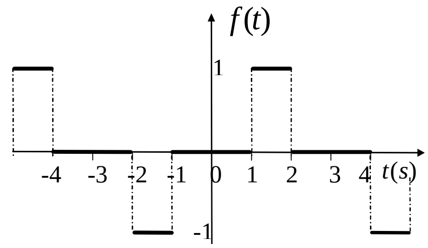
Université A. Mira de Béjaia. — Année: 2012/2013.
Faculté de Technologie. — Module: Physique 3.
Département $2^{ème}$ Année ST. — **EXAMEN DE RATTRAPAGE** — Durée: 02 Heures.

Exercice 1 Série de Fourier. $\boxed{\text{4 Points}}$



Soit la fonction périodique $f(t)$ ci-contre.

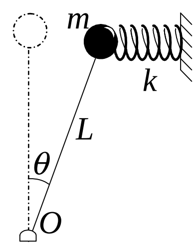
1. Quelle est la période T de cette fonction.

2. Cette fonction est-t-elle *paire* ou *impaire* ?

3. Déduire les coefficients de Fourier a_0, a_n, et b_n de la fonction.

> *Rappel*: *La série de Fourier d'une fonction périodique $f(t)$ est*:
> $$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\tfrac{2\pi n}{T}t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\tfrac{2\pi n}{T}t).$$

Exercice 2 Système non amorti. $\boxed{\text{5 Points}}$



Une tige, de longueur L et de masse négligeable, porte à son extrémité supérieure une masse ponctuelle m reliée à un ressort de raideur k. La tige peut tourner librement dans le plan vertical autour d'un axe passant par le point O.
À l'équilibre, représenté en pointillés, le ressort *n'était pas* déformé.

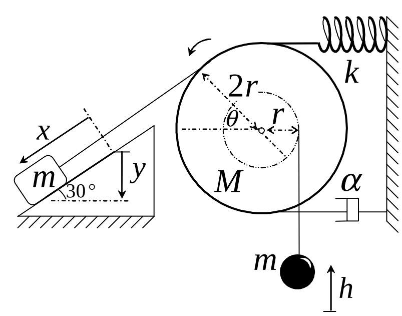
1. Trouver l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle U du système pour $\theta \ll 1$.

2. Déduire l'équation du mouvement et la pulsation propre ω_0. (Utilisez votre méthode préférée !)

3. Trouver la condition d'oscillation du système.

> *Rappels: Pour* $\theta \ll 1$: $\sin\theta \approx \theta$. $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

Exercice 3. Système amorti. $\boxed{\text{8 Points}}$



Un disque, de masse M et de rayon $2r$, est relié à sa périphérie à un ressort de raideur k et à un amortisseur de coefficient de frottement α. Une masse m, posée sur un plan incliné, est reliée à la périphérie du disque par à un fil. Une autre masse m est suspendue à un fil enroulé autour d'un sillon de rayon r gravé sur la surface du disque. Les fils sont inextensibles et non glissants. Le disque peut tourner librement autour de son axe horizontal *fixe*.
À l'équilibre le ressort *n'était pas* déformé.

1. Trouver l'énergie potentielle U, l'énergie cinétique T, ainsi que la fonction de dissipation $\mathcal{D}$ du système pour la variable θ.

2. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit $\ddot{\theta} + \frac{4\alpha}{2M+5m}\dot{\theta} + \frac{4k}{2M+5m}\theta = 0$.

3. Sachant que α=**21**N.s/m, M=m=**1**kg, k=**7**N/m : trouver la nature du mouvement.

4. Quelle est la valeur de α qui ne faut pas dépasser pour avoir des oscillations.

5. Si α=**2**N.s/m, calculer le temps $\boldsymbol{\tau}$ au bout duquel l'amplitude est divisée par **5**.

> *Rappels: Le moment d'inertie d'un disque de masse M et de rayon* $\boldsymbol{a}$ *par rapport à son axe est*: $I=\frac{1}{2}M\boldsymbol{a}^2$
> *L'équation de Lagrange du système amorti est* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}}$
> *Indication: Exprimer le déplacement x ainsi que les hauteurs y et h en termes de r et θ.* ($\sin 30° = \frac{1}{2}$)

Questions de cours. $\boxed{\text{3 Points}}$

1. Pour augmenter le facteur de qualité (Q=$\frac{\omega_0}{2\lambda}$), faut-t-il *augmenter* ou *diminuer* les frottements ?

2. Pour aboutir à une résonance, faut-t-il *augmenter* ou *diminuer* le facteur de qualité Q ?

3. Puisque la pulsation de résonance Ω_R=$\sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$, la condition de résonance est $Q>\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$ ou $Q<\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$?

Exercice 1

1. La période de la fonction est $\boxed{T = \mathbf{6s}.}$ 1 **2**. La fonction est impaire. 0,5

2. $a_0 = 0$ 0,5 $a_n = 0$ 0,5 (Car la fonction est impaire.)

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}\,dt \; (0{,}5) = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}\,dt \quad \left\{f\ \textit{impaire} \rightarrow \frac{4}{T}\int_0^{T/2}\ \textit{est correcte aussi}\right\}$$

$$= \frac{2}{6}\left[\int_{-2}^{-1} -1.\sin\frac{2\pi \mathbf{n}t}{6}dt + \int_{-1}^{1} 0.\ dt + \int_1^2 1.\sin\frac{2\pi \mathbf{n}t}{6}dt + \int_2^4 0.\ dt\right] \; (0{,}5)$$

$$= \frac{2}{\pi\mathbf{n}}\left(\cos\frac{\pi\mathbf{n}}{3} - \cos\frac{2\pi\mathbf{n}}{3}\right). \; (0{,}5)$$

Donc, $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2.\frac{1-(-1)^{\mathbf{n}}}{\pi\mathbf{n}}\cos\frac{\pi\mathbf{n}}{3}\sin\frac{\pi\mathbf{n}t}{3}.$ $\left\{\text{Car } \cos\frac{2\pi\mathbf{n}}{3} = \cos(\pi\mathbf{n} - \frac{\pi\mathbf{n}}{3}) = (-1)^{\mathbf{n}}\cos\frac{\pi\mathbf{n}}{3}.\right\}$

Exercice 2 **1**. $T = T_m = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$. 0,5

$$U = U_k + U_m \approx \frac{1}{2}k(L\sin\theta)^2 - mg(L - L\cos\theta)\; (0{,}5) \approx \frac{1}{2}kL^2\theta^2 \; (0{,}5) - \frac{1}{2}mgL\theta^2 \; (0{,}5)$$

2. Avec l'équation de Lagrange: Le Lagrangien est $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(kL^2 - mgL)\theta^2$.

$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0}$ 0,5 $\Rightarrow$ $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{kL - mg}{mL}\theta = 0.}$ 1 $\Rightarrow$ $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{kL - mg}{mL}}}$ 0,5

Avec l'équation de conservation de l'énergie totale: $E = T + U = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(kL^2 - mgL)\theta^2$.

$\boxed{\frac{dE}{dt} = 0}$ 0,5 $\Rightarrow$ $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{kL - mg}{mL}\theta = 0.}$ 1 $\Rightarrow$ $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{kL - mg}{mL}}}$ 0,5

3. À partir de l'énergie potentielle U, la condition d'oscillation est $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=0} > 0$ 0,5 $\Rightarrow$ $\boxed{kL - mg > 0}$ 0,5

D'après l'équation du mouvement aussi, la condition d'oscillation est $\frac{kL - mg}{mL} > 0 \Rightarrow kL - mg > 0$.

Exercice 3 **1**. $U = U_k + U_m + U_m = \boxed{\frac{1}{2}k(2r\theta)^2 + mgh - mgy.}$ 0,5

Puisque le fil est non glissant et inextensible, on a $\boxed{h = r\theta.\ x = 2r\theta.}$ 0,5 Donc, $y = x\sin 30° = r\theta$.

$U = 2kr^2\theta^2 + mgr\theta - mgr\theta = \boxed{2kr^2\theta^2.}$ 0,5

$T = T_{disque} + T_m + T_m = \frac{1}{2}\frac{1}{2}M(2r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{h}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$. Comme $\dot{h} = r\dot{\theta}$ et $\dot{x} = 2r\dot{\theta}$, on a

$T = \boxed{Mr^2\dot{\theta}^2}$ 0,5 $+ \boxed{\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + 2mr^2\dot{\theta}^2}$ 0,5 $= \frac{1}{2}(2M + 5m)r^2\dot{\theta}^2$. $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha(2r\dot{\theta})^2 = \boxed{2\alpha r^2\dot{\theta}^2.}$ 0,5

2. Le Lagrangien est: $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}(2M + 5m)r^2\dot{\theta}^2 - 2kr^2\theta^2$.

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{\theta}} \Rightarrow \boxed{(2M + 5m)r^2\ddot{\theta} + 4kr^2\theta = -4\alpha r^2\dot{\theta}}$ 0,5 $\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{4\alpha}{2M + 5m}\dot{\theta} + \frac{4k}{2M + 5m}\theta = 0.$

3. L'équation est de la forme: $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$: avec $\boxed{\lambda = \frac{2\alpha}{2M + 5m}.\quad \omega_0^2 = \frac{4k}{2M + 5m}.}$ 0,5

A.N: $\boxed{\lambda^2 - \omega_0^2}$ 0,5 $=$ $\boxed{32 > \mathbf{0}.}$ 0,5 Le mouvement est donc **apériodique.** 0,5

4. Pour avoir des oscillations il faut que $\boxed{\lambda^2 - \omega_0^2 < 0}$ 0,5 $\Rightarrow \lambda < \omega_0 \Rightarrow \alpha < \sqrt{k(2M + 5m)}$: $\boxed{\alpha < \mathbf{7}\text{N.s/m.}}$ 0,5

5. $\boxed{Ae^{-\lambda(t+\boldsymbol{\tau})} = \frac{1}{\mathbf{5}}Ae^{-\lambda t}}$ 0,5 $\Longrightarrow$ $\boxed{\lambda\boldsymbol{\tau} = \ln\mathbf{5}}$ 0,5 $\Longrightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{\tau} = \frac{\ln\mathbf{5}}{\lambda} \approx \mathbf{2{,}82}\text{s.}}$ 0,5

Questions de cours

1. Il faut *diminuer* les frottements. 1

2. Il faut *augmenter* le facteur de qualité. 1

3. $Q > \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$. 1 (Car $\omega_0^2 - 2\lambda^2 > 0 \Rightarrow \omega_0^2 > 2\lambda^2 \Rightarrow \frac{\omega_0}{2\lambda} > \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$)