble ;

$$\Delta = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge} \right\}.$$

C'est le domaine de convergence de la série entière.
Exemple 1.
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
Posons $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$ et appliquons le critère de D'Alembert ;
$\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{x}{n+1}\right| = 0$. La série entière est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$; donc $\Delta = \mathbb{R}$.
Exemple 2.
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.
Posons $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n^2}$ on a : $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 x\right| = |x|$.
Si $|x| < 1$, la série est absolument convergente et si $|x| > 1$ la série diverge.
Etudions le cas où $|x| = 1$.
on a $\left|f_n(x)\right| = \dfrac{|x|^n}{n^2} = \dfrac{1}{n^2}$. La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ est alors absolument convergente dans $[-1, 1]$; et alors $\Delta = [-1, 1]$
Exemple 3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n.$$

Cette série ne converge que si $x = 0$ car $\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty}|(n+1)x|$ et la limite n'existe que si $x = 0$: d'où : $\Delta = \{0\}$.

Exemple 4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Posons $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ on a $\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)x\right| = |x|$. Si $|x| < 1$, la série est absolument convergente et si $|x| > 1$ la série diverge.

Etudions le cas où $|x| = 1$.

$x = 1$: c'est la série harmonique $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$, elle est divergente.

$x = -1$: c'est la série harmonique alternée $\left(\sum \frac{(-1)^n}{n}\right)$, elle est convergente.

D'où : $\Delta = [-1, 1[$.

Lemme 2.1.1 (Lemme d'Abel)

Soit $\left(\sum a_n x^n\right)$ une série entière. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(a_n x_0^n)$ soit bornée. Alors :

1. *La série $\left(\sum a_n x^n\right)$ est absolument convergente pour $|x| < |x_0|$.*
2. *La série $\left(\sum a_n x^n\right)$ est normalement convergente pour $|x| < r$, et pour tout r tel que $0 < r < |x_0|$.*

Preuve.

La suite $(a_n x_0^n)$ est bornée, il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}\ |a_n x_0^n| \leq M$.

1.) Pour $|x| < |x_0|$:

$|a_n x^n| = \left|\frac{a_n x_0^n x^n}{x_0^n}\right| = |a_n x_0^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n \cdot$ La série $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ est une série géométrique de raison $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, donc convergente. D'après le théorème de comparaison, la série $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ est convergente et par conséquent la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolument pour $|x| < |x_0|$.

2.) Soit $0 < r < |x_0|$ et soit $|x| \leq r$.

$|a_n x^n| = \left|\frac{a_n x_0^n x^n}{x_0^n}\right| = |a_n x_0^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M\left|\frac{r}{x_0}\right|^n \cdot$ Comme $\sum_{n=0}^{\infty} M\left(\frac{r}{x_0}\right)^n$ est une série numérique convergente, la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est normalement convergente pour tout x tel que $|x| < r$ et tout r tel que $0 < r < |x_0|$.

2.2 Rayon de convergence d'une série entière

Pour les séries entières, la notion de convergence prend une forme assez simple.

Théorème 2.2.1

Soit $\left(\sum a_n x^n\right)$ une série entière ; alors il existe un unique nombre réel $R \geq 0$ (éventuellement infini) tel que :

1. *$\left(\sum a_n x^n\right)$ converge absolument dans $]-R, R[$.*
2. *$\left(\sum a_n x^n\right)$ diverge si $|x| > R$.*

Preuve.

Soit $I = \left\{ r \in \mathbb{R}^+ : \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \text{converge} \right\} \subset \mathbb{R}^+$. $I \neq \emptyset$ car $0 \in I$.
On distinguera trois cas : $I = \{0\}$, $I = \mathbb{R}^+$ et $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}^+$.
1) $I = \{0\}$. On pose $R = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Ceci implique que $|x| > 0$ et par suite $x \notin I$ et la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ diverge.

Montrons que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverge. Pour cela, on raisonnera par l'absurde. Supposons que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge pour $|x| > 0$.

Soit $x_1 \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |x_1| < |x|$. La série $\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_1^n|\right)$ est convergente d'après le lemme d'Abel (2.1.1) et donc $x_1 \in I$. D'où la contradiction avec le fait que $I = \{0\}$.
2) $I = \mathbb{R}^+$. On pose $R = \infty$. On doit prouver que $\left(\sum a_n x^n\right)$ est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ converge pour tout $r > 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Il existe $r > 0$ tel que $|x| < r$. Ceci implique $|a_n x^n| \leq |a_n| r^n$ et d'après le théorème de comparaison la série $\left(\sum a_n x^n\right)$ converge absolument.
3) $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}^*$, $I \neq \{0\}$ et $I \neq \mathbb{R}^*$.
a) I est majoré. En effet, soit $r \in \mathbb{R}^* \backslash I$ et supposons que r n'est pas un majorant de I. Il existerait alors $r_1 \in I$ tel $r < r_1$. D'après la définition de I, la série $\left(\sum |a_n| r_1^n\right)$ est convergente ainsi que $\left(\sum |a_n| r^n\right)$ (car $|a_n| r^n < |a_n| r_1^n$) et donc $r \in I$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $r \in \mathbb{R}^* \backslash I$. I est alors un ensemble non vide et majoré donc admet une borne supérieure $R = \sup_{r \in I} I$. Pour conclure, on doit prouver que $\left(\sum a_n x^n\right)$ converge absolument pour tout x, $|x| < R$ et diverge pour tout x, $|x| > R$.
b)Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < R$. Il existe $\rho \in I$ tel que $|x| < \rho < R$. Comme la série $\left(\sum |a_n| \rho^n\right)$ converge, $\left(\sum |a_n| \cdot |x^n|\right)$ converge en vertu du théorème de comparaison. $\left(\sum a_n x^n\right)$ est alors absolument convergente.
c) Soit $x \in \mathbb{R}$, $|x| > R$. Ceci implique que $|x| \notin I$ et donc la série $\left(\sum |a_n x^n|\right)$ diverge.

Montrons que $\left(\sum a_n x^n\right)$ diverge. Pour cela, on raisonne par l'absurde. Si $\left(\sum a_n x^n\right)$ converge, d'après le lemme d'Abel, (2.1.1) la série $\left(\sum a_n x_1^n\right)$ est absolument convergente pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$, vérifiant $R < |x_1| < |x|$ et donc $|x_1| \in I$. On a alors nécessairement $|x_1| \leq R = \sup_{r \in I} I$ et ceci est en contradiction avec l'hypothèse $R < |x_1| < |x|$.

Définition 2.2.1 Le nombre $R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}^+ : \left(\sum |a_n| r^n\right) \text{ converge}\right\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ est appelé rayon de convergence de la série $\left(\sum a_n x^n\right)$.

Remarque 2.2.1 Le rayon de convergence d'une série $\left(\sum a_n x^n\right)$ est caractérisé par :

1. $|x| < R \Longrightarrow \left(\sum a_n x^n\right)$ est absolument convergente.
2. $|x| > R \Longrightarrow \left(\sum a_n x^n\right)$ diverge.
3. $|x| = R$ est le cas douteux où on ne peut rien dire sur la nature de la série.
4. Pour tout $r \in \mathbb{R}^+$ tel que $r < R$, la série $\left(\sum a_n x^n\right)$ est normalement (donc absolument) convergente pour $|x| \leq r$.

2.2.1 Détermination du rayon de convergence

Lemme 2.2.1 (Lemme d'Hadamard)

Soit $\left(\sum a_n x^n\right)$ une série entière. Le rayon de convergence R est donné par la relation :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Preuve.

a) Posons $\ell = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. En utilisant le critère de d'Alembert on a :

$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left|\frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| = \ell |x|$. Ceci implique :

$$\alpha) \quad \left(\ell|x| < 1 \Longleftrightarrow |x| < \frac{1}{\ell}\right) \Longrightarrow \quad \text{la série est absolument convergente}$$

$$\beta) \quad \left(\ell|x| > 1 \Longleftrightarrow |x| > \frac{1}{\ell}\right) \Longrightarrow \quad \text{la série est divergente}$$

D'après la remarque (2.2.1), $R = \dfrac{1}{\ell}$.

b) Posons $\ell = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. En utilisant le critère de Cauchy :

$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \ell|x|$ puis on adopte le même raisonnement que précédemment, on aboutit à la même conclusion ; $R = \dfrac{1}{\ell}$.

Exemple 2.2.1

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

   On a $a_n = \frac{1}{n!}$, utilisons le critère de D'Alembert :
   $\lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{1}{n+1}\right| = 0$, donc le rayon de convergence est $R = \infty$. La série est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

   On a $\lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{n}{n+1}\right|^2 = 1$. Le rayon de convergence est $R = 1$. La série est absolument convergente pour tout $|x| < 1$ et divergente si $|x| > 1$.

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$.

   Le critère de Cauchy donne :
   $\lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}$, le rayon de convergence est $R = 2$. La série est absolument convergente pour tout $|x| < 2$ et divergente si $|x| > 2$.

Remarque 2.2.2 Soit ϕ une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, la série suivante $\left(\sum a_n x^{\varphi(n)}\right)$ est une série entière. On commence par calculer directement la limite suivante ;

$$\ell = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{\varphi(n+1)}}{a_n x^{\varphi(n)}}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot \lim_{n\longrightarrow\infty} |x|^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}$$

puis chercher le domaine de x où $\ell < 1$; R est donc $\sup\left\{\ell \in \overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}\right\}$, où notre série converge.

Exemple : Trouver le rayon de convergence de la série : $\left(\sum 3^n x^{2n+5}\right)$.
Dans notre cas $\varphi(n) = 2n + 5$,

$$\ell = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{3^{n+1}x^{2n+7}}{3^n x^{2n+5}}\right| = 3|x|^2.$$

La série converge si $3|x|^2 < 1 \Longleftrightarrow |x| < \frac{\sqrt{3}}{3}$ d'où le rayon de convergence est : $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
La série est absolument convergente pour tout $|x| < \frac{\sqrt{3}}{3}$ et divergente si $|x| > \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.3 Propriétés

Ce paragraphe étudie les propriétés de continuité, de dérivabilité et d'intégrabilité de la fonction somme des séries entières.

2.3.1 Continuité d'une série entière

Proposition 2.3.1

> *Soit* $\left(\sum a_n x^n\right)$ *une série entière de rayon de convergence* R *et soit* $f :]-R, R[\longmapsto \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, f *est alors continue.*

Preuve.
Soit $0 < r < R$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n(x) = a_n x^n$ sont continues dans $[-R, R]$ et puisque la convergence est normale donc uniforme dans $[-r, r]$, f est alors continue dans $[-r, r]$ pour tout r, $0 < r < R$. Elle est donc continue dans $]-R, R[$.

2.3.2 Dérivée d'une série entière

Définition 2.3.1 Une fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ est dite dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ si $\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe. On la note $f'(x_0)$.

Définition 2.3.2 *Une fonction* f *est dite de classe* C^n *sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$, *si sa dérivée d'ordre* n *est une fonction continue sur* I. *On notera alors que* $f \in C^n(I)$.
Si elle est indéfiniment (ou infiniment) dérivable, on dira alors qu'elle est de classe C-infinie et on écrira que $f \in C^\infty(I)$.
Par contre $f \in C^0(I)$, *signifie que* f *est seulement continue sur* I.

Proposition 2.3.2

> *Soit* $\left(\sum a_n x^n\right)$ *une série entière de rayon de convergence* R, *et soit* $f :]-R, R[\longmapsto \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *Alors* f *est dérivable et on a* $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Preuve.
Soient les fonctions $S_n :]-R, R[\longmapsto \mathbb{R}$ définies par $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Ces fonctions possèdent les propriétés suivantes :
i) $\lim_{n \longrightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$ et la convergence est absolue donc simple.
ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, S_n est dérivable et on a $S'_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$.
iii) Le rayon de convergence de $\left(\sum n a_n x^{n-1}\right)$ est R car $\lim_{n \longrightarrow \infty} \left|\frac{(n+1)a_{n+1}}{n a_n}\right| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{R}$.
La suite $(S'_n)_n$ est uniformément convergente dans $[-r, r]$.
f est dérivable et on a $f'(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} S_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ $\forall x \in [-r, r]$ et $\forall r \in]0, R[$.
Donc $f'(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} S_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $\forall x \in]-R, R[$.

Corollaire 2.3.1

Soit la série $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *de rayon de convergence* R *;* f *est indéfiniment dérivable* ($f \in C^{\infty}(]-R, R[)$) *; et l'on a :*

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} x^n.$$

Preuve.

En effet, si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, par application de la proposition précédente on a,

$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, et par récurrence, la dérivée d'ordre k est donnée par la relation :

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

De cette expression, il résulte que $f^{(k)}(0) = a_k k!$; c'est-à-dire que $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

2.3.3 Primitive d'une série entière

Définition 2.3.3

Une fonction $f : D \longmapsto \mathbb{R}$ *admet une primitive s'il existe une fonction* $F : D \longmapsto \mathbb{R}$ *vérifiant* $F' = f$ *; (D étant le domaine de définition de* f *).*

Proposition 2.3.3

Soit $\left(\sum a_n x^n\right)$ *une série entière de rayon de convergence R et soit* $f :]-R, R[\longmapsto \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$*. On considère la fonction* $F :]-R, R[\longmapsto \mathbb{R}$ *définie par* $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$*. Alors* $F'(x) = f(x)$*,* $\forall x \in]-R, R[$.

Preuve.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est R car $\lim_{n \longrightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{n+2} \frac{n+1}{a_n} \right| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R}$. D'après le théorème précédent on conclut que $F' = f$.

2.3.4 Opérations sur les séries entières

Proposition 2.3.4

Soit $\left(\sum a_n x^n\right)$,$\left(\sum b_n x^n\right)$ deux séries entières ayant respectivement R et R' pour rayon de convergence.

1. *Si $R \neq R'$, le rayon de convergence R'' de la série entière $\left(\sum (a_n + b_n) x^n\right)$ est $R'' = \min\{R, R'\}$.*
2. *Si $R = R'$ le rayon de convergence de la série entière $\left(\sum (a_n + b_n) x^n\right)$ est $R'' \geq R$.*

Preuve.
1) Supposons que $R' < R$.
i) $|x| < R' \implies |x| < R$. Les deux séries $\left(\sum a_n x^n\right)$ et $\left(\sum b_n x^n\right)$ sont absolument convergentes. Comme $|(a_n + b_n)x^n| \leq |a_n x^n| + |b_n x^n|$, il en découle que $\sum((a_n + b_n)x^n)$ converge absolument pour $|x| < R' = \min\{R, R'\}$.
ii) Si $|x| > R'$, deux cas de figure se présentent :

a) Si $R' < |x| < R$, la série $\left(\sum b_n x^n\right)$ converge absolument et $\left(\sum a_n x^n\right)$ diverge. Donc $\left(\sum (a_n + b_n) x^n\right)$ diverge.

b) Si $R' < R < |x|$, les deux séries divergent. Montrons $\left(\sum (a_n + b_n) x^n\right)$ diverge. Raisonnons par l'absurde. Si $\left(\sum (a_n + b_n) x^n\right)$ converge alors d'après le lemme d'Abel (2.1.1), la série $\left(\sum (a_n + b_n) x^n\right)$ converge absolument pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $|x_0| < |x|$ et en particulier pour x_0 vérifiant $R' < |x_0| < R < |x|$. D'où la contradiction.
2) Si $R = R'$. Il est clair que la série converge absolument si $|x| < R = R'$. Le rayon de convergence $R'' \geq R = R'$.

Exemple 2.3.1 *Soient les deux séries $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-2^n}{2^n} x^n$. Les deux séries ont pour rayon de convergence $R = 1$. Par contre la série somme $(f+g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$, a pour rayon de convergence $R'' = 2$.*

2.4 Séries de Taylor

Problème
Soit f une fonction réelle à variable réelle x. Peut-on trouver une suite réelle (a_n) et $r > 0$ tels que l'on ait $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\forall x \in]-r, r[$?
Si ce problème admet une solution, on dit que f est développable en série entière au voisinage de 0.
On peut généraliser cette situation en se posant la même question pour une fonction définie au voisinage d'un point x_0 :

Existe-il une suite (a_n) et $r > 0$ tels que l'on ait $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \ \forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[$?

Dans l'affirmatif, on dira que f est développable en série entière au voisinage de x_0.

Proposition 2.4.1

> *Pour qu'une fonction f soit développable en série entière au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, il est nécessaire qu'elle soit de classe C^∞ dans un voisinage $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ de x_0 et dans ce cas on a :* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.

Preuve.

Il suffit de remarquer que si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, alors et d'après le corollaire (2.3.1) on a $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Proposition 2.4.2

> *Soit $f :]-r, r[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ dans un voisinage de 0. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in]-r, r[$, $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$.*
>
> *Alors la série* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ *est simplement convergente dans* $]-r, r[$ *et on a :* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \ \forall x \in]-r, r[$.

Preuve.

Par hypothèse, il existe $M > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-r, r[$, on a $\left|f^{(k)}(x)\right| \leq M$. Le développement de Taylor de f au voisinage de 0 à l'ordre n donne :

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$, avec $0 < \theta < 1$.

Pour démontrer le théorème, il suffit de prouver que $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$.

En effet,

$x \in]-r, r[\Longrightarrow |x| < r \Longrightarrow |\theta x| < r \Longrightarrow |f^{(n+1)}(\theta x)| \leq M$;

et donc $\left| \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{M r^{n+1}}{(n+1)!}$.

Or la série de terme général $u_n = \frac{M r^{n+1}}{(n+1)!}$ est convergente car ;

$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{r}{n+1} = 0$ et par suite $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$,

ce qui donne $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

Remarque 2.4.1 *Il suffit de vérifier que le reste de Taylor, souvent appelé reste de Mac-Laurin , tend vers 0.*

C'est à dire que $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$,

Exemple 2.4.1
1) **La fonction exponentielle** : $f(x) = e^x$.
Cette fonction est indéfiniment dérivable dans $\mathbb{R}$, et on a $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$. Le reste de Mac-Laurin est : $\dfrac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$. On vérifie comme précédemment, que cette limite tend vers zéro quand n tend vers ∞ ; et ceci quelque soit x dans $\mathbb{R}$.
Finalement :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

2) **Les fonctions hyperboliques** :
Les fonctions cosinus-hyperboliques et sinus-hyperboliques ont même rayon de convergence que la fonction exponentielle, c'est à dire $R = \infty$.

$$\operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

3) **Les fonctions circulaires** :
a) La fonction sinus :

$$\begin{array}{llllll}
f(x) = \sin x & \Longrightarrow & f(0) = 0, & \text{et} & \forall p \in \mathbb{N} & f^{(4p)}(x) = \sin x \Longrightarrow f^{(4p)}(0) = 0 \\
f'(x) = \cos x & \Longrightarrow & f'(0) = 1, & \text{et} & \forall p \in \mathbb{N} & f^{(4p+1)}(x) = \cos x \Longrightarrow f^{(4p+1)}(0) = 1 \\
f''(x) = -\sin x & \Longrightarrow & f''(0) = 0, & \text{et} & \forall p \in \mathbb{N} & f^{(4p+2)}(x) = -\sin x \Longrightarrow f^{(4p+2)}(0) = 0 \\
f'''(x) = -\cos x & \Longrightarrow & f'''(0) = -1, & \text{et} & \forall p \in \mathbb{N} & f^{(4p+3)}(x) = -\cos x \Longrightarrow f^{(4p+3)}(0) = -1
\end{array}$$

Les dérivées d'ordre quelconques sont majorées par 1, et ceci quelque soit x dans $\mathbb{R}$.
On a alors :

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{et} \quad R = \infty.$$

b) La fonction cosinus :

$$f(x) = \cos x = (\sin x)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \text{et} \quad R = \infty.$$

4) **La série du binôme**
Considérons la fonction $x \longrightarrow f(x) = y = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Son domaine de définition est $]-1, \infty[$.
On a une relation simple entre la fonction f et sa dérivée.
$y = (1+x)^\alpha$, on a $y' = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ d'où l'équation différentielle :

$$y'(1+x) = \alpha y \tag{2.1}$$

Toutes les solutions de cette équation sont de la forme $y = C(1+x)^\alpha$, où C est une constante arbitraire. Cherchons maintenant s'il existe une fonction f développable en série entière au voisinage de 0, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ qui est solution de (2.1). Pour qu'une telle fonction existe, il est nécessaire d'avoir les relations :

$$0=(1+x)f'(x)-\alpha f(x)=(1+x)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-\alpha\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}-(\alpha-n)a_n]x^n.$$

On déduit alors que $(n+1)a_{n+1}-(\alpha-n)a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et donc $(n+1)a_{n+1}=(\alpha-n)a_n$ car une série entière est nulle si et seulement tous ses cœfficient sont nuls. Ceci permet d'avoir :

$$\begin{aligned}
a_1 &= \alpha a_0\\
a_2 &= \frac{(\alpha-1)a_1}{2}\\
\vdots &\ \vdots\ \vdots\\
a_{n-1} &= \frac{(\alpha-n+2)a_{n-2}}{n-1}\\
a_n &= \frac{(\alpha-n+1)a_{n-1}}{n}
\end{aligned}$$

. Ceci donne enfin

$$a_n=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}a_0$$

Soit la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_0\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$. Le rayon de convergence R est donné par la relation :

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}\;\frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}\right|=\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|=1.$$

Par construction, la série $\displaystyle f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}a_0x^n$ est solution de l'équation différentielle (2.1) , elle est donc de la forme $f(x)=C(1+x)^{\alpha}$. Puisque $f(0)=a_0=C=1$, on déduit que pour $x\in]-1,1[$,

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n;\quad R=1.$$

Cette série est connue sous le nom de série du binôme.

Remarque 2.4.2 *Si $\alpha=n\in\mathbb{N}$, alors les dérivées d'ordre $n+1$ et plus de $(1+x)^n$ sont toutes nulles. La série du binôme se réduit à un polynôme de degré n, et on retrouve la formule du binôme de Newton.*

Exercices d'applications.
En utilisant le résultat ci-dessus, montrer qu'on a les développements suivants. Donner le domaine de convergence de ces séries.

a) $\displaystyle\sqrt{1+x}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1.3...(2n-3)}{2.4...2n}x^n=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\cdots$

b) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1.3...(2n-1)}{2.4...2n}x^n=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4+\cdots.$

Remarque 2.4.3
Un développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction f peut s'obtenir

grâce au développement de sa dérivée f'. Par exemple, le développement en série entière des fonctions $\arcsin x$ s'obtient facilement en remarquant que :

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \cdots.$

Sachant que $\arcsin 0 = 0$,

$\arcsin x = x + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \cdots.$

Par ce procédé, il est facile par exemple de développer les fonctions $x \longrightarrow \arccos x$, $x \longrightarrow \operatorname{Argsh} x$, $x \longrightarrow \operatorname{Arctg} x$ et $x \longrightarrow \operatorname{Argth} x$.

Attention : la fonction $x \longrightarrow \operatorname{Argch} x$ n'est pas définie dans un voisinage de zéro, son domaine de définition est $[1, \infty[$.

5) **La fonction** $x \longrightarrow \dfrac{1}{1-x}$.

On remarque d'une part que pour $|x| < 1$, $\lim |x|^n = 0$ et d'autre part

$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \dfrac{x^{n+1}}{1-x} = \dfrac{1}{1-x}$.

D'où :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \text{ avec } R = 1 \quad \text{ et } \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \ (R = 1).$$

6) **La fonction** $x \longrightarrow \operatorname{Log}(1+x)$.

Certains développements en série s'obtiennent au moyen des théorèmes sur l'intégration et la dérivation des séries entières.

Du développement $\dfrac{1}{1+x}$ on déduit par intégration :

$\operatorname{Log}(1+x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$, $(R = 1)$. La constante d'intégration est nulle car $\operatorname{Log} 1 = 0$.

On a de même $\operatorname{Log}(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$, $(R = 1)$.

On remarque que ces fonctions sont définies aussi pour des valeurs n'appartenant pas à l'intervalle ouvert $]-1, 1[$ mais leurs développements en série de Taylor au voisinage de 0 ne sont convergents que pour $|x| < 1$.

Formule très utile, donc à retenir :

$$\forall\, x \in [-1, 1[: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\operatorname{Log}(1-x), \quad \underline{R = 1}.$$

2.4.1 Développement en série entière au voisinage d'un point x_0

Soit $x \longrightarrow f(x)$ une fonction définie au voisinage d'un point x_0 et posons $X = x - x_0$.

Définition 2.4.1 On dit que f est développable en série entière au voisinage de x_0 si la fonction $X \longrightarrow f(X + x_0)$ est développable en série entière au voisinage de 0. On aura alors :

$$f(X + x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \text{ pour} |X| < R.$$

Donc $f(x) = f(X + x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ pour tout x vérifiant $|x - x_0| < R$

Exemple 2.4.2 On cherche le développement en série entière de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ au voisinage de $x_0 = 3$. On pose $X = x - 3$ et on obtient :

$$\sqrt{x} = \sqrt{X+3} = \sqrt{3\left(1+\frac{X}{3}\right)} = \sqrt{3}\left(1+\frac{X}{3}\right)^{1/2} = \sqrt{3}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1.3...(2n-3)}{2.4...2n}\left(\frac{X}{3}\right)^n\right)$$

Finalement : $\sqrt{x} = \sqrt{3}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}\cdot\frac{1.3...(2n-3)}{2.4...2n}(x-3)^n\right)$.

Domaine de convergence de cette série. Puisque la série entière en $\frac{X}{3}$ a pour rayon de convergence $R = 1$, ce qui veut dire que pour

$$\left|\frac{X}{3}\right| < 1 \Longleftrightarrow -3 < X < 3 \Longleftrightarrow -3 < x - 3 < 3 \Longleftrightarrow 0 < x < 6,$$

la série est absolument convergente.

Pour $x = 0$, on a : $\sqrt{3}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}\cdot\frac{1.3...(2n-3)}{2.4...2n}(-3)^n\right) = \sqrt{3}\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3...(2n-3)}{2.4...2n}\right)$.

Le critère de Duhamel montre que la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3...(2n-3)}{2.4...2n}$ est convergente.

Pour $x = 6$, c'est la même série mais alternée, donc convergente, car absolument convergente.

En conclusion, la série trouvée a pour domaine de convergence : $\Delta = [0, 6]$.

Remarque 2.4.4

Le cas $x = 0$ donne :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3...(2n-3)}{2.4...2n} = 1.$$

Le cas $x = 6$ donne :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1.3...(2n-3)}{2.4...2n} = \sqrt{2} - 1.$$

2.4.2 Sommation de quelques séries entières

ON peut dans certains cas reconnaître, dans une série entière, le développement d'une fonction connue ; trouver cette fonction, c'est faire la sommation de la série entière. Ce problème est l'inverse de celui qui a été étudié précédemment.

1$^{\text{er}}$ exemple

Soit la série entière $\left(\sum a_n x^n\right)$, le terme a_n est de la forme : $a_n = \frac{P(n)}{n!}$ où $P(n)$ étant un polynôme en n de degré m.

on met $P(n)$ sous la forme :

$$P(n) = \alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n(n-1) + \alpha_3 n(n-1)(n-2) + \cdots = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{m}\alpha_k n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

On a : $P(k) = \alpha_0 + \alpha_1 k + \alpha_2 k(k-1) + \alpha_3 k(k-1)(k-2) + \cdots + \alpha_k k!$, cette relation de récurrence

permet de calculer toutes les valeurs de α_k. On calcule α_0, puis α_1, puis α_2 jusqu'à α_m.
exemple : Sommer la série suivante.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-4n^4+25n^3-49n^2+31n+2)\frac{x^n}{n!}$$

son rayon de convergence étant l'infini, posons : $P(n)=-4n^4+25n^3-49n^2+31n+2$
$=\alpha_0+\alpha_1 n+\alpha_2 n(n-1)+\alpha_3 n(n-1)(n-2)+\alpha_4 n(n-1)(n-2)(n-3)$.
Pour $n=0$ on a $P(0)=\alpha_0=2$
Pour $n=1$ on a $P(1)=\alpha_0+\alpha_1=5=2+\alpha_1 \iff \alpha_1=3$
Pour $n=2$ on a $P(2)=\alpha_0+2\alpha_1+2\alpha_2=4 \iff \alpha_2=-2$
Pour $n=3$ on a $P(3)=\alpha_0+3\alpha_1+6\alpha_2+6\alpha_3=5 \iff \alpha_3=1$
Pour $n=4$ on a $P(4)=\alpha_0+4\alpha_1+12\alpha_2+24\alpha_3+24\alpha_4=-82 \iff \alpha_3=-4$
$-4n^4+25n^3-49n^2+31n+2=2+3n-2n(n-1)+n(n-1)(n-2)-4n(n-1)(n-2)(n-3)$.
La somme est alors :

$$\begin{aligned}
f(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{n!}+\frac{3n}{n!}-\frac{2n(n-1)}{n!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{n!}-\frac{4n(n-1)(n-2)(n-3)}{n!}\right)x^n\\
&=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}-2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n-2)!}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{(n-3)!}-4\sum_{n=4}^{\infty}\frac{x^n}{(n-4)!}\\
&=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+3x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}-2x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+x^3\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{n-3}}{(n-3)!}-4x^4\sum_{n=4}^{\infty}\frac{x^{n-4}}{(n-4)!}\\
&=\left(2+3x-2x^2+x^3-4x^4\right)\mathrm{e}^x.
\end{aligned}$$

On a par exemple : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-4n^4+25n^3-49n^2+31n+2}{n!}=f(1)=0.$

2ème exemple

Soit la série entière $\left(\sum a_n x^n\right)$, le terme a_n est de la forme : $a_n=P(n)$ où $P(n)$ étant un polynôme en n de degré m.
on met $P(n)$ sous la forme :

$$\begin{aligned}
P(n)&=\alpha_0+\alpha_1(n+1)+\alpha_2(n+1)(n+2)+\alpha_3(n+1)(n+2)(n+3)+\cdots\\
&\alpha_0+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k(n+1)(n+2)\cdots(n+k).
\end{aligned}$$

On a : $P(k)=\alpha_0+\alpha_1(k+1)+\alpha_2(k+1)(k+2)+\alpha_3(k+1)(k+2)(k+3)+\cdots+\alpha_k\dfrac{(k+m)!}{k!}$, cette relation de récurrence permet de calculer toutes les valeurs de α_k. On calcule α_0, puis α_1, puis α_2 jusqu'à α_m.
exemple : Sommer la série suivante.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n^3+9n^2+20n+11)x^n$$

son rayon de convergence étant égal à 1. Posons :
$P(n)=n^3+9n^2+20n+11=\alpha_0+\alpha_1(n+1)+\alpha_2(n+1)(n+2)+\alpha_3(n+1)(n+2)(n+3)$.
Pour $n=-1$ on a $P(-1)=\alpha_0=-1$.
Pour $n=-2$ on a $P(-2)=\alpha_0-\alpha_1=-1=-1-\alpha_1 \iff \alpha_1=0$.
Pour $n=-3$ on a $P(-3)=\alpha_0-2\alpha_1+2\alpha_2=5 \iff \alpha_2=3$.

Pour $n=-4$ on a $P(-4)=\alpha_0-3\alpha_1+6\alpha_2-6\alpha_3=11 \iff \alpha_3=1$.
D'où : $P(n)=-1+3(n+1)+(n+1)(n+2)(n+3)$,
et donc

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1+3(n+1)(n+2)+(n+1)(n+2)(n+3))x^n\\&=-\sum_{n=0}^{\infty}x^n+3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)x^n.\end{aligned}$$

Les trois sommes se déduisent de la série géométrique.

- $-\sum_{n=0}^{\infty}x^n=-\dfrac{1}{1-x}$
- $3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n=3\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}\right)''=3\left(\dfrac{1}{1-x}-1-x\right)''$
$$=3\left(\frac{1}{(1-x)^2}-1\right)'=\frac{6}{(1-x)^3}$$
- $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+3}\right)'''=\left(1+x+x^2+\dfrac{1}{1-x}\right)'''$

$=\left(1+2x+\dfrac{1}{(1-x)^2}\right)''=\left(2+\dfrac{-2}{(1-x)^3}\right)'=\dfrac{6}{(1-x)^4}$

On a :

$$f(x)=-\frac{1}{1-x}+\frac{6}{(1-x)^3}+\frac{6}{(1-x)^4}=\frac{x^3-3x^2-3x+11}{(1-x)^4}$$

pour x réel la série ne converge pas aux bornes de l'intervalle de convergence. Le domaine de convergence est alors $]-1,1[$.

3ème exemple

Soit la série entière $\left(\sum a_nx^n\right)$, le terme a_n est de la forme : $a_n=\dfrac{1}{P(n)}$ où $P(n)$ étant un polynôme en n de degré m avec des racines simples et entières.

On décompose a_n éléments simples et on utilisera la formule $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=-\operatorname{Log}(1-x)$.

Exemple : Sommer la série suivante.

$$f(x)=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{(n-2)(n+1)(n+3)}$$

son rayon de convergence est égal à 1.
La décomposition en éléments simples donne :

$$\frac{1}{(n-2)(n+1)(n+3)}=\frac{1}{15(n-2)}-\frac{1}{6(n+1)}+\frac{1}{10(n+3)}.$$

- $\sum_{n=3}^{\infty}\dfrac{x^n}{n-2}=x^2\sum_{n=3}^{\infty}\dfrac{x^{n-2}}{n-2}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=x^2\left(-\operatorname{Log}(1-x)\right)=-x^2\operatorname{Log}(1-x)$.
- $\sum_{n=3}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1}=\dfrac{1}{x}\sum_{n=3}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}=\dfrac{1}{x}\sum_{n=4}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=\dfrac{1}{x}\left(-\operatorname{Log}(1-x)-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}\right)$.

$\bullet \displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n+3} = \frac{1}{x^3}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{n+3}}{n+3} = \frac{1}{x^3}\sum_{n=6}^{\infty}\frac{x^n}{n} = \frac{1}{x^3}\left(-\operatorname{Log}(1-x) - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right).$

On obtient finalement,

$$f(x) = \frac{1}{1800x^3}\left[\left(-120x^5 + 300x^2 - 180\right)\operatorname{Log}(1-x) + 64x^5 + 105x^4 + 240x^3 - 90x^2 - 180x\right].$$

Remarques :

1. La limite de $f(x)$ quand x tend vers 1 est bien finie, car $(-120x^5 + 300x^2 - 180)\operatorname{Log}(1-x) = -60(2x^3 + 4x^2 + 6x + 3)(1-x)^2\operatorname{Log}(1-x)$ et $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1} f(x) = 139/1800$.

2. Un développement limité au voisinage de 0 de $(-120x^5 + 300x^2 - 180)\operatorname{Log}(1-x) + 64x^5 + 105x^4 + 240x^3 - 90x^2 - 180x$ montre Aussi que la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 est bien finie et vaut $f(0) = 0$

3. Puisque la série donnée est convergente pour $x = -1$, le domaine de convergence de la série est donc $[-1, 1]$.

4. On déduit de ces calculs et ces remarques que :

$$f(1) = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)(n+1)(n+3)} = \frac{139}{1800}$$

$$f(-1) = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-2)(n+1)(n+3)} = \frac{109 - 240\operatorname{Log}2}{1800}$$

En utilisant toujours la formule $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\operatorname{Log}(1-x)$, on peut sommer des séries de type $\displaystyle\sum_{n=m}^{\infty}\frac{x^n}{an+b}$ avec $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{Z}^*$ et $\dfrac{b}{a} \notin \mathbb{Z}^*$.

<u>4ème exemple</u>

Sommer la série suivante,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2n+1}$$

son rayon de convergence est égal à 1. On a $f(0) = 1$.

• 1er cas $x > 0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2n+1}}{2n+1}.$$

Posons $0 < \sqrt{x} = t \in]0, 1[$ on a alors : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}$ par dérivation puis intégration on obtient :

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1+t}{1-t}$ et donc :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{Log} \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} & \text{si} \quad x \in]0,1[\end{cases}$$

• $2^{\text{ème}}$ cas $x < 0$:

Posons $x = -X$ on a $f(-X) = g(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n X^n}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{X}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\sqrt{X}\right)^{2n+1}}{2n+1} \cdot .$

Posons $\sqrt{X} = t \in]0,1[>$ on a alors : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\sqrt{X}\right)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1}$ par dérivation puis intégration on obtient :

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{Arctg} t$ et en conclusion finale on a donc :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{Log} \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} & \text{si} \quad x \in]0,1[\\ \frac{\operatorname{Arctg} \sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} & \text{si} \quad x \in]-1,0[\end{cases}$$

Remarque : Les fonctions trouvées sont continues en 0 et valent 1. Pour le domaine de convergence de la série étudiée est $D_f = [-1,1[$ et on trouve pour $x = -1$:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$

<u>$5^{\text{ème}}$ exemple</u>

De la même manière on peut sommer des séries de type :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

son rayon de convergence est égal à l'infini. On a $f(0) = 1$.

• $x > 0 \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} \sqrt{x}.$

• $x < 0 \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \cos \sqrt{-x}.$

Beaucoup de séries ne peuvent être sommer à l'aide de fonctions élémentaires, et ceci malgré leur simple écriture.

<u>$6^{\text{ème}}$ exemple</u> **La fonction de Lax :**

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

La série étant normalement convergente pour tout $x \in [-1,1]$. Facilement on trouve :

$$\sigma'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{-\operatorname{Log}(1-x)}{x},$$

fonction dont la primitive n'est pas « une fonction élémentaire. »
Il existe une relation fonctionnelle intéressante pour $\sigma(x)$. On a :

$$\sigma(x) = -\int_0^x \frac{\operatorname{Log}(1-t)}{t} dt$$

C'est une intégrale impropre en 0 et en 1. La limite en 0 de $\dfrac{-\operatorname{Log}(1-x)}{x}$ vaut 1, au voisinage de 1, on a : $\dfrac{\operatorname{Log}(1-t)}{t} \sim \operatorname{Log}(1-t)$ dont l'intégrale existe. une simple intégration par partie donne :

$$\sigma(x) = -\left[\operatorname{Log}(1-t)\operatorname{Log} t\right]_0^x + \int_0^x \frac{\operatorname{Log} t}{1-t} dt$$

on a $\lim\limits_{t\longrightarrow 0}(\operatorname{Log}(1-t)\operatorname{Log} t) = 0$, un changement de variables $X = 1-t$ dans la dernière intégrale donne :

$$\int_0^x \frac{\operatorname{Log} t}{1-t} dt = \int_1^{1-x} \frac{-\operatorname{Log}(1-X)}{X} dX = -\int_1^0 \frac{\operatorname{Log}(1-X)}{X} dX - \int_0^{1-x} \frac{\operatorname{Log}(1-X)}{X} dX$$

On verra au chapitre sur les séries de Fourier que

$$-\int_1^0 \frac{\operatorname{Log}(1-X)}{X} dX = \int_0^1 \frac{\operatorname{Log}(1-X)}{X} dX = \sigma(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

En conclusion on a :

$$\forall x \in]0,1[\quad \sigma(x) + \sigma(1-x) + \operatorname{Log} x \operatorname{Log}(1-x) = \frac{\pi^2}{6} \qquad (\star)$$

Remarques :

- La formule $(\star)$ reste valable pour $x \in [0,1]$, car $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \operatorname{Log} x \operatorname{Log}(1-x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} -x \operatorname{Log} x = 0$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \operatorname{Log} x \operatorname{Log}(1-x) = \lim\limits_{t\longrightarrow 0} \operatorname{Log}(1-t)\operatorname{Log} t = \lim\limits_{t\longrightarrow 0} -t \operatorname{Log} t = 0$
- $x \in [0;1/2] \Longleftrightarrow 1-x \in [1/2;1]$, connaissant les images de tous les nombres de l'intervalle $[0,1/2]$ on peut déduire celles des nombres de l'intervalle $[1/2,1]$; et généralement si a et b sont deux nombres réels de $[0;1]$ tels que $a+b=1$ alors on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \operatorname{Log} a \operatorname{Log}(1-a) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^2}$$

- En posant $x = 1/2$ on obtient $2\sigma(1/2) + \operatorname{Log}^2(1/2) = \pi^2/6$ d'où

$$\sigma(1/2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\operatorname{Log}^2 2 \sim 0.58224$$

6$^{\text{ème}}$ exemple

Donner le rayon de convergence de la série suivante puis calculer sa somme :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n} x^n$$

On a immédiatement

$$1/R = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{\left|n^{(-1)^n}\right|} = \begin{cases} \lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[2n]{|2n|} = 1 & \text{si} \quad n \quad \text{est paire} \\ \lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[2n+1]{|1/2n+1|} = 1 & \text{si} \quad n \quad \text{est impaire} \end{cases}$$

D'où $R = 1$.

On peut écrire cette somme sous la forme :

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 4x^4 + \frac{1}{5}x^5 + 6x^6 + \frac{1}{7}x^7 + 8x^8 + \cdots \\ &= \left(2x^2 + 4x^4 + 6x^6 + 8x^8 + \cdots\right) + \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \cdots\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

La première série est divergente pour $x = \pm 1$, donc le domaine de convergence de la série donnée est $]-1,1[$, (La 2$^{\text{ème}}$ série est aussi convergente pour $x = \pm 1$).

On peut écrire :

$$f(x) = x\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}\right)' + \operatorname{Arctg} x = x\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(x^2\right)^n\right)' + \operatorname{Arctg} x.$$

pour obtenir finalement

$$f(x) = x\left(\frac{1}{1-x^2}\right)' + \operatorname{Arctg} x = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \operatorname{Arctg} x \qquad \forall x \in]-1,1[.$$

Comme application on a pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{(-1)^n}}{\sqrt{3^n}} = \frac{\pi + 9}{6} \sim 2,0236.$$

Exercice 1 *Résoudre l'équation différentielle suivante ; en utilisant les séries entières :*

$$\begin{cases} y'' - xy = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Solution :

Posons $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$.

On a : $y'' = 2.1.a_2 + 3.2a_3x + 4.3.a_4x^2 + 5.4.a_5x^3 + \cdots + (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \cdots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.$$

En substituant dans notre équation différentielle, on trouve :
$2.1.a_2+(3.2a_3-a_0)x+(4.3.a_4-a_1)x^2+(5.4.a_5-a_2)x^3+\cdots+((n+2)(n+1)a_{n+2}-a_{n-1})x^n+\cdots=0.$
On obtient les équations algébriques suivantes :

$$\begin{cases} 2.1.a_2 = 0 \\ 3.2a_3 - a_0 = 0 \\ 4.3.a_4 - a_1 = 0 \\ 5.4.a_5 - a_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

On constate que $y(0) = 1 \Longrightarrow a_0 = 1$ et $y'(0) = 0 \Longrightarrow a_1 = 0$, comme la première équation algébrique donne aussi $a_2 = 0$, on a alors
$a_0 = 1, \quad a_1 = a_2 = 0, \quad a_3 = \dfrac{1}{2.3} = \dfrac{1}{3!} \quad a_4 = a_5 = 0, \quad a_6 = \dfrac{1}{2.3.5.6} = \dfrac{4}{6!}, \quad a_7 = a_8 = 0,$
$a_9 == \dfrac{1}{2.3.5.6.8.9} = \dfrac{4.7}{9!}$. On remarque que seulement les cœfficients $a_{3n},\ n \in \mathbb{N}$ sont non nuls. On obtient finalement :

$$a_{3n+1} = a_{3n+2} = 0 \qquad \text{et} \qquad a_{3n} = \frac{1.4.7\dots(3n-2)}{(3n)!}.$$

La solution ainsi construite sera :

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.4.7\dots(3n-2)}{(3n)!} x^{3n}.$$

Son domaine de convergence est donné par la règle de d'Alembert, on trouve que $R = \infty$. La série est convergente pour tout x dans $\mathbb{R}$.

Remarque 2.4.5 α : *Le même problème avec d'autres conditions, par exemple :*

$$\begin{cases} y'' - xy = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

On a une autre solution, et on trouve $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ et :

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.5.8\dots(3n-1)}{(3n+1)!} x^{3n+1}.$$

β : *L'équation $y'' - xy = 0$ a pour solution générale $y(x) = a.y_1(x) + b.y_2(x)$, où a et b sont deux réels quelconques.*
y_1 et y_2 sont deux fonctions spéciales, qu'on ne peut pas exprimer à l'aide de fonctions élémentaires.