MINISTER DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

C.U Relizane

Institut de Sciences et Techniques

Cours maths2- Sciences et Technologie pour $1^{ére}$ année, avec les fiches TD corrigées

Par: *Beddani Abdallah*

Souidi Lakhdar (Univ : Mostaganem)

Gandouz Cheikh (C U : Relizane)

2013/2014

Table des matières

1 Matrices et déterminants **i**

1.1 Les matrices (Définitions et opérations) i

1.1.1 Définitions i

1.1.2 Les opérations sur les matrices ii

1.1.3 Déterminant d'une matrice iii

1.2 Matrice associée à une application linéaire iv

1.2.1 Les applications linéaires iv

1.2.2 La matrice associée iv

1.3 Application linéaire associée à une matrice v

1.4 Changement de base, matrice de passage vi

1.4.1 Les espaces vectoriels vi

1.4.2 Base d'un espace vectoriel vi

1.4.3 matrice de passage vii

1.5 Les matrices particulières viii

1.5.1 Matrice nulle $(m \times n)$ viii

1.5.2 Matrice identité$(n \times n)$ viii

1.5.3 Matrice triangulaire supérieure $(n \times n)$ viii

1.5.4 Matrice triangulaire inférieure $(n \times n)$ viii

1.5.5 Matrice diagonale$(n \times n)$ viii

1.5.6 Transposée d'une matrice$(n \times n)$ ix

1.5.7 Matrice symétrique ix
1.5.8 Comatrice d'une matrice($n \times n$) ix
1.5.9 Inverse d'une matrice ($n \times n$) ix

2 Systèmes d'équations linéaires xi

2.1 Généralités xi
2.1.1 Notation matricielle xi
2.1.2 Rang d'un système d'équations linéaires xii
2.2 Etude de l'ensemble des solutions xii
2.2.1 Déterminant caractéristique xii
2.2.2 Etude de l'ensemble des solutions xii
2.3 Les méthodes de résolutions d'un système linéaire xiii
2.3.1 Résolution par la méthode de Cramer xiii
2.3.2 Résolution par la méthode de la matrice inverse xv
2.3.3 Résolution par la méthode de Gauss xvi

3 Les intégrales xviii

3.1 Intégrale indéfinie xviii
3.1.1 Primitives des fonctions usuelles xviii
3.1.2 Intégration par parties – Changement de variable xix
3.2 L'intégrale des polynômes xx
3.3 Intégration des fonctions rationnelles xxi
3.3.1 Intégration des éléments simples xxi
3.3.2 Décomposition en éléments simples xxiii
3.4 Intégration des fonctions exponentielles et trigonométriques xxv
3.4.1 Intégration des fonctions exponentielles xxv
3.4.2 Intégration des fonctions trigonométriques xxv
3.5 Intégration définie xxvi
3.5.1 Interprétation géométrique xxvi
3.5.2 L'intégrale de Riemann xxvi

4 Les équations différentielles **xxviii**

4.1 Les équations différentielles ordinaires xxviii

4.2 L'équations diffférentielles d'ordre 1 xxix

4.2.1 Equations différentièlles de variables séparées : xxix

4.2.2 Equations différentièlles linéaires d'ordre 1 xxx

4.3 Equations différentièlles linéaires d'ordre 2 (EDL d'ordre2) xxxii

4.3.1 Résolution de l'équation non homogène xxxv

4.3.2 Solution vérifiant une condition initiale xxxvi

4.3.3 Solution vérifiant des conditions initiales xxxvi

5 Les fiches TD **xxxviii**

5.1 **Fiche TD 1** xxxviii

5.2 La correction : xl

5.3 **Fiche TD 2** xliii

5.4 Correction fiche TD2 xliv

5.5 **Fiche TD 3** xlvii

5.6 Correction fiche TD3 xlvii

5.7 **Fiche TD 4** lii

5.8 Correction fiche TD4 liii

Bibliographie **lvii**

Chapitre 1

Matrices et déterminants

1.1 Les matrices (Définitions et opérations)

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1 *Une matrice de type (m, n) ou m lignes et n colonnes est un tableau de m lignes et n colonnes*

notée $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} = \begin{pmatrix} a_{1,1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1,n} \\ \\ a_{i,1}\ldots\ldots\ldots a_{i,j}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{i,n} \\ \\ a_{m,1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{m,n} \end{pmatrix}$$

*On appelle i^{éme} ligne de A la matrice

$$L_i = (a_{1,1}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, a_{1,n}) \text{ pour } 1 \leq i \leq m$$

*On appelle j^{éme} colonne de A la matrice

$$C_i = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \\ \\ a_{m,1} \end{pmatrix} \text{ pour } 1 \leq i \leq n$$

On pourra écrire

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \\ \\ L_m \end{pmatrix} = (C_1, ..., C_N)$$

*L'ensemble des matrices de type (m, n) moté $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

1.1.2 Les opérations sur les matrices

1) La multiplication par un scalaire

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Exemple 1.1.1

$$2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 10 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2)La somme de deux matrices

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Exemple 1.1.2 $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

$A + B = \begin{pmatrix} 5+2 & 3+0 \\ 4+7 & 1+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$

3) produit de deux matrices

soient $A = (a_{i,j})_{m,n}$ et $B = (b_{i,j})_{n,s}$

Le produit de Aet B est une matrice de type (m, s)

$A \times B = (C_{i,j})_{m,s}$ tel que $C_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}\ b_{k,j}$.

Exemple 1.1.3 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2\times 4 + 1\times 1 + 4\times 0 & 2\times 5 + 1\times 2 + 4\times 4 \\ 3\times 4 + 0\times 1 + 5\times 0 & 3\times 5 + 0\times 2 + 5\times 4 \\ 1\times 4 + 7\times 1 + 6\times 0 & 1\times 5 + 7\times 2 + 6\times 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 9 & 28 \\ 12 & 35 \\ 11 & 43 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.1.1 *Nombre des lignes de la première matrice est égale nombre des colonnes de la deuxième matrice, est une condition nécessaire pour calculer le produit.*

1.1.3 Déterminant d'une matrice

1)Si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ le déterminant de A est un nombre réel

noté $\det(A)$ ou $\begin{vmatrix} + & - \\ a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$

2)Si $A = \begin{pmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{pmatrix}$ le déterminant de A est un nombre réel

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} - a_1 \begin{vmatrix} b & b_2 \\ c & c_2 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b & b_1 \\ c & c_1 \end{vmatrix}.$$

Exemple 1.1.4 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \times (-35) - 1 \times 13 + 4 \times 21 = 1$$

3)Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$, $M_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \ldots\ldots\ldots a_{1,j-1} \ldots a_{1,j+1} \ldots\ldots\ldots a_{1,n} \\ \\ \\ a_{i-1,1} \ldots\ldots\ldots a_{i-1,j-1} \ldots a_{i-1,j+1} \ldots\ldots\ldots a_{i-1,n} \\ a_{i-1,1} \ldots\ldots\ldots a_{i+1,j-1} \ldots a_{i+1,j+1} \ldots\ldots\ldots a_{i-1,n} \\ \\ a_{n,1} \ldots\ldots\ldots a_{n,j-1} \ldots a_{n,j+1} \ldots\ldots\ldots a_{n,n} \end{pmatrix}$

On a

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(M_{i,j}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(M_{i,j})$$

1.2 Matrice associée à une application linéaire

1.2.1 Les applications linéaires

On dit que l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application linéaire si :
$\forall\,(X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2\,, \forall\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}$ on a :

$$f\,(\alpha X + \beta Y) = \alpha f\,(X) + \beta f\,(Y)$$

On pourra écrire toute application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ comme suit :

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1,n}x_n \\ \\ \\ a_{i,1}x_1 + \ldots\ldots a_{i,j}x_j \ldots\ldots\ldots a_{i,n}x_n \\ \\ a_{m,1}x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix}$$

1.2.2 La matrice associée

La matrice associée a l'application f est

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1,n} \\ \\ \\ a_{i,1} \ldots\ldots\ldots a_{i,j} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{i,n} \\ \\ a_{m,1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{m,n} \end{pmatrix}$$

On remarque que

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1,n} \\ \\ \\ a_{i,1} \ldots\ldots\ldots a_{i,j} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{i,n} \\ \\ a_{m,1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{pmatrix}$$

Exemple 1.2.1 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y + z \\ x - y + 4z \\ 7x - y + z \end{pmatrix}$$

La matrice associée a l'application f est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 1.2.2 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y+z \\ x-y+4z \\ 7x-z \end{pmatrix}$
La matrice associée a l'application f est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.3 Application linéaire associée à une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1}\dots\dots\dots\dots a_{1,n} \\ \\ a_{i,1}\dots\dots a_{i,j}\dots\dots a_{i,n} \\ \\ a_{m,1}\dots\dots\dots\dots a_{m,n} \end{pmatrix}$ une matrice donnée
L'application linéaire associée à la matrice A

définie par

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}\dots\dots\dots\dots a_{1,n} \\ \\ a_{i,1}\dots\dots a_{i,j}\dots\dots a_{i,n} \\ \\ a_{m,1}\dots\dots\dots\dots a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
L'application linéaire associée à la matrice A
$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y+z \\ x-y+4z \\ 7x-z \end{pmatrix}.$

1.4 Changement de base, matrice de passage

1.4.1 Les espaces vectoriels

Définition 1.4.1 *On dit que l'ensemble E, non vide, est un espace vectoriel sur $K(K=\mathbb{R}$ ou $K=\mathbb{C})$ou K-espace vectoriel si E est muni des deux lois de composition :*

•loi de composition interne "addition" : vérifiant :

$\forall (x,y,z)\in E^3$ *on a* $(x+y)+z=x+(y+z)$

$\forall (x,y)\in E^2$ *on a* $x+y=y+x$

$\exists 0_E\in E$ *tel que*$\forall x\in E,\ x+0_E=x$ *(avec* 0_E *élément neutre)*

$\forall x\in E,\exists -x\in E\diagdown x+(-x)=0_E($ $-x$ *élément symétrique)*

loi de composition externe "multiplication par un scalaire" : vérifiant :

1)$\forall (x,y)\in E^2,\forall (\alpha,\beta)\in E^2$ *on a*

$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$

$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$

2)$\exists 1_E\in E$ *tel que* $\forall x\in E:1_E x=x$

Les éléments de E sont appelés "vecteurs", les éléments de K sont appelés "scalaires".

Exemple 1.4.1 $\mathbb{R}^3$ *est un espace vectoriel*

$(x,x,y)+(x_1,y_1,z_1)=(x+x_1,y+y_1,z+z_1)$

$0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)$ *et* $\alpha(x,y,z)=(\alpha x,\alpha y,\alpha z)$

Exemple 1.4.2 $M_{2.2}(\mathbb{R})$ *est un espace vectoriel*

1.4.2 Base d'un espace vectoriel

Une famille $(x_1,x_2,.........,x_n)$ de E est dite **libre** ou les vecteurs ($x_1,x_2,.........,x_n$) sont dits linéairement indépendants si et seulement si : .$\forall(\alpha_1,\alpha_2,.........,\alpha_n)\in K$,

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,.........+\alpha_nx_n=0\Longrightarrow\alpha_1+\alpha_2+.........+\alpha_n=0$$

Une famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de E est **génératrice** de E si pour tout vecteur $x \in E$on peut trouver éléments $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)deK$ tels que :

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, ... + \alpha_n x_n$$

Définition 1.4.2 *On appelle **base** d'un espace vectoriel , toute famille* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *libre et génératrice de* E*.*

Exemple 1.4.3 $B_0 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ *est un base de* $\mathbb{R}^3$
B_0 *est libre car* $\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \lambda(0,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow (\alpha, \beta, \lambda) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = \lambda = 0$
B_0 *est génératrice de* $\mathbb{R}^3$ *car* $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$

1.4.3 matrice de passage

Etant donnés un espace vectoriel et deux bases $B_0 = (v_1, ..., v_n)$ et $B_1 = (w_1, ..., w_n)$.
On écrit la décomposition des vecteurs de B_1 sur la base B_0

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i$$

La matrice de passage P de B_0à B_1est la matrice carrée (n, n)

$$P = (p_{ij})_{n,n}$$

Exemple 1.4.4 $B_0 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ *et* $B_1 = \{(1,4,2), (4,1,0), (6,0,0)\}$

deux bases de $(\mathbb{R})^3$.
$(1,4,2) = (1,0,0) + 4(0,1,0) + 2(0,0,1)$
$(4,1,0) = 4(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$,
$(6,0,0) = 6(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1)$
La matrice de passage P de B_0 à B_1est la matrice carrée $(3,3)$
$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.5 Les matrices particulières

1.5.1 Matrice nulle $(m \times n)$

Est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

Exemple 1.5.1 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.5.2 Matrice identité$(n \times n)$

Est la matrice dont tous les coefficients $a_{i,j} = 1$ pour $i = j$ et $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$.

notée I_n.

On a pour toute $A \in M_{n,n}(\mathbb{R}), AI_n = I_nA = A$

Exemple 1.5.2 $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.5.3 Matrice triangulaire supérieure $(n \times n)$

Est la matrice dont tous les coefficients $a_{i,j} = 0$ pour $j > i$.

Exemple 1.5.3 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

1.5.4 Matrice triangulaire inférieure $(n \times n)$

Est la matrice dont tous les coefficients $a_{i,j} = 0$ pour $i > j$.

Exemple 1.5.4 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -9 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1.5.5 Matrice diagonale$(n \times n)$

Est la matrice dont tous les coefficients $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$ sauf les coefficients $a_{i,j}$ tel que $i = j$.

Exemple 1.5.5 $A=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

1.5.6 Transposée d'une matrice$(n \times n)$

Transposée de la matrice $A = \left(a_{i,j}\right)_{n,n}$ notée A^t et

$A^t = \left(\grave{a}_{i,j}\right)_{n,n}$ tel que $\grave{a}_{i,j} = a_{j,i} \quad ,\forall i = 1, ..., n, \forall j = 1, ..., n.$

Exemple 1.5.6 $A=\begin{pmatrix} 7 & 5 & -1 \\ -6 & 3 & 2 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *alors* $A^t = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 8 \\ 5 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1.5.7 Matrice symétrique

On dit que la matrice A est symétrique si $A = A^t$.

Exemple 1.5.7 $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ *est une matrice symétrique.*$(A^t = A)$

1.5.8 Comatrice d'une matrice$(n \times n)$

Comatrice de la matrice $A = \left(a_{i,j}\right)_{n,n}$ notée $com\,(A)$ et

$$\mathrm{com}(A) = \left((-1)^{i+j} \det\left(M_{i,j}\right)\right)_{n,n} \text{ tel que } M_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1}.........a_{1,j-1}...a_{1,j+1}.........a_{1,n} \\ \\ \\ a_{i-1,1}.......a_{i-1,j-1}...a_{i-1,j+1}..........a_{i-1,n} \\ a_{i-1,1}.......a_{i+1,j-1}...a_{i+1,j+1}..........a_{i-1,n} \\ \\ a_{n,1}.........a_{n,j-1}...a_{n,j+1}...........a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Exemple 1.5.8 $A = \begin{pmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{1} \\ \overset{-}{4} & \overset{+}{0} & \overset{-}{2} \\ \overset{+}{0} & \overset{-}{2} & \overset{+}{6} \end{pmatrix}$ *alors* $com\,(A) = \begin{pmatrix} -4 & -24 & 8 \\ -10 & 6 & -2 \\ 4 & 2 & -8 \end{pmatrix}.$

1.5.9 Inverse d'une matrice $(n \times n)$

L'inverse de la matrice A notée A^{-1} et

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

et on aussi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(com\,(A)\right)^t$$

Exemple 1.5.9 $A = \begin{pmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{1} \\ \overset{-}{4} & \overset{+}{0} & \overset{-}{2} \\ \overset{+}{0} & \overset{-}{2} & \overset{+}{6} \end{pmatrix}$ *alors* $com\,(A) = \begin{pmatrix} -4 & -24 & 8 \\ -10 & 6 & -2 \\ 4 & 2 & -8 \end{pmatrix}$

$(com\,(A))^t = \begin{pmatrix} -4 & -10 & 4 \\ -24 & 6 & 2 \\ 8 & -2 & -8 \end{pmatrix}$ *et* $\det A = -4 - 40 = -44$

donc $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,(com\,(A))^t = \begin{pmatrix} \frac{4}{44} & \frac{10}{44} & \frac{-4}{44} \\ \frac{24}{44} & \frac{-6}{44} & \frac{-2}{44} \\ \frac{-8}{44} & \frac{2}{44} & \frac{8}{44} \end{pmatrix}$

Remarque 1.5.1 *Soit A une matrice*

A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

Chapitre 2

Systèmes d'équations linéaires

2.1 Généralités

Définition 2.1.1 *On appelle système d'équations linéaires de m équations en n inconnues un système de la forme :*

$$\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,n}x_n = b_1 \\ ... \\ a_{m,1}x_1 + ... + a_{m,n}x_n = b_m \end{array}\right. \tag{2.1.1}$$

où les coefficients $a_{i,j}$ et b_j sont donnés, et où les x_i sont des inconnues dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1.1 Notation matricielle

Peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$AX = B$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & a_{1,n} \\ & ... & \\ a_{m,1} & & a_{m,n} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \\ b_m \end{pmatrix}$$

Exemple 2.1.1

$$\left\{\begin{array}{c} 2x + y + 5z = -10 \\ x - 3y - 7z = 5 \\ x - z = 13 \end{array}\right.$$

La matrice associée est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $b = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}$

Alors on a $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}$.

2.1.2 Rang d'un système d'équations linéaires

Soit A une matrice de type (m, n)

Déterminant d'ordre r **extrait de A** :

On appelle déterminant d'ordre r extrait de A le déterminant d'une matrice carrée formée en supprimant dans A $(m-r)$ lignes et $(n-r)$ colonnes.

on appelle **rang de la matrice A** : l'ordre du déterminant non nul, d'ordre le plus élevé, extrait de A.

Exemple 2.1.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}$

les quatre déterminants d'ordre 3 sont nuls, par contre le déterminant d'ordre 2 extrait $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ *n'est par nul, A est de rang 2.*

On appelle rang de système le rang de la matrice A de ce système.

2.2 Etude de l'ensemble des solutions

Soit le système (2.1.1) que nous supposons de rang r et écrit de telle façon que le déterminant $\triangle$ des coefficients des r premières inconnues et r premières équations soit non nul.

2.2.1 Déterminant caractéristique

Déterminant caractéristique de (2.1.1)

On appelle déterminant caractéristique de (2.1.1) le déterminant de la forme

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{1,1} & .... & a_{1,r} & b_1 \\ & ..... & & \\ a_{r,1} & ..... & a_{r,r} & b_r \\ a_{k,1} & ..... & a_{k,r} & b_k \end{vmatrix} ,k = r+1, r+2, ..., m.$$

2.2.2 Etude de l'ensemble des solutions

a) Si $r = m = n$ le système (2.1.1) admet une seule solution.

b) Si $r \prec m \prec n$, le système (2.1.1) indéterminé à $(n-r)$ paramètres.

c) Si $r \prec m$, et si l'un au moins des déterminants caractéristiques de (2.1.1) non nul, (2.1.1) n'a pas de solution.

d)Si $r \prec m$, et si les déterminants caractéristiques de (2.1.1) sont nuls, (2.1.1) réduit aux r équations et se résout comme dans le cas (b) .

Exemple 2.2.1 $\begin{cases} x+y+2w=-2 \\ x+2y+3w=a \\ 3x+5y+8z=2 \\ 5x+9y+14z=b \end{cases}$ *,a,b supposés donnés.*

la matrice de ce système $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 8 \\ 5 & 9 & 14 \end{pmatrix}.B=\begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 2 \\ b \end{pmatrix}$

Les quatre déterminants d'ordre 3 sont nuls, par contre le déterminant d'ordre 2 extrait $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ *n'est par nul, A est de rang 2.*

les déterminants caractéristiques :

$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}=-2a+4,\ D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 5 & 9 & b \end{vmatrix}=-4a+b+2$

1) Si $D_1 \neq 0$ *ou* $D_2 \neq 0$ *alors* (S) *n'a pas de solution.*

2) Si $D_1=D_2=0$ *dons ce cas* S *indéterminé à un paramètre* z

$\begin{cases} x=-3z-6 \\ y=z+4 \end{cases}, z \in \mathbb{R}.$

2.3 Les méthodes de résolutions d'un système linéaire

2.3.1 Résolution par la méthode de Cramer

Soit (S) un système carré c'est à dire sa matrice A est carrée, avec l'interprétation matricielle : $AX=B$. Si la matrice A est inversible on peut résoudre ce système par méthode de Cramer. Nous noterons A_i la matrice A des coefficients dans laquelle on a remplacé la i ème colonne par la matrice B.

La résolution du système, par la méthode de Cramer, donne

$$x_i=\frac{det(A_i)}{det(A)}, i=1,............., n.$$

Exemple 2.3.1 *Avec la méthode de Cramer, résoudre* $\begin{cases} 3x-y=4 \\ -5x+2y=-2 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ça nous donnera

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

et $\quad x = \dfrac{\det A_1}{\det A} = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{6}{1} = 6, y = \dfrac{\det A_1}{\det A} = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{14}{1} = 14.$

$(x, y) = (6, 14)$ est une solution unique de ce système.

Exemple 2.3.2 *Résoudre* $\begin{cases} 5x + 7y - 3z = 16 \\ 3x - 2y + 4z = -7 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$

avec la méthode de Cramer.

Identifions d'abord la matrice des coefficients :

$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

et la matrice des constantes :

$B = \begin{pmatrix} 16 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$

Nous obtenons :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 16 & 7 & -3 \\ -7 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 16 & -3 \\ 3 & -7 & 4 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 16 \\ 3 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Et

$x = \dfrac{det(A_1)}{det(A)} = \dfrac{16\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} -7\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} +(-3)\begin{vmatrix} -7 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}}{5\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} -7\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} +(-3)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$

$x = \dfrac{16 \times (-2) - 7 \times (-17) - 3 \times 5}{5 \times (-2) - 7 \times (-7) - 3 \times (5)} = \frac{72}{24} = 3$

$y = \dfrac{det(A_2)}{det(A)} = \dfrac{5\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} -16\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} +(-3)\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{24}$

y= $\dfrac{5 \times (-17) - 16 \times (-7) - 3 \times 25}{24} = \frac{-48}{24} = -2$

$$z = \frac{det(A_3)}{det(A)} = \frac{5\begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + (16)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{24}$$

z= $\dfrac{5 \times (-5) - 7 \times (25) + 16 \times 5}{24} = \frac{-120}{24} = -5$

donc $(3, -2, -5)$ est une solution unique de ce système.

2.3.2 Résolution par la méthode de la matrice inverse

Soit (S) un système carré, avec l'interprétation matricielle : $AX = B$.

Si la matrice A est inversible on peut résoudre ce système par la méthode de la matrice inverse comme suit :

On a

$$AX = B \Longleftrightarrow X = A^{-1}B$$

Exemple 2.3.3 *Résoudre* $\begin{cases} 5x + 7y - 3z = 16 \\ 3x - 2y + 4z = -7 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 16 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$\det A = 24$ alors A est inversible.

Calculons A^{-1} :

$$\operatorname{com}(A) = \begin{pmatrix} +\det\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ +\det\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{com}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \\ 22 & -29 & -31 \end{pmatrix} \Longrightarrow (com\,(A))^t = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 22 \\ 7 & -2 & -29 \\ 5 & 2 & -31 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(com\,(A))^t = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 22 \\ 7 & -2 & -29 \\ 5 & 2 & -31 \end{pmatrix}$$

donc $X = A^{-1}B = \dfrac{1}{24}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 22 \\ 7 & -2 & -29 \\ 5 & 2 & -31 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{24}\begin{pmatrix} -2 \times 16 + 4 \times (-7) + 22 \times 6 \\ 7 \times 16 + (-2) \times (-7) + (-29) \times 6 \\ 5 \times 16 + 2 \times (-7) + (-31) \times 6 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 72 \\ -48 \\ -120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

alors $(3, -2, -5)$ est une solution unique de ce système.

2.3.3 Résolution par la méthode de Gauss

Les opérations élémentaires

Définition 2.3.1 *Soit (S) un système linéaire de n équations, p inconnues et à coeffcients dans* $\mathbb{R}$.

Notons $E1, E2, ..., En$ les équations de (S).

On appelle opération élémentaire sur les lignes de (S) l'une des opérations suivantes :

– Multiplier une équation Ei par un scalaire non nul a.

Cette opération est notée : $Ei \to aEi$.

– Ajouter à l'une des équations Ei un multiple d'une autre équation Ej .

Cette opération est notée : $Ei \to Ei+$ßEj.

– Echanger deux équation Ei et Ej : Cette opération est notée : $Ei \rightleftarrows Ej$.

Proposition 2.3.1 *Une opération élémentaire sur les lignes de (S) transforme le système (S) en un système (S') équivalent, c'est-a-dire ayant exactement les mêmes solutions que (S).*

Méthode de Gauss

Par une suite d'opérations élémentaires, on transforme le système (S) en un système (S$'$) équivalent et dont la matrice est triangulaire supérieure.

Exemple 2.3.4

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 11 \\ 2x + 3y + 4z + t = 12 \\ 3x + 4y + z + 2t = 13 \\ 4x + y + 2z + 3t = 14 \end{cases}$$

Résoudre le système (S) :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 11 & \\ 2x + 3y + 4z + t = 12 & E2 \to E2 - 2E1 \\ -2y - 8z - 10z = -20 & E3 \to E3 - 3E1 \\ 4x + y + 2z + 3t = 14 & E4 \to E4 - 4E1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+3z+4t=11 \\ -y-2z-7t=-10 \\ -2y-8z-10t=-20 & E3\to E3-2E2 \\ -7y-10z-13t=-30 & E4\to E4-7E2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+3z+4t=11 \\ -y-2z-7t=-10 \\ -4z+4t=0 \\ 4z+36t=40 & E4\to E4+E3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+3z+4t=11 \\ -y-2z-7t=-10 \\ -4z+4t=0 \\ 40t=40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=1 \\ z=t=1 \\ y=-2z-7t+10=1 \\ x=11-2y+3z+4t=2 \end{cases}$$

Le système (S) posséde donc l'unique solution (2, 1, 1, 1).

Exemple 2.3.5

$$\begin{cases} x+3y+5z-2t-7u=3 \\ 3x+y+z-2t-u=1 \\ 2x-y-3z+7t+5u=2 \\ 3x-2y-5z+7t+8u=2 \end{cases}$$

Résoudre (S) $\begin{cases} x+3y+5z-2t-7u=3 \\ 3x+y+z-2t-u=1 & E2\to E2-3E1 \\ 2x-y-3z+7t+5u=2 & E3\to E3-2E \\ 3x-2y-5z+7t+8u=2 & E4\to E4-3E1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+3y+5z-2t-7u=3 \\ -8y-14z+4t+20u=-8 \\ -7y-13z+11t+19u=-3 & E4\to 8E3-7E2 \\ -11y-20z+13t+29u=-18 & E4\to 8E4-11E2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y+5z-2t-7u=3 \\ -8y-14z+4t+20u=-8 \\ -6z+60t+12u=24 \\ -6z+60t+12u=32 & E4\to E4-E3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y+5z-2t-7u=3 \\ -8y-14z+4t+20u=-8 \\ -6z+60t+12u=24 \\ 0=8 \end{cases}$$

alors (S) n'a pas de solution.

Chapitre 3

Les intégrales

3.1 Intégrale indéfinie

Définition 3.1.1 *Soit f une fonction continue sur I.*
On dit que $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I ssi la dérivée de F donne f ($F\prime = f$). On prend alors l'habitude de noter toute primitive de f sous forme

$$F(x) = \int f(x)\, dx$$

et s'appelle aussi intégrale indéfinie de f.

Remarque 3.1.1 *La primitive d'une fonction s'il existe n'a pas unique.*

Exemple 3.1.1 *1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$. Alors $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \frac{x^2}{2}$ est une primitive de f.*
La fonction définie par $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2$ est aussi une primitive de f.

3.1.1 Primitives des fonctions usuelles

la fonction f	la primitive de f définie par $(k \in \mathbb{R})$	l'intervalle I
$f(x) = c$	$F(x) = cx + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R} \diagup \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = In\lvert x\rvert + k$	$]-\infty, 0[\, ou \,]0, +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + k$	$\mathbb{R}$

Proposition 3.1.1 *Soient f et g deux fonctions continues et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :*

$$\int f(x) + g(x)\, dx = \int f(x) + \int g(x)\, dx, \int \lambda f(x)\, dx = \lambda \int f(x)\, dx.$$

3.1.2 Intégration par parties – Changement de variable

Intégration par parties

Théorème 3.1.1 *Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.*
On a

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Preuve. On $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
alors $\int (u(x)v(x))'\, dx = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$
donc

$$u(x)\, v(x) = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$$

c'est à dire

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

□

Exemple 3.1.2 *calculons* $\int x^2 e^x dx$
On a

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx = \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int xe^x dx$$

$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - \ e^x dx$
alors $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int xe^x dx = x^2 e^x - 2\ xe^x + 2e^x + c, c \in \mathbb{R}$

Changement de variable

Théorème 3.1.2 *Soient u une fonction dérivable et f une fonction continue et* $F(x) = \int f(x)\,dx$

On a $\int u' f(u)\,dx = \int f(u)\,du = F(u)$

Exemple 3.1.3 *Calculons la primitive* $K(x) = \int \tan x \ dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx.$

on choisit $u(x) = \cos x, f(x) = \frac{1}{x}, u'(x) = -\sin x, F(x) = In\ |x| \ +c$

$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int u' f(u)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) = -In\,|\cos x| + c, c \in \mathbb{R}.$

$$K(x) = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -In\,|\cos x| + c, c \in \mathbb{R}.$$

3.2 L'intégrale des polynômes

Définition 3.2.1 *Un polynôme à coefficients dans K* ($K = \mathbb{R}$ *ou* $K = \mathbb{C}$) *est une expression de la forme*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

avec $n \in \mathbb{N}$ *et* $a_0, a_1, ..., a_n \in K$.

L'ensemble des polynômes est noté $K[X]$.

– Les ai sont appelés les coefficients du polynôme.

– On appelle le degré de P le plus grand entier i tel que ai $\neq 0$ *; on le note degP*

et on a $\int P(x)dx = \int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0)\,dx,$

$$= \quad \tfrac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \tfrac{a_{n-1}}{n} x^n + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \tfrac{a_2}{3} x^3 + \tfrac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + k$$

Exemple 3.2.1 $\int (x^2 + 2x + 5)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 5x + k, k \in \mathbb{R}$

3.3 Intégration des fonctions rationnelles

Définition 3.3.1 *Soit f une fonction*

On dit que la fonction f est une fonction rationnelle si

$f\left(x\right)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, *où* $P(x)$, $Q(x)$ *sont des polynômes à coefficients réels.*

3.3.1 Intégration des éléments simples

La fraction $\frac{P(x)}{Q(x)}$ s'écrit comme somme d'un polynôme $E(x)\in R[x]$ et d'éléments simples d'une des formes suivantes :

$$\frac{\gamma}{\left(x-x_0\right)^n} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha x+\beta}{\left(x^2+ax+b\right)^m} \quad \text{avec } a^2-4b\langle 0$$

où $\alpha,\beta,\lambda,\gamma,a,b\in\mathbb{R},n,m\in\mathbb{N}^*$

1) Calculons $\displaystyle\int\frac{\gamma}{\left(x-x_0\right)^n}dx$

Si $n=1$ on a $\displaystyle\int\frac{\gamma}{\left(x-x_0\right)^1}dx=\gamma In\left|x-x_0\right|+k$

Si $n\geq 2$ on a $\displaystyle\int\frac{\gamma}{\left(x-x_0\right)^n}dx=\int\gamma\left(x-x_0\right)^{-n}dx=\gamma\frac{1}{-n+1}\left(x-x_0\right)^{-n+1}+k$

2) Calculons $\displaystyle\int\frac{\alpha x+\beta}{\left(x^2+ax+b\right)^m}dx$ avec $a^2-4b\langle 0$

Proposition 3.3.1 *Soit* $I_n=\displaystyle\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^n}dx,n\in\mathbb{N}^*$

1)$I_1=\displaystyle\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)}dx=arctng\left(x\right)+k$

2)$I_{n+1}=\frac{1}{2n}\frac{x}{\left(x^2+1\right)^n}+\frac{2n-1}{2n}I_n,\quad pour\ \ n\geq 1.$

Preuve. $\mathrm{I}_n=\displaystyle\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^n}dx$

$u^{'}\left(x\right)=1\Rightarrow u\left(x\right)=x$

$v\left(x\right)=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^n}\Rightarrow v^{'}\left(x\right)=-2nx\left(x^2+1\right)^{-n-1}=\frac{-2nx}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}$

$I_n=\displaystyle\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^n}dx=\frac{x}{\left(x^2+1\right)^n}-\int-n\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}xdx$

$\mathrm{I}_n=\displaystyle\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^n}dx=\frac{x}{\left(x^2+1\right)^n}+\int n\frac{2x^2}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}dx$

$\mathrm{I}_n=\displaystyle\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^n}dx=\frac{x}{\left(x^2+1\right)^n}+n\int\frac{2x^2+2-2}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}dx$

$\mathrm{I}_n=\displaystyle\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^n}dx=\frac{x}{\left(x^2+1\right)^n}+n\int\frac{2}{\left(x^2+1\right)^n}dx-n\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}dx$

$$\mathrm{I}_n = \frac{x}{\left(x^2+1\right)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}$$
$$I_{n+1} = \tfrac{1}{2n}\tfrac{x}{\left(x^2+1\right)^n} + \tfrac{2n-1}{2n}I_n, \quad \text{pour} \quad n \geq 1. \qquad \square$$

Calculons $\displaystyle\int \frac{\alpha x+\beta}{\left(x^2+ax+b\right)^m}dx$

1)Si $\alpha \neq 0$ on a

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{\left(x^2+ax+b\right)^m}dx = \frac{\alpha}{2}\int \frac{2x+\frac{2\beta}{\alpha}}{\left(x^2+ax+b\right)^m}dx = \frac{\alpha}{2}\int \frac{2x+a-a+\frac{2\beta}{\alpha}}{\left(x^2+ax+b\right)^m}dx$$
$$= \frac{\alpha}{2}\int \frac{2x+a}{\left(x^2+ax+b\right)^m}dx + \frac{\alpha}{2}\int \frac{-a+\frac{2\beta}{\alpha}}{\left(x^2+ax+b\right)^m}dx$$
$$= \frac{\alpha}{2}\int \frac{2x+a}{\left(x^2+ax+b\right)^m}dx + \frac{\alpha}{2}\left(-a+\tfrac{2\beta}{\alpha}\right)\int \frac{1}{\left(x^2+ax+b\right)^m}dx$$

A) $\displaystyle\int \frac{2x+a}{\left(x^2+ax+b\right)^m}dx$, On choisit $u(x) = x^2+ax+b \Rightarrow u'(x) = 2x+a$

$$\int \frac{2x+a}{\left(x^2+ax+b\right)^m}dx = \int \tfrac{u'(x)}{(u(x))^n}dx = \begin{cases} \frac{1}{-m+1}\left(u(x)\right)^{-m+1} & \text{si } \ \mathrm{m} \geq 2 \\ \ln\left(u(x)\right) \text{si} & m=1 \end{cases}$$

B) $\displaystyle\int \frac{1}{\left(x^2+ax+b\right)^m}dx$

$$x^2+ax+b = \left(x-\tfrac{a}{2}\right)^2 + \left(b-\tfrac{a^2}{4}\right), t = x-\tfrac{a}{2}, k^2 = \left(b-\tfrac{a^2}{4}\right)$$
$$\int \frac{1}{\left(x^2+ax+b\right)^m}dx = \int \frac{1}{\left(t^2+k^2\right)^m}dt = \tfrac{1}{k^2}\int \frac{1}{\left(\left(\frac{t}{k}\right)^2+1\right)^m}dt$$

on choisit $s = \frac{t}{k} \Rightarrow ds = \frac{1}{k}dt \Rightarrow dt = kds$

$$\int \frac{1}{\left(x^2+ax+b\right)^m}dx = \int \frac{1}{\left(t^2+k^2\right)^m}dt = \tfrac{k}{k^{2m}}\int \frac{1}{\left((s)^2+1\right)^m}ds \,(\text{voir la proposition })$$

2)Si $\alpha = 0$ alors $\displaystyle\int \frac{\alpha x+\beta}{\left(x^2+ax+b\right)^m}dx = \int \frac{\beta}{\left(x^2+ax+b\right)^m}dx \,(\text{voir}\,(B))$

Exemple 3.3.1 *Calculons* $\displaystyle\int \frac{3x+6}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx$

on a $\displaystyle\int \frac{3x+6}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx = \tfrac{3}{2}\int \frac{2x+4}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx = \tfrac{3}{2}\int \frac{2x+1+3}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx$

$$= \tfrac{3}{2}\int \frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx + \tfrac{9}{2}\int \frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx$$

a)$\displaystyle\int \frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx$, *par changement de variable* $u(x) = x^2+x+1$ *et* $u'(x) = (2x+1)$ *on obtient*

$$\int \frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx = \int \frac{u'(x)}{\left(u(x)\right)^2}dx = \tfrac{-1}{(u(x))} = \frac{-1}{x^2+x+1}$$

b)$\displaystyle\int \frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx$

$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$,*par changement de variable* $t = x+\frac{1}{2}$*on obtient*

$\int \frac{1}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}dt = \int \frac{16}{9}\frac{1}{\left(\left(\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1\right)^2}dt$ *par changement de variable* $s=\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ *on obtient*

$\int \frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx = \frac{16}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{\left(s^2+1\right)^2}ds \ \left(I_{n+1}=\frac{1}{2n}\frac{x}{\left(x^2+1\right)^n}+\frac{2n-1}{2n}I_n\right)$

finalement

$$\int \frac{3x+6}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx = \frac{3}{2}\frac{-1}{x^2+x+1}+\frac{9}{2}\left(\frac{16}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)}{\left(\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1\right)}+\frac{1}{2}arctng\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right)\right)$$

3.3.2 Décomposition en éléments simples

Soit $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle

par la division euclidien on obtient $P(x)=Q(x)q(x)+R(x)$ telque $\deg R\leq\deg Q$.

donc $f(x)=q(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$ tel que $\deg R\leq\deg Q$.

$Q(x)=(x-x_0)^{k_0}(x-x_1)^{k_1}\ldots\ldots\ldots\ldots.(x-x_m)^{k_m}\left(x^2+a_0x+b_0\right)^{l_0}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\left(x^2+a_nx+b_n\right)^{l_n}$

on peut écrire

$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{\alpha_{0,1}}{(x-x_0)}+\frac{\alpha_{0,2}}{(x-x_0)^2}\ldots\ldots\frac{\alpha_{0,k_0}}{(x-x_0)^{k_0}}+\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\frac{\beta_{0,1}x+\lambda_{0,1}}{\left(x^2+a_0x+b_0\right)^{l_0}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{\beta_{0,l_0}x+\lambda_{0,l_0}}{\left(x^2+a_0x+b_0\right)^{l_0}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exemple 3.3.2 $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-5x+6}=1+\frac{5x-7}{(x-2)(x-3)}$

on peut écrire $\frac{5x-7}{(x-2)(x-3)}$ *sur la forme*

$\frac{5x-7}{(x-2)(x-3)}=\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x-3}=\frac{b(x-3)+c(x-2)}{(x-2)(x-3)}=\frac{(b+c)x-3b-2c}{(x-2)(x-3)}$

par la comparaison

$\begin{cases} b+c=5 \\ -3b-2c=-7 \end{cases} \Longrightarrow b=-3, c=8$

alors $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-5x+6}=1+\frac{-3}{x-2}+\frac{8}{x-3}$

Exemple 3.3.3 $f(x)=\frac{x^4+1}{x^3(x^2+x+1)}$

on peut écrire f *sur la forme*

$$f(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}+\frac{\alpha x+\beta}{x^2+x+1}$$

donc

$$f(x) = \frac{ax^2(x^2+x+1) + bx(x^2+x+1) + c(x^2+x+1) + (\alpha x+\beta)x^3}{x^3(x^2+x+1)}$$

$$f(x) = \frac{ax^4 + ax^3 + a^2 + bx^3 + bx^2 + bx + cx^2 + cx + c + \alpha x^4 + \beta x^3}{x^3(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{(a+\alpha)x^4 + (a+\beta+b)x^3 + (a+b+c)x^2 + (b+c)x + c}{x^3(x^2+x+1)} = \frac{x^4+1}{x^3(x^2+x+1)}$$

$$\begin{cases} a+\alpha = 1 \\ a+\beta+b = 0 \\ a+b+c = 0 \\ b+c = 0 \\ c = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ a = 0 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

alors $f(x) = \frac{0}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{x+1}{x^2+x+1}$

3.4 Intégration des fonctions exponentielles et trigonométriques

3.4.1 Intégration des fonctions exponentielles

pour calculer les primitives de la forme $\int f(e^x)\,dx$
on peut choisir le changement de variable $t = e^x, dt = e^x dx$
donc $\int f(e^x)\,dx = \int \frac{1}{t} f(t)\,dt$

Exemple 3.4.1 $\int \frac{e^x}{e^x+5}dx = \int \frac{1}{t}\frac{t}{t+5}dt = \ln|t+5| + c = \ln|e^x+5| + c$

pour calculer les primitives de la forme $\mathrm{I}_n = \int x^n e^x dx$
on utilise l'intégrale par parties comme suit :
$u(x) = x^n \Rightarrow u(x) = nx^{n-1}$
$v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$
on obtient

$$I_n = x^n e^x - nI_{n-1}$$

3.4.2 Intégration des fonctions trigonométriques

pour calculer les primitives de la forme $\int \sin^n x \cos^m x \quad dx$
on peut choisir le changement de variable $t = \sin x \quad \cos x = \sqrt{1-t^2}, dt = \cos x dx$
donc $\int \sin^n x \cos^m x \quad dx = \int t^n (1-t^2)^{\frac{m-1}{2}} dt$

Exemple 3.4.2 $\int \sin^2 x \cos^3 x \quad dx = \int t^2(1-t^2)\,dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + c$

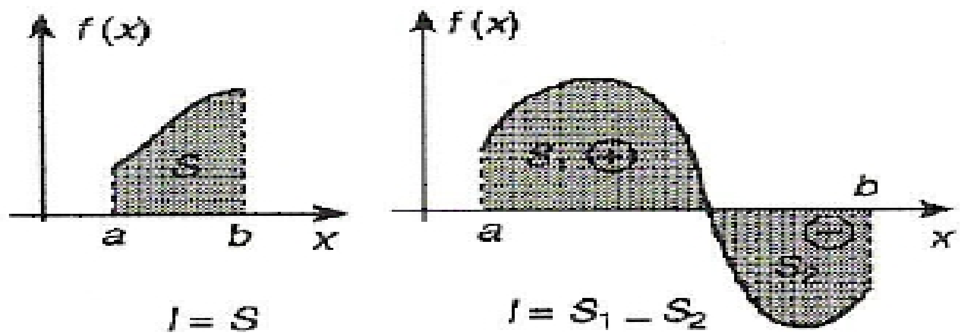
pour calculer les primitives de la forme $\int f(\sin x, \cos x, \tan x) \quad dx$
on peut choisir le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$,
ona $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2}dt$
donc $\int f(\cos x, \sin x, \tan x) \quad dx = \int f\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}, \frac{2t}{1-t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$

Exemple 3.4.3 $\int \frac{\tan x}{(\cos x+\sin x)}dx = \int \frac{4t}{(1-t^2+2t)(1-t^2)}dt = \int \frac{4t}{(t^2-2t-1)(t^2-1)}dt$

3.5 Intégration définie

3.5.1 Interprétation géométrique

L'intégrale définie de f entre a et b, notée $\int_a^b f(x)dx$



3.5.2 L'intégrale de Riemann

Définition 3.5.1 *On appelle subdivision (d'ordre n)de l'intervalle* $I = [a, b]$ *l'ensemble*$\{x_0, ..., x_n\}$ *tel que* $a = x_0 < x_1 <\cdots< x_{n-1} < x_n = b.$

La somme de Riemann

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$.

et $\{x_0, ..., x_n\}$une subdivision de $[a, b]$

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\delta x_i$,tel que $\delta x_i = x_{i+1} - x_i, i = 0, 1, ..., n$

s'appelle la somme de riemann.

On a

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\delta x_i$$

Exemple 3.5.1 *Lorsque* $x_i = a + ih, i = 0, 1, ..., n$ *avec* $h = \frac{b-a}{n}$ *on obtient une subdivision*

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$.

On a $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\delta x$,tel que $x_i = a + i\delta x, i = 0, 1, ..., n$ avec $\delta x = \frac{b-a}{n}$.

Définition 3.5.2 *Soit f une fonction continue sur* $I = [a, b]$. *L'intégrale définie de f entre a et b est le nombre réel défini par :*

$$\int_a^b f(x)dx = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur I.

Exemple 3.5.2 $\int_1^2 x^2 \ln x dx$

$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c$

$\int_1^2 x^2 \ln x dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c\right]_1^2 = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{8}{9} + c - \left(-\frac{1}{9} + c\right) = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}$

Proposition 3.5.1 *Soient f et g deux fonctions continues et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :*

1) $\int_a^b f(x) + g(x)\, dx = \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)\, dx, \int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx.$

2) $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)\, dx$,*tel que* $a \leq c \leq b$

3) Si $a \leq b$,*on a* $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx$

4) Si $a \leq b$,*on a* $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$

Preuve. soit F la primitive de la fonction f □

Chapitre 4

Les équations différentielles

4.1 Les équations différentielles ordinaires

Définition 4.1.1 *Une équation différentielle linéaire est une équation de la forme*

$$a_0(x)\, y_p + a_1(x)\, y_p^{'} + ... + a_n(x)\, y_p^{(n)} = f(x) \tag{E}$$

l'équation homogéne associée est

$$a_0(x)\, y_h + a_1(x)\, y_h^{'} + ... + a_n(x)\, y_h^{(n)} = 0 \tag{E.H}$$

Proposition 4.1.1 *Si* y_1 *et* y_2 *deux solutions de* $(E.H)$
Alors $y_1 + y_2$ *et* αy_1 *sout aussi deux solutions de* $(E.H)$

Exemple 4.1.1 $y_1(x) = x$ *et* $y_2(x) = 5$ *deux solutions de l'équation* $y^{'''} + y^{''} = 0$
alors $y_3(x) = x + 5, y_4(x) = 10x$ *sont aussi des solutions*

Proposition 4.1.2 *Si* S_0 *est l'ensemble des solutions de* $(E.H)$ *et* y_p *une solution* ***particulière*** *de* $(*)$
alors l'ensemble des solutions de $(*)$ *est donné par*
$S = \{y_p + y_h$ *tel que* $y_h \in S_0\}$

Preuve

On a y_p est une solution **particulière** de $(*)$ et y_h est une solution de $(E.H)$

alors

$$a_0(x)\,y_p + a_1(x)\,y_p^{'} + ... + a_n(x)\,y_p^{(n)} = f(x)$$

et

$$a_0(x)\,y_h + a_1(x)\,y_h^{'} + ... + a_n(x)\,y_h^{(n)} = 0$$

donc

$$a_0(x)\,(y_p + y_h) + a_1(x)\left(y_p^{'} + y_h^{'}\right) + ... + a_n(x)\left(y_p^{(n)} + y_h^{(n)}\right) = f(x)$$

$$a_0(x)\,(y_p + y_h) + a_1(x)\,(y_p + y_h)^{'} + ... + a_n(x)\,(y_p + y_h)^{(n)} = f(x)$$

finalement $y_p + y_h$ est une solution de $(*)$

4.2 L'équations diffférentielles d'ordre 1

4.2.1 Equations différentièlles de variables séparées :

Une équation différentielle de 1er ordre est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme

$$f(y)\cdot y^{'} = g(x)$$

donc $\displaystyle\int f(y)\cdot y^{'}dx = \int g(x)dx \Longrightarrow F(y) = G(x) + c$
(ou F est une primitive de f et G est uneprimitive de g)
donc

$$y = F^{-1}(G(x) + c)$$

Exemple 4.2.1 *Résoudre sur* $I =]1, \infty[$ *l'équation différentielle*

$$xy' \ln x = (3\ln x + 1)y$$

. On peut séparer les variables (x et y) en divisant par $yx\ln x$*,*
$\dfrac{y'}{y} = \dfrac{(3\ln x + 1)}{x\ln x}$
donc $\displaystyle\int \frac{y'}{y}dx = \int \frac{(3\ln x + 1)}{x\ln x}dx$

alors $\ln|y| = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x\ln x}\right) dx$
$\ln|y| = 3\ln x + \ln(\ln x) + c$

$$y = ke^{3\ln x + \ln(\ln x)}, \forall k \in \mathbb{R}$$

Exemple 4.2.2 *Résoudre* $y^{'} = x^2 + 1$
on a $y^{'} = x^2 + 1$ *alors* $\int y^{'} dx = \int (x^2 + 1)\, dx$

$$y = \frac{x^3}{3} + x + c, \forall c \in \mathbb{R}$$

4.2.2 Equations différentièlles linéaires d'ordre 1

$a(x)y^{'} + b(x)y = f(x)$ où bien : $y^{'} + b(x)y = f(x)$

Résolution d'une équation différentièlle linéaire homogène

$$y' + b(x)y = 0$$

$$\frac{y^{'}}{y} = -b(x)$$

$$\ln|y| = -\int b(x)dx$$

$$\ln|y| = B(x) + c \text{ où } B(x) = \int b(x)dx$$

$$|y| = e^{-B(x)+c}$$

les solutions de $y' + b(x)y = 0$ sont sous la forme $y = ke^{-\int b(x)dx}$

Résolution d'une équation différentièlle linéaire

$$y^{'} + b(x)y = f(x)$$

Si y_p est une solution particulière de $y^{'} + b(x)y = f(x)$

alors

$$y = y_p + ke^{-\int b(x)dx}, \forall c \in \mathbb{R}$$

Exemple 4.2.3 $xy^{'}+2y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ *sur* $\mathbb{R}-\{0\}$
$y^{'}+\frac{2}{x}y=\dfrac{x}{x^2+1}$
L'quation homogéne $y^{'}+\frac{2}{x}y=0\Longrightarrow y=\frac{k}{x^2},k\in\mathbb{R}.$
La solution particulière de $xy^{'}+2y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$
$y_p=\dfrac{k(x)}{x^2}\Rightarrow y_p^{'}=\frac{1}{x^2}k^{'}(x)-\frac{2}{x^3}k(x)$
donc $x\left(\frac{1}{x^2}k^{'}(x)-\frac{2}{x^3}\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)+2\dfrac{k(x)}{x^2}=\dfrac{x^2}{x^2+1}$
$\frac{1}{x}k^{'}(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}\Longrightarrow k^{'}(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$
$$\Longrightarrow k^{'}(x)=\frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1}=x-\frac{x}{x^2+1}$$
$$\Longrightarrow k(x)=\tfrac{x^2}{2}-\ln(x^2+1)$$
$y_p=\dfrac{k(x)}{x^2}=\frac{1}{2}-\dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2}$
finalement la solution générale est

$$y=\frac{1}{2}-\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}+\frac{k}{x^2},k\in\mathbb{R}$$

4.3 Equations différentièlles linéaires d'ordre 2 (EDL d'ordre2)

Définition 4.3.1 *Une EDL du 2^{nd} ordre à coeff. constants est une équation différentielle de la forme*

$$ay^{''}+by^{'}+cy=f(x) \tag{E}$$

oua, $b,c\in\mathbb{R}(a\neq 0)$*, et* $f\in C^0(I)$ *(*I *ouvert de* $\mathbb{R}$*). L'équation homogène (ou sans second membre) associée est*

$$ay^{''}+by^{'}+cy=0$$

Proposition 4.3.1 *Si* y_h *est une solution générale de* (EH)
et y_p*est une solution particulière de* (E)
Alors y_p+y_h *est une solution générale de* (E)

Résolution de l'équation homogène associée (E.H.)

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{E.H}$$

On cherche la solution sous la forme $y = e^{rx}, r \in \mathbb{R}$. On a donc $y' = ry$ et $y'' = r^2 y$, donc (E H) devient

$$y(ar^2 + br + c) = 0.$$

Définition 4.3.2 *L'équation*

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{E.C}$$

se nomme équation caractéristique de (E.H.).

Proposition 4.3.2 *Suivant le signe de $\triangle = b2 - 4ac$, on a les résultats suivants :*

1)$\triangle > 0$: (EC) admet 2 racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$, et

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

est une solution générale de (EH)

2)$\triangle = 0$: (EC) admet 1 racine double r $\in \mathbb{R}$,

$$y(x) = (c_1 x + c_2)\, e^{rx}$$

3) $\triangle < 0$: (EC) admet 2 racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta(\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0)$, et

$$y(x) = (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)\, e^{\alpha x}$$

Exemple 4.3.1 $y'' - 4y' + 3y = 0$,*l' équation caractéristique est* $r^2 - 4r + 3 = 0$
admet 2 racines réelles distinctes $r_1 = 1, r_2 = 3$
l'ensemble des solutions de (E) sont :$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$

Exemple 4.3.2 $y'' + 2y' + y = 0$,*l'équation caractéristique est* $r^2 + 2r + 1 = 0$

$\triangle = 0, r = -1$*racine double*

l'ensemble des solutions de (E) sont :

$$y(x) = (c_1 x + c_2)\, e^x$$

Exemple 4.3.3 $y'' + 2y' + 4y = 0$,*l'équation caractéristique est* $r^2 + 2r + 4 = 0$

$\triangle = -12$ *donc* $r_1 = -1 + \sqrt{3}i$,$r_2 = -1 - \sqrt{3}i$

d'où l'ensemble des solutions de (E) sont : $y(x) = \left(c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \sin\sqrt{3}x\right) e^{-x}$

4.3.1 Résolution de l'équation non homogène

$$ay^{''} + by^{'} + cy = f(x) \tag{E}$$

Solution particulière à (E)

1) Si $f(x) = e^{\alpha x}P(x)$ ou $\alpha \in \mathbb{R}$ et P un polynôme.

On cherche la solution sous la forme $y = e^{x}Q(x)$, ou Q est un polynôme. dont on peut préciser le degré :

– si α n'est pas racine de (EC), alors $degQ = degP$;

– si α est l'une des deux racines de (EC), alors $degQ = degP + 1$;

– si α est racine double de (EC), alors $degQ = degP + 2$.

Exemple 4.3.4

$$y^{''} - 4y^{'} + 4y = (x^2 + 1)e^{x} \tag{1}$$

l'équation homogéne est

$$y^{''} - 4y^{'} + 4y = 0$$

l'équation caractéristique : $r^2 - 4r + 4 = 0$ *;on a* $\triangle = 0$;

$r = 2$ *racine double*

$$y_h = (c_1x + c_2)e^{2x}; c_1; c_2 \in \mathbb{R}$$

ii) $y_p = ?$ *comme 1 n'est pas une solution de l'équation caractéristique, alors*

$y_p = q(x)e^{x}$ *tel que deg q = 2;* $y_p = (\alpha x^2 + \beta x + \lambda)e^{x}$

$y_p^{'} = (2\alpha x + \beta)e^{x} + (\alpha x^2 + \beta x + \lambda)e^{x} = (\alpha x^2 + (\beta + 2\alpha)\, x + \beta + \lambda)\, e^{x}$

$y_p^{''} = (2\alpha)e^{x} + (2\alpha x + \beta)e^{x} + (2\alpha x + \beta)e^{x} + (\alpha x^2 + \beta x + \lambda)e^{x}$

$y_p^{''} = (\alpha x^2 + (\beta + 4\alpha)\, x + (2\beta + \lambda + 2\alpha))e^{x}$

En remplacant dans (E), on obtient :

$(\alpha x^2 + (\beta + 4\alpha)\, x + (2\beta + \lambda + 2\alpha))e^{x} - 4\left((\alpha x^2 + (\beta + 2\alpha)\, x + \beta + \lambda)\, e^{x}\right) + 4(\alpha x^2 + \beta x + \lambda)e^{x} = (x^2 + 1)e^{x}$

$(\alpha x^2 + (\beta - 4\alpha)\, x + (-2\beta + \lambda + 2\alpha))\, e^{x} = (x^2 + 1)e^{x}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta - 4\alpha = 0 \\ -2\beta + \lambda + 2\alpha = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 4 \\ \lambda = 7 \end{cases}$$

$$y_p = (x^2 + 4x + 7)e^x$$

finalement l'ensemble des solutions de (1) sont :

$$y = (x^2 + 4x + 7)e^x + y_h = (c_1 x + c_2)e^{2x}; c_1; c_2 \in \mathbb{R}$$

4.3.2 Solution vérifiant une condition initiale

pour les l'équations diff 1 eme ordre

La donnée d'une condition initiale pour l'équation $y + a(x)y = b(x)$ sur l'intervalle ouvert I est

la donnée d'un point x_0 de I et d'un réel y_0. Une solution satisfaisant à cette condition initiale est une solution y telle que $y(x_0) = y_0$.

Théorème Il existe une seule solution de l'équation $y + a(x)y = b(x)$ sur I satisfaisant

'a la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

Démonstration : On a vu que la solution générale s' ́ecrit

$$y = (B(x)e^{-A(x)} + Ke^{-A(x)}$$

,

La condition initiale permet de déterminer cette constante :

$y_0 = (B(x_0) + K)e^{-A(x_0)}$, soit $K = y_0 e^{A(x_0)} - B(x_0)$,

Exemple 4.3.5 *Résourdre* $\begin{cases} y' = x^2 + 1 \\ y(2) = 1 \end{cases}$

ce qui montre l'existence et l'unicité de la solution vérifiant la condition initiale.

4.3.3 Solution vérifiant des conditions initiales

pour les l'équations diff 2 eme ordre

On consid'ere une équation

$$ay + by + cy = f(x) \tag{1}$$

ou f est définie et continue sur un intervalle ouvert I. Soit x_0 un point de I.

Proposition 4.3.3 *Etant donnés deux réels y_0 et $y_0^{'}$, il existe une et une seule solution y de l'équation différentielle (1) telle $y(x_0) = y_0$ et $y^{'}(x_0) = {y'}_0$.*

Exemple 4.3.6 *Résourdre* $\begin{cases} y^{''} - 4y^{'} + 3y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Chapitre 5

Les fiches TD

5.1 Fiche TD 1

Exercice 1 : Considérons les matrices :
$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
Calculer les matrices $AB, BA, CD, 2A+B, A-4B$.

Que remarquez vous(pour AB, BA) .

Exercice 2 : Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et A,B les matrices suivantes
$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -2 & \alpha \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$
Calculer le déterminant de A, puis le déterminant de B.

Exercice 3 : Soit f une application linéaire définie par

$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+y+7z \\ -10y+2z \\ 7x-12z+y \end{pmatrix}$
Donner la matrice associée a l'application f.

Exercice 3 : Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et A,B les matrices suivantes
$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -\sqrt{2} \\ 5 & 0.2 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$
Donner l'application linéaire associée à la matrice A.

puis l'application linéaire associée à la matrice B.

Exercice 4 : Soient $E=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ et $F=\{(1,0,2),(4,1,0),(0,5,1)\}$

deux bases de $(\mathbb{R})^3$.

Denner la matrice de passage P_{EF}.

Exercice 5 : On pose $e_1 = (1;1;0); e_2 = (0;1;1)$et $e_3 = (1;0;1)$.

1. Montrer que $B = (e_1; e_2; e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Ecrire la matrice de passage P_{CB} de la base canonique C de $\mathbb{R}^3$ à la base B.

5.2 La correction :

Exercice 1 :

$$AB=\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0\\7&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times(-2)+4\times7&1\times0+4\times1\\2\times(-2)+3\times7&2\times0+3\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26&4\\17&3\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}-2&0\\7&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\times1+0\times2&-2\times4+0\times3\\7\times1+1\times2&7\times4+1\times3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-8\\9&31\end{pmatrix}$$

$$CD=\begin{pmatrix}1&1&2\\-3&0&1\\1&7&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&5\\1&2\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times4+1\times1+2\times0&1\times5+1\times2+2\times4\\-3\times4+0\times1+1\times0&-3\times5+0\times2+1\times4\\1\times4+7\times1+6\times0&1\times5+7\times2+6\times4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5&15\\-12&-11\\11&43\end{pmatrix}$$

$$2A+B=2\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&0\\7&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&8\\4&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&0\\7&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&8\\12&7\end{pmatrix}$$

$$A-4B=\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}-2&0\\7&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-8&0\\28&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&4\\-26&-1\end{pmatrix}$$

On remarque que $AB\neq BA$

Exercice 2 :

$$\det(A)=\begin{vmatrix}2&1&-1\\5&2&1\\1&7&6\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&1\\7&6\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}5&1\\1&6\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}5&2\\1&7\end{vmatrix}$$

$$=2\times(2\times6-7\times1)-1\,(5\times6-1\times1)+(-1)\,(5\times7-2\times1)$$

$$=10-29-33=-52$$

$$\det(B)=\begin{vmatrix}-2&\alpha\\7&1\end{vmatrix}=-2\times1-\alpha\times7=7\alpha-2$$

Exercice 3 :

La matrice associée a l'application f.

$$A=\begin{pmatrix}5&1&7\\0&-10&2\\7&12&1\end{pmatrix}$$

Exercice 4 :

L'application linéaire associée à la matrice A

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y-\sqrt{2}z\\5x-0.2y+z\\x+5y+6z\end{pmatrix}$$

L'application linéaire associée à la matrice B.

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x+10y\\7x+y\end{pmatrix}$$

Exercice 4 : Soient $E=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ et $F=\{(1,0,2),(4,1,0),(0,5,1)\}$

deux bases de $(\mathbb{R})^3$.

On a

$(1,0,2) = 1\,(1,0,0) + 0\,(0,1,0) + 2\,(0,0,1)$

$(4,1,0) = 4\,(1,0,0) + 1\,(0,1,0) + 0\,(0,0,1)$

$(0,5,1) = 0\,(1,0,0) + 5\,(0,1,0) + 1\,(0,0,1)$

La matrice de passage P_{EF}.

$$P_{EF} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 : On pose $e_1 = (1;1;0); e_2 = (0;1;1)$et $e_3 = (1;0;1)$.

1. On montre que $B = (e_1; e_2; e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

a)B est libre car :

$$\begin{aligned} \alpha\,(1,1,0) + \beta\,(0,1,1) + \lambda\,(1,0,1) = (0,0,0) \quad & \Rightarrow (\alpha+\lambda, \alpha+\beta, \beta+\lambda) = (0,0,0) \\ & \Rightarrow \alpha+\lambda = \alpha+\beta = \beta+\lambda = 0 \\ & \Longrightarrow \alpha = -\lambda, \alpha = -\beta, \beta = -\lambda \\ & \Longrightarrow \alpha = -\lambda, \lambda = \beta, \beta = -\lambda \\ & \Longrightarrow \alpha = -\lambda, \lambda = \beta, -\lambda = \lambda \\ & \Longrightarrow \alpha = -\lambda, \lambda = \beta, \lambda = 0 \\ & \Longrightarrow \alpha = \beta = \lambda = 0 \end{aligned}$$

Donc $\quad B = (e_1; e_2; e_3)$ est libre

b)B est génératrice de $\mathbb{R}^3$ car :

$\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \exists\,(\alpha,\beta,\lambda)$ tel que $(x,y,z) = \alpha\,(1,1,0) + \beta\,(0,1,1) + \lambda\,(1,0,1)$

est vraie car

Si $(x,y,z) = \alpha\,(1,1,0) + \beta\,(0,1,1) + \lambda\,(1,0,1) \Longrightarrow (x,y,z) = (\alpha+\lambda, \alpha+\beta, \beta+\lambda)$

$$\left\{\begin{array}{c} x = \alpha+\lambda \\ y = \alpha+\beta \\ z = \beta+\lambda \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x = \alpha+\lambda \\ y = \alpha+\beta \\ \lambda = z-\beta \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = \alpha+z-\beta \\ y = \alpha+\beta \\ \lambda = z-\beta \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x-z = \alpha-\beta \\ y = \alpha+\beta \\ \lambda = z-\beta \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha = \dfrac{x-z+y}{2} \\ \beta = \dfrac{y-x+z}{2} \\ \lambda = z - \left(\dfrac{y-x+z}{2}\right) = \dfrac{z-y+x}{2} \end{array}\right.$$

Alors $\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \exists\,(\alpha,\beta,\lambda) = \left(\dfrac{x-z+y}{2}, \dfrac{y-x+z}{2}, \dfrac{z-y+x}{2}\right)$ tel que

$$(x,y,z) = \alpha\,(1,1,0) + \beta\,(0,1,1) + \lambda\,(1,0,1)$$

c'est à dire B est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Finalement $B = (e_1; e_2; e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. La matrice de passage P_{CB} de la base canonique C de $\mathbb{R}^3$ à la base B

$$P_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.3 Fiche TD 2

Exercice 1 : Montrer que l'ensemble $M_{2,2}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

Exercice 2 : Soit a $\in \mathbb{R}$ et A et M les matrices suivantes
$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$
1)Calculer le déterminant de M, sa comatrice et l'inverse de M.

2)Calculer le déterminant de A et déterminer pour quelles valeurs de a la matrice est inversible. Calculer A^{-1} lorsque A est inversible.

Exercice 3 : Ecrire le système suivant sous la forme matricielle :

$$\begin{cases} 2x + y = z + 1 \\ -x + 2y = -3 \\ -x + y = -2 - 2z \end{cases}$$

Est ce que ce système admet une solution ou non, pourquoi ?.

Exercice 4 : Résoudre par la méthode de Cramer les systèmes suivants :
$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ -x + 2y - z = -3 \\ 4x + y + z = 0 \end{cases}, \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$

Exercice 5 : Résoudre par la méthode de la matrice inverse les systèmes suivants :
$\begin{cases} 2x + y = z + 1 \\ -x + 2y = -3 \\ -x + y = -2 - 2z \end{cases}, \begin{cases} 5x + 4y = 2 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

Exercice 6 : Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes suivants :
$\begin{cases} x + 2y + z + t = 1 \\ -3x + 4y - z - 2t = -3 \\ x + y + 2z = 12 \\ 2x - y + z - 3t = 4 \end{cases}, \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y - 5z = -8 \\ 0.2x + 0.5y + z = 0 \end{cases}.$

5.4 Correction fiche TD2

Exercice 1

•loi de composition interne "addition" : vérifiant :

1)$\forall \left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} \right) \in M_{2.2}^3(\mathbb{R})$ on a

$\left[\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a_1+a_2 & c+c_1+c_2 \\ b+b_1+b_2 & d+d_1+d_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a+a_1+a_2 & c+c_1+c_2 \\ b+b_1+b_2 & d+d_1+d_2 \end{pmatrix}$

2)$\forall \left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} \right) \in (M_{2.2}(\mathbb{R}))^2$ on a

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a_1 & c+c_1 \\ b+b_1 & d+d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

3)$\exists 0_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in\in M_{2.2}(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_{2.2}(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

4)$\forall \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_{2.2}(\mathbb{R}), \exists \begin{pmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{pmatrix} \diagdown \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{pmatrix} = 0_E$

loi de composition externe "multiplication par un scalaire" : vérifiant :

1)$\forall \left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} \right) \in M_{2.2}^2(\mathbb{R}) \forall (x,y) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ on a

$\alpha \left[\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \alpha(a+a_1) & \alpha(c+c_1) \\ \alpha(b+b_1) & \alpha(d+d_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha a + \alpha a_1) & (\alpha c + \alpha c_1) \\ (\alpha b + \alpha b_1) & (\alpha d + \alpha d_1) \end{pmatrix}$

$\alpha \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(a+a_1) & \alpha(c+c_1) \\ \alpha(b+b_1) & \alpha(d+d_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha a + \alpha a_1) & (\alpha c + \alpha c_1) \\ (\alpha b + \alpha b_1) & (\alpha d + \alpha d_1) \end{pmatrix}$

donc $\alpha \left[\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} \right] = \alpha \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}$

2)$(\alpha+\beta) \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

3)$\alpha \left(\beta \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right) = (\alpha\beta) \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

2)$\exists 1_E \in M_{2.2}(\mathbb{R})$ tel que $\forall \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in E : 1_E \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Exercice 2 : Soit a $\in \mathbb{R}$ et A et M les matrices suivantes

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) $\det M = 1$,

$$\mathrm{com}M=\begin{pmatrix} +\det\begin{pmatrix}3&4\\1&1\end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix}-2&4\\0&1\end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix}-2&3\\0&1\end{pmatrix}\\ -\det\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\ +\det\begin{pmatrix}0&-1\\3&4\end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix}1&-1\\-2&4\end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix}1&0\\-2&3\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{com}M=\begin{pmatrix}-1&2&-2\\-1&1&-1\\3&-2&3\end{pmatrix}$.

$(comM)^t=\begin{pmatrix}-1&-1&3\\2&1&-2\\-2&-1&3\end{pmatrix}$

et $M^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}-1&-1&3\\2&1&-2\\-2&-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&3\\2&1&-2\\-2&-1&3\end{pmatrix}$.

2)$det\,(A)=-1-a^3$.

$comA=\begin{pmatrix}-1&a&-a^2\\a&-a^2&-1\\-a^2&-1&a\end{pmatrix}$

$A^{-1}=\frac{1}{-1-a^3}\begin{pmatrix}-1&a&-a^2\\a&-a^2&-1\\-a^2&-1&a\end{pmatrix}$

Exercice 3 : Ecrire le système suivant sous la forme matricielle :

$$\begin{cases}2x+y=z+1\\-x+2y=-3\\-x+y=-2-2z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y-z=1\\-x+2y=-3\\-x+y+2z=-2\end{cases}$$

La matrice assiciée $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\-1&2&0\\-1&1&2\end{pmatrix}$

alors$\begin{pmatrix}2&1&-1\\-1&2&0\\-1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$

On a $\det A=9$ donc ce systeme admet une solution

Exercice 4 : Résolvons par la méthode de Cramer les systèmes suivants :

1)$\begin{cases}2x+y+3z=1\\-x+2y-z=-3\\4x+y+z=0\end{cases}$ on a $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\-1&2&-1\\4&1&1\end{pmatrix}$

$x=\dfrac{\det\begin{pmatrix}1&1&3\\-3&2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}}{\det A}=....,y=\dfrac{\det\begin{pmatrix}2&1&3\\-1&-3&-1\\4&0&1\end{pmatrix}}{\det A}=....,z\dfrac{\det\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&2&-3\\4&1&0\end{pmatrix}}{\det A}=.....$

2)$\begin{cases}x+y=2\\2x-3y=0\end{cases}$ on a $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&-3\end{pmatrix}$

$x=\dfrac{\det\begin{pmatrix}2&1\\0&-3\end{pmatrix}}{\det A}=\frac{-6}{-5}=\frac{6}{5},y=\dfrac{\det\begin{pmatrix}1&2\\2&0\end{pmatrix}}{\det A}=\frac{-4}{-5}=\frac{4}{5}$

$(x,y)=\left(\frac{6}{5},\frac{4}{5}\right)$

Exercice 5 : Résoudre par la méthode de la matrice inverse les systèmes suivants :

$$1)\left\{\begin{array}{c} 2x+y=z+1 \\ -x+2y=-3 \\ -x+y=-2-2z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} 2x+y-z=1 \\ -x+2y=-3 \\ -x+y+2z=-2 \end{array}\right.$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \det A=9.$$

$$com\,(A)=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow (com\,(A))^t=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

donc $X=A^{-1}B=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(x,y,z)=(1,-1,0)$

$$2)\left\{\begin{array}{l} 5x+4y=2 \\ x-2y=0 \end{array}\right.$$

$(x,y)=\left(\frac{2}{7},\frac{1}{7}\right)$

Exercice 6 : Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{c} x+2y+z+t=1 \\ -3x+4y-z-2t=-3 \\ x+y+2z=12 \\ 2x-y+z-3t=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+2y+z+t=1 \\ 0+10y+2z+t=0 \\ 0-y+z-t=11 \\ 0-5y-z-5t=2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} x+2y+z+t=1 \\ 0+10y+2z+t=0 \\ 0-0+12z-9t=110 \\ 0-0-0-9t=4 \end{array}\right.$$

$t=\frac{-4}{9}, z=\frac{106}{12}=\frac{79.5}{9}, y=\frac{-15.5}{9}, x=\frac{-35.5}{9}$

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=1 \\ x+2y-5z=-8 \\ 0.2x+0.5y+z=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} x+y+z=1 \\ 0+y-6z=-9 \\ 0+0.3y+0.8z=-0.2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=1 \\ 0+y-6z=-9 \\ 0+0.3y+0.8z=-0.2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} x+y+z=1 \\ 0+y-6z=-9 \\ 0+0+2.6z=2.5 \end{array}\right.$$

$z=\frac{25}{26}, y=\frac{-84}{26}, x=\frac{85}{26}$

5.5 Fiche TD 3

Exercice 1 : Calculer les intégrales et primitives suivantes :
$A=\int\left(x+\frac{1}{x}\right)dx,\ B=\int(2x-3)(x^2-3x+5)^3dx,$
$C=\int\frac{1}{x}\ln|x|\,dx,\ D=\int\frac{1}{x\ln|x|}dx.E=\int\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1}dx$
Exercice 2 : Calculer les primitives suivantes :
$A=\int\frac{x+1}{x^2+5x-6}dx,\ B=\int\frac{1}{\left(x-\sqrt{2}\right)^5}dx, C=\int\frac{4x+8}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx,$
$D=\int\frac{x^3-2}{x^3-x^2}dx.$
Exercice 3 : Calculer les primitives suivantes en utilisant la méthode d'intégration par parties :
$A=\int x^2\ln|x|\,dx,\ B=\int arctg\,(x)\ dx$
$\left[(arctg\,(x))'=\frac{1}{x^2+1}\right].$
Exercice 4 : Calculer les primitives suivantes :
$A=\int\sin(2x+5)\,dx, B=\int\cos(2x+5)\,dx, C=\int tg\,(4x)\,dx,$
$D=\int\frac{\cos x}{\cos^2x\left(1+\sin^2x\right)}\ dx, E=\int x\sin x\ dx.$
Exercice 5 :

Montrer que, pour tous les entiers strictement positifs, on dispose de l'égalité :
1) $\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}dx=\frac{\ln 2}{n}-\frac{1}{n}\int_0^1\ln\left(1+x^n\right)dx$
2) $\int_0^1\left(\frac{e^x}{(1+e^x)^n}-\frac{e^{-(n-1)x}}{(1+e^{-x})^n}\right)dx=0.$
Exercice 6 :

Les résultats suivants sont-ils justes (justifier brièvement les réponses...) ?

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx=0.5,\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos^2x}dx=1,\int_0^1 xe^xdx=1.$$

5.6 Correction fiche TD3

Exercice 1 :

$A=\int\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\int xdx+\int\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}+\ln|x|+k,$
$B=\int(2x-3)(x^2-3x+5)^3dx,$
par changement de variable $u\left(x\right)=x^2-3x+5, u^{'}\left(x\right)=2x-3$
$B=\int u^{'}(x)u\left(x\right)^3 dx=\int u^3du=\frac{u^4}{4}=\frac{1}{4}(x2-3x+5)^4+k$
$C=\int\frac{1}{x}\ln|x|\,dx,$
par changement de variable $u\left(x\right)=\ln|x|\,, u^{'}\left(x\right)=\frac{1}{x}$
$C=\int\frac{1}{x}\ln|x|\,dx=\int u^{'}(x)u\left(x\right)dx=\int udu=\frac{1}{2}\left(\ln|x|\right)^2+k$
$D=\int\frac{1}{x\ln|x|}dx,$
par changement de variable $u\left(x\right)=\ln|x|\,, u^{'}\left(x\right)=\frac{1}{x}$
$D=\int\frac{1}{x\ln|x|}dx=\int\frac{u^{'}(x)}{u(x)}dx=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+k=\ln|\ln|x||+k$
$E=\int\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1}dx$
par changement de variable $u\left(x\right)=x^2+x+1u^{'}\left(x\right)=2x+1,$
$E=\int\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int\left(2x+1\right)\sqrt{x^2+x+1}dx$
E$=\frac{1}{2}\int u^{'}\left(x\right)u\left(x\right)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+k=\frac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{3}{2}}+k\left(\int x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1},\alpha\neq-1\right)$

Exercice 2 :

$A=\int\frac{x+1}{x^2+5x-6}dx$ on a $x^2+5x-6=\left(x-1\right)\left(x+6\right)$
$\frac{x+1}{x^2+5x-6}=\frac{x+1}{x^2+5x-6}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+6}=\frac{(a+b)x+6a-b}{(x-1)(x+6)}$
donc $a+b=1$ et $6a-b=1$ alors $a=\frac{2}{7},b=\frac{5}{7}$
$A=\int\frac{x+1}{x^2+5x-6}dx=\int\left(\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+6}\right)dx=\frac{2}{7}\ln|x-1|+\frac{5}{7}\ln|x+6|+k$
$, B=\int\frac{1}{\left(x-\sqrt{2}\right)^5}dx=\int\left(x-\sqrt{2}\right)^{-5}dx=\frac{1}{-4}\frac{1}{\left(x-\sqrt{2}\right)^4},\left(\int x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1},\alpha\neq-1\right).$
Calculons $C=\int\frac{4x+8}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx$
on a $\int\frac{4x+8}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx=2\int\frac{2x+4}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx=2\int\frac{2x+1+3}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx$
$=2\int\frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx+6\int\frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx$
a)$\int\frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx,$
par changement de variable $u\left(x\right)=x^2+x+1$ et $u^{'}\left(x\right)=\left(2x+1\right)$ on obtient
$\int\frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx=\int\frac{u^{'}\left(x\right)}{\left(u\left(x\right)\right)^2}dx=\frac{-1}{(u(x))}=\frac{-1}{x^2+x+1}$

b)$\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx$
$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$,

par changement de variable $t=x+\frac{1}{2}$on obtient
$$\int \frac{1}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}dt=\frac{16}{9}\int \frac{1}{\left(\left(\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1\right)^2}dt$$
par changement de variable $s=\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$on obtient
$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx=\frac{16}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{(s^2+1)^2}ds\left(I_{n+1}=\frac{1}{2n}\frac{s}{(s^2+1)^n}+\frac{2n-1}{2n}I_n, I_n=\int \frac{1}{(s^2+1)^n}ds\right)$$
$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx=\frac{2\sqrt{3}}{9}\left[\frac{s}{(s^2+1)}+arctng\,(s)\right]$$
finalement
$$\int \frac{4x+8}{(x^2+x+1)^2}dx=\frac{-2}{x^2+x+1}+\frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)}{\left(\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1\right)}+arctng\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right)$$

$D=\displaystyle\int \frac{x^2-2}{x^3-x^2}dx$
ona $\displaystyle\frac{x^2-2}{x^3-x^2}=\frac{x^3-2}{x^2(x-1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x-1}=\frac{ax(x-1)+b(x-1)+cx^2}{x^2(x-1)}=\frac{(a+c)x^2+(b-a)x-b}{x^2(x-1)}$
donc $b=2, b-a=0, a+c=1$

alors $a=2, b=2, c=-1$
$\displaystyle\frac{x^2-2}{x^3-x^2}=\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x-1}$
$D=\displaystyle\int \frac{x^2-2}{x^3-x^2}dx=2\ln|x|-\frac{2}{x}-\ln|x-1|+c$
Exercice 3 :par l'intégrale par parties
calculons$A=\displaystyle\int x^2\ln|x|\,dx$,
$u'(x)=x^2\Rightarrow u(x)=\frac{x^3}{3}$
$v(x)=\ln|x|\Rightarrow v'(x)=\frac{1}{x}$
$A=\frac{x^3}{3}\ln|x|-\displaystyle\int \frac{x^2}{3}dx=\frac{x^3}{3}\ln|x|-\frac{x^3}{9}$.
calculons $B=\displaystyle\int arctg\,(x)\ dx$
$u'(x)=1\Rightarrow u(x)=x$
$v(x)=arctg\,(x)\Rightarrow v'(x)=\frac{1}{x^2+1}$
$B=\displaystyle\int arctng\,(x)\ dx\ =x\ arctng\,(x)-\int \frac{x}{x^2+1}dx=x.arctng\,(x)+\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

Exercice 4 :

$A=\displaystyle\int \sin(2x+5)\,dx=-\frac{1}{2}\cos(2x+5)+k$,par changement de variable $u(x)=2x+5$

$B=\displaystyle\int \cos(2x+5)\,dx=\frac{1}{2}\sin(2x+5)+k$, par changement de variable $u(x)=2x+5$

$C=\displaystyle\int tg(4x)\,dx=-\frac{1}{4}\ln|\cos 4x|+k$, par changement de variable $u(x)=\cos 4x$

$$D=\int \frac{\cos x}{\cos^2 x\left(1+\sin^2 x\right)}dx$$

par changement de variable $u(x)=\sin x$

$$D=\int \frac{\cos x}{\cos^2 x\left(1+\sin^2 x\right)}\,dx=\int \frac{dt}{(1-t^2)(1+t^2)}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-t^2)(1+t^2)}=\frac{-1}{(-1+t^2)(1+t^2)}&=\frac{a}{t-1}+\frac{b}{t+1}+\frac{ct+d}{1+t^2}\\&=\frac{a(t+1)\left(1+t^2\right)+b(t-1)\left(1+t^2\right)+(ct+d)\left(-1+t^2\right)}{(-1+t^2)(1+t^2)}\\&=\frac{a\left(t^3+t^2+t+1\right)+b\left(t^3-t^2+t-1\right)+\left(ct^3+dt^2-ct-d\right)}{(-1+t^2)(1+t^2)}\\&=\frac{(a+b+c)\,t^3+(a-b+d)\,t^2+(a+b-c)\,t+a-b-d}{(-1+t^2)(1+t^2)}\end{aligned}$$

donc $\begin{cases}a+b+c=0\\a-b+d=0\\a+b-c=0\\a-b-d=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=0\\d=\frac{1}{2}\\a+b=0\\a-b=\frac{-1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{-1}{4}\\b=\frac{1}{4}\\c=0\\d=\frac{1}{2}\end{cases}$

alors $\frac{1}{(1-t^2)(1+t^2)}=\frac{-1}{(-1+t^2)(1+t^2)}=\frac{-0.25}{t-1}+\frac{0.25}{t+1}+\frac{0.5}{1+t^2}$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1-t^2)(1+t^2)}dt&=\int \frac{-0.25}{t-1}dt+\int \frac{0.25}{t+1}dt+\int \frac{0.5}{1+t^2}dt\\&=-0.25\ln|t-1|+0.25\ln|t+1|+0.5arctng(t)+c\end{aligned}$$

on a $t=\sin x$ alors

$D=-0.25\ln|\sin x-1|+0.25\ln|\sin x+1|+arctng(\sin x)+c$

$E=\displaystyle\int x\sin x\;dx=-x\cos x+\int \cos x dx=-x\cos x+\sin x+k$ (par l'intégrale par parties)

Exercice 5 :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx=\frac{\ln 2}{n}-\frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$,par l'intégrale par parties

$u'(x)=\frac{x^{n-1}}{1+x^n}\Rightarrow u(x)=\frac{1}{n}\ln(1+x^n)$

$v(x)=x\Rightarrow v'(x)=1.$

2) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{e^x}{(1+e^x)^n}-\frac{e^{-(n-1)x}}{(1+e^{-x})^n}\right)dx=0.$

$\frac{e^x}{(1+e^x)^n}-\frac{e^{-(n-1)x}}{(1+e^{-x})^n}=\frac{e^x}{(1+e^x)^n}-\frac{e^{-(n-1)x}}{\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)^n}=\frac{e^x}{(1+e^x)^n}-\frac{e^{-(n-1)x}}{\frac{(1+e^x)^n}{(e^x)^n}}=0.....$

alors $.\int\limits_0^1 \left(\frac{e^x}{(1+e^x)^n} - \frac{e^{-(n-1)x}}{(1+e^{-x})^n} \right) dx = 0$

Exercice 6 :

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 0.5,$

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \left[\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2 - 1 = 1,$

$\int\limits_0^1 x e^x dx = [xe^x - e^x]_0^1 = 1.$

5.7 Fiche TD 4

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$xy' = (y+1)\,, xy' = e^y.$$

Exercice 2

Résoudre l'équation différentielle suivante : $y' + y = 0$

Trouvez une solution particulière de $y' + y = x^2$

Déduisez l'ensemble des solutions de$\left(y' + y = x^2\right)$

Exercice 3 :

Résoudre l'équation différentielle suivante : $e^x y' + xy = 1$

Exercice 4 :

Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' + 2y' + y = 0$

Trouvez une solution particulière de

$$y'' + 2y' + y = x^2 e^x$$

Déduisez l'ensemble des solutions de $\left(y'' + 2y' + y = x^2 e^x\right)$

Exercice 5 :

Résoudre les équations différentielles suivantes : $y'' + y' + y = 0$, $y'' + y = e^x$

Exercice 6 :

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 2y' + y = 0 \qquad (*)$$

Déterminer la solution de (*) telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = -3$.

5.8 Correction fiche TD4

Exercice 1

Résolvons les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} xy^{'} = (y+1) &\Longrightarrow \frac{y^{'}}{y+1} = \frac{1}{x} \\ &\Longrightarrow \ln|y+1| = \ln|x| + c \\ &\Longrightarrow |y+1| = e^{\ln|x|+c} \\ &\Longrightarrow y = ke^{\ln|x|} - 1, k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$, \; xy^{'} = e^{y} \Longrightarrow e^{y}y^{'} = \frac{1}{x}$$
$$\Longrightarrow e^{y} = \ln|x| + c$$
$$\Longrightarrow y = \ln|\ln|x| + k|, k \in \mathbb{R}$$

Exercice 2

résolvons l'équation différentielle $y^{'} + y = 0$

$$\begin{aligned} \tfrac{y^{'}}{y} = -1 &\Longrightarrow \ln|y| = -x + c \\ &\Longrightarrow |y| = e^{-x+c} \\ &\Longrightarrow y = ke^{-x}, k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Solution particulière de $y^{'} + y = x^2$

$y = k(x)\,e^{-x} \Longrightarrow y^{'} = k^{'}(x)\,e^{-x} - k(x)\,e^{-x}$

donc $k^{'}(x)\,e^{-x} - k(x)\,e^{-x} + k(x)\,e^{-x} = x^2$

$k^{'}(x) = x^2e^{x} \Longrightarrow k(x) = x^2e^{x} - 2\displaystyle\int xe^{x}dx = x^2e^{x} - 2xe^{x} + 2e^{x}$

alors $y = k(x)\,e^{-x} = (x^2e^{x} - 2xe^{x} + 2e^{x})\,e^{x}$

est une Solution particulière de $y^{'} + y = x^2$

Déduisons l'ensemble des solutions de$\left(y^{'} + y = x^2\right)$

$$y = \left(x^2e^{x} - 2xe^{x} + 2e^{x}\right)e^{x} + ke^{-x}, k \in \mathbb{R}$$

Exercice 3 :

Résolvons l'équation différentielle suivante : $e^{x}y^{'} + xy = 1$

$e^{x}y^{'} + xy = 1 \Leftrightarrow y^{'} + xe^{-x}y = e^{-x}$

L'équation homogéne $y^{'} + xe^{-x}y = 0$

donc $\frac{y^{'}}{y} = xe^{-x}$

$\ln|y| = \displaystyle\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - \int e^{-x}dx = -xe^{-x} + e^{-x} + c$

$$\begin{aligned} |y| &= e^{-xe^{-x}+e^{-x}+c} \\ y &= ke^{-xe^{-x}+e^{-x}}, k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exercice 4 :

Résolvons l'équation différentielle suivante : $y^{''} + 2y^{'} + y = 0$

l'équation caractiréstique donnée par $r^2 + 2r + 1 = 0$

$\triangle = 0, r = -1$ racine double de $r^2 + 2r + 1 = 0$

donc

$$y = (ax + b)\, e^{-x}, a, b \in \mathbb{R}$$

Solution particulière de

$$y^{''} + 2y^{'} + y = x^2e^x$$

comme $-1 \neq 1$ alors il existe une solution particulière $y_p = (\alpha x^2 + \beta x + \lambda)\, e^x$

$\mathrm{y}_p = ?$ comme 1 n'est pas une solution de l'équation caractéristique, alors

$y_p = q(x)e^x$ tel que deg q $= 2$; $y_p = (\alpha x^2 + \beta x + \lambda)e^x$

$y_p^{'} = (2\alpha x + \beta)e^x + (\alpha x^2 + \beta x + \lambda)e^x = (\alpha x^2 + (\beta + 2\alpha)\, x + \beta + \lambda)\, e^x$

$y_p^{''} = (2\alpha)e^x + (2\alpha x + \beta)e^x + (2\alpha x + \beta)e^x + (\alpha x^2 + \beta x + \lambda)e^x$

$y_p^{''} = (\alpha x^2 + (\beta + 4\alpha)\, x + (2\beta + \lambda + 2\alpha))e^x$

En remplacant dans (E), on obtient :

$(\alpha x^2 + (\beta + 4\alpha)\, x + (2\beta + \lambda + 2\alpha))e^x + 2\,((\alpha x^2 + (\beta + 2\alpha)\, x + (\beta + \lambda)\, e^x) + (\alpha x^2 + \beta x + \lambda)e^x = x^2e^x$

$(4\alpha x^2 + (4\beta + 8\alpha)\, x + (4\beta + 4\lambda + 2\alpha))\, e^x = x^2e^x$

alors $\left\{\begin{array}{c} 4\alpha = 1 \\ 4\beta + 8\alpha = 0 \\ 4\beta + 4\lambda + 2\alpha = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha = \frac{1}{4} \\ \beta = \frac{-1}{2} \\ \lambda = \frac{3}{8} \end{array}\right.$

donc $y_p = \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}\right) e^x$

l'ensemble des solutions de$\left(y^{''} + 2y^{'} + y = x^2e^x\right)$

$$y = \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}\right) e^x + (ax + b)\, e^{-x}, a, b \in \mathbb{R}$$

Exercice 5 :

Résolvons les équation différentielle suivante : $y^{''} + y^{'} + y = 0$

l'équation caractiréstique donnée par $r^2 + r + 1 = 0$

$\triangle = -3, r_1 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, r_2 = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

donc

$$y = \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x \quad + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x\right) e^{\frac{-1}{2}x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Résolvons les équation différentielle suivante $y^{''} + y = e^x$

l'équation homogéne $y^{''} + y = 0$

l'équation caractiréstique donnée par $r^2 + 1 = 0$

$\triangle = -4, r_1 = i, r_2 = -i$

$$y = (c_1 \cos x \quad + c_2 \sin x), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

on cherche une solution particulière $y_p = q(x) e^x$

$\alpha = 1$n'est pas racine de (EC).

alors $degq = 0$

donc

$$y_p = e^x$$

$y = e^x + (c_1 \cos x \quad + c_2 \sin x), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Exercice 6 :

Résolvons l'équation différentielle suivante :

$$y^{''} - 2y^{'} + y = 0 \tag{*}$$

l'équation caractiréstique donnée par $r^2 - 2r + 1 = 0$

$\triangle = 0, r = 1$ racine double

donc

$$y = (ax + b) e^x, a, b \in \mathbb{R}$$

la solution de (*) telle que $y(0) = 0$ et $y^{'}(0) = -3$.

on a $y^{'} = (ax + b) e^x + ae^x$

donc $b = 0$ et $a = \frac{-3}{2}$

$$y = \frac{-3}{2} x e^x$$

Bibliographie

[1] Jean-Pierre Ramis, Mathématiques Tout-en-un pour la Licence Cours complet et 270 exercices corrigés , (2007).

[2] Hitta Amara, Cours Algebre et Analyse I ,LMD : DEUG I–MI/ST– (2008/2009) .

[3] Andr ´e Girouxarc,Analyse 2 -Notes de cours (*Avril* 2004)

[4] Gabriel Baudrand, Mathématiques résumés du cours -ECE 1re et 2e années.(*Paris*, 2008)