2015 - 06 - 15

جامعة قسنطينة 01

المدة: 1سا و30د

قسم العلوم والتكنولوجيا

LMD, ST_2

الإمتحان الإستدراكي لمقياس Maths04

التمرين 01: أحسب التكامل $\int_\gamma (2z+3)\,dz$

وذلك حسب المسارين:

① γ: خط مضلعي من A ← B ← C حيث $A(1,-2)$, $B(1,1)$, $C(3,1)$.

② γ: المستقيم الذي يربط بين النقطتين $A(1,-2)$, $C(3,1)$.

التمرين 02: عين ميدان تقارب السلاسل الصحيحة التالية:

① $\sum_{n=0}^{+\infty}(2+4i)^n(z-4)^n$, ② $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-3)^n}{n!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in}}{(z-3)^n}$.

التمرين 03: على الطالب أن يجيب على الجزء (أ) أو الجزء (ب)

(أ) أحسب التكامل التالي:

$\int_\gamma (z-z^2+3)\,dz$ حيث γ الربع الأول للنصف العلوي للدائرة $|z|=1$.

(ب) لتكن الدالة المركبة f: $f(z)=\frac{4}{(z-1)(z+3)}$

أنشر الدالة f في سلسلة لوران في الحلقة $1<|z|<3$.

(ج) عرّف الدوال وحيدة القيمة وأعطي مثال على ذلك.

بالتوفيق

Maths 4 تصحيح الإمتحان الاستدراكي

التمرين 01 (8pt)

لدينا : $f(z) = 2z+3$

كتابة f على الشكل : $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

$$f(z) = 2z+3 = 2(x+iy)+3 = 2x+2iy+3 \quad 0{,}5$$

$$= (2x+3) + i(2y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

ومنه :

$$u(x,y) = 2x+3 \;\; 0{,}5 \;, \quad v(x,y) = 2y \;\; 0{,}5 \;, \quad dz = dx + i\,dy$$

$$\int_{\gamma} (2z+3)\,dz = \int_{\gamma} [(2x+3) + i(2y)]\,(dx + i\,dy)$$

$$= \int_{\gamma} (2x+3)\,dx + i(2x+3)\,dy + (i2y)\,dx - 2y\,dy \quad 1$$

$$\boxed{= \int_{\gamma} (2x+3)\,dx - 2y\,dy + i\int_{\gamma} (2x+3)\,dy + 2y\,dx} \quad (I)$$

① على الخط المضلعي $A \rightarrow B \rightarrow C$

على القطعة $[AB]$: نلاحظ أن :

$A(1,-2)$

$B(1,1)$

$x = 1 \Leftrightarrow dx = 0 \quad 0{,}5$

$1 \geq y \geq -2$

نعوض في العبارة (I)

$$I_1 = \int_{-2}^{1} -2y\,dy + i\int_{-2}^{1} (2(1)+3)\,dy \quad 0{,}5$$

$$= -2\int_{-2}^{1} y\,dy + i\int_{-2}^{1} 5\,dy$$

$$\boxed{I_1 = -3 + 15i} \quad 0{,}5$$

على القطعة $[BC]$: نلاحظ أن

$y = 1 \Rightarrow dy = 0$ 0,5

$3 \geq x \geq 1$

نعوض في العبارة (I)

$$I_2 = \int_{1}^{3} (2x+3)\,dx + i\int_{1}^{3} 2\,dx = 14 + 4i \quad 0{,}5$$

$$\boxed{I_2 = 14 + 4i} \quad 0{,}5$$

ومنه التكامل على الخط المضلعي هو:

$$I = I_1 + I_2 = -3 + 15i + 14 + 4i = 11 + 19i$$

$$\boxed{I = 11 + 19i} \quad 0{,}5$$

② : المستقيم الذي يربط بين $A(1,-2)$, $C(3,1)$

معادلة المستقيم هي:

$$y = ax + b$$

ايجاد a و b:

$$\begin{cases} -2 = a(1) + b \\ 1 = 3a + b \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = -2 \\ 3a + b = 1 \end{cases}$$

$$\iff a = \frac{3}{2} \quad 0{,}25 \qquad b = -\frac{7}{2} \quad 0{,}25$$

$$\rightarrow \boxed{y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}} \quad 0{,}5 \iff dy = \frac{3}{2}\,dx$$

نعوض في العبارة (I)

$$I = \int_1^3 (2x+3)\,dx - 2\left(\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)dx \quad 0{,}5 \quad + i\int_1^3 (2x+3)\left(\frac{3}{2}\,dx\right) + 2\left(\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}\right)dx$$

$$= \int_1^3 \left(-\frac{5}{2}x + \frac{27}{2}\right)dx + i\int_1^3 \left(6x - \frac{5}{2}\right)dx$$

$$= -\frac{5}{4}\left[x^2\right]_1^3 + \frac{27}{2}\left[x\right]_1^3 + i\left[6\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 - \frac{5}{2}\left[x\right]_1^3\right]$$

$$\boxed{I = 7 + 19i} \quad 0{,}5$$

التمرين 02

7

① $\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} (2+4i)^n (z-4)^n}_{\text{سلسلة تايلور}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$

حساب R:

0,5 $\boxed{a_n = (2+4i)^n \ , \quad z_0 = 4}$

حسب كوشي:
(أو دالمبير).

$R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|2+4i|^n}}$ 0,5

$= \dfrac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} |2+4i|} = \dfrac{1}{\sqrt{20}}$ 0,5

بما أن $0 < R < +\infty$ فإن ميدان التقارب هو القرص

1 $|z-4| < \dfrac{1}{\sqrt{20}}$

② $\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(z-3)^n}{n!}}_{\text{جزء صحيح}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^{in}}{(z-3)^n}}_{\text{جزء أساسي}} \longrightarrow$ 0,5 سلسلة لوران

الجزء الصحيح:

حساب R:

$\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(z-3)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

0,5 $\boxed{a_n = \dfrac{1}{n!} \ , \quad z_0 = 3}$

حسب دالمبير:

$a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}$

0,5

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right|$$

0,5

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\,n!}{n!} = \boxed{+\infty = R}$$

الجزء الأساسي: حساب ρ:

$a_n = e^{in}$ 0,5

حسب كوشي:

$$\rho = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$ 0,5

0,5

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|e^{in}|} = |e^{i}| = 1$$

$R=+\infty$ و $\rho = 1$ اذن $\rho < R$ ومنه ميدان التقارب

هو الحلقة $1 < |z-3| < +\infty$. 1

التمرين ③ : 5pt

(P) : نضع : $z=|z|e^{i\theta}$ وبما أن $|z|=1$ فإن $z=e^{i\theta}$ 0,5

الربع الأول للنصف العلوي للدائرة معناه $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ 0,5

$$\to z=e^{i\theta}\to z^2=\left(e^{i\theta}\right)^2=e^{2i\theta}$$

$$\to \frac{dz}{d\theta}=ie^{i\theta}\Leftrightarrow dz=ie^{i\theta}\,d\theta$$ 0,25

التعويض 0,25

$$\int_C\left(z-z^2+3\right)dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{i\theta}-e^{2i\theta}+3\right)ie^{i\theta}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}ie^{2i\theta}\,d\theta-i\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{3i\theta}\,d\theta+3i\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{i\theta}\,d\theta$$

$$=i\frac{1}{2i}\left[e^{2i\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-i\left(\frac{1}{3i}\right)\left[e^{3i\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+3\cancel{i}\cdot\left(\frac{1}{\cancel{i}}\right)\left[e^{i\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$ 0,5

$$=\frac{1}{2}\left[e^{i\pi}-1\right)-\frac{1}{3}\left(e^{i3\frac{\pi}{2}}-1\right)+3\left(e^{i\frac{\pi}{2}}-1\right)$$

حسب Euler

$$e^{i\pi}=\underbrace{\cos\pi}_{-1}+i\underbrace{\sin\pi}_{0}=-1$$

$$e^{i3\frac{\pi}{2}}=\underbrace{\cos\frac{3\pi}{2}}_{0}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}}=\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}+i\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}=i$$ 0,5

ومنه التكامل يصبح

$$\int_{\sigma} (z - z^2 + 3)\, dz = \frac{1}{2}\left(-1-1\right) - \frac{1}{3}\left(-i \quad -1\right)$$

$$+3(i-1) \quad \cancel{\;}$$

$$= -1 + 3i - 3 - \frac{1}{3}\left(-i \quad -1\right)$$

$$= -4 + 3i + \frac{i}{3} + \frac{1}{3}$$

0,5

$$\boxed{= -\frac{11}{3} + i\,\frac{10}{3}}$$

ب

$$f(z) = \frac{4}{(z-1)(z+3)}$$

الحلقة هي $1 < |z| < 3$ معناه مركزها $z_0 = 0$

وهو يمثل الجوار اذن الجوار هو $z_0 = 0$ 0,5

$$f(z) = \frac{4}{(z-1)(z+3)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+3}$$

$A = 1$ 0,25 $\quad B = -1$ 0,25

$$\rightarrow f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+3}$$

نشر: $\frac{1}{z-1}$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)$$ 0,25

نتأكد أن: $\left|\frac{1}{z}\right|<1$

0,25

لدينا في الحلقة $1<|z|<3$ فإن $|z|>1$ ومنه $\left|\frac{1}{z}\right|<1$

$$\rightarrow \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$ 0,25

نشر $\frac{1}{z+3}$

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3\left(1+\frac{z}{3}\right)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+\frac{z}{3}}\right)$$ 0,25

نتأكد أن $\left|\frac{z}{3}\right|<1$

في الحلقة: $1<|z|<3$ فإن $|z|<3$ 0,25

ومنه $\left|\frac{z}{3}\right|<1$ إذن

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}z^n$$ 0,25

ومنه:

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}z^n \ ,\ 1<|z|<3}$$ 0,5

C) التحقق $f(z)=\omega$ 2pt

f دالة وحيدة القيمة اذا وجد كان لكل z قيمة واحدة

لـ $f(z)$ (كل z له صورة وحيدة هي $f(z)$)