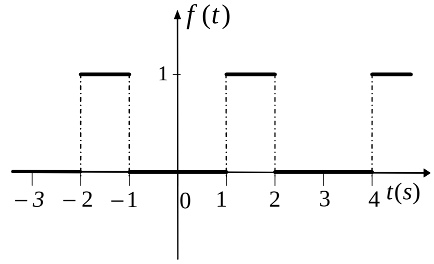
Université A. Mira - Bejaia. Année: 2012/2013.
Faculté de Technologie. Module: Physique 3.
Département $2^{éme}$ Année ST. **EXAMEN DE MOYENNE DURÉE** Durée: 02 Heures.

Exercice 1. Série de Fourier. $\boxed{\text{4 Points}}$

Soit la fonction périodique $f(t)$ ci-contre.

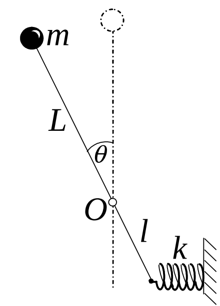


1. Quelle est la période T de cette fonction.
2. Cette fonction est-t-elle *paire* ou *impaire* ?
3. Trouver les coefficients de Fourier a_0, a_n, et b_n de la fonction.

> *Rappel: La série de Fourier d'une fonction périodique $f(t)$ est:*
> $$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\tfrac{2\pi n}{T}t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\tfrac{2\pi n}{T}t).$$

Exercice 2. Système non amorti. $\boxed{\text{5 Points}}$

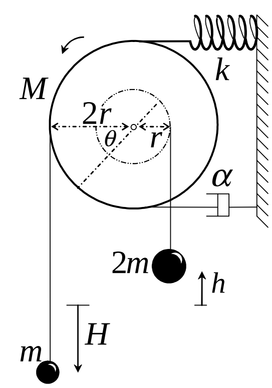
Une tige de longueur totale $L+l$ et de masse négligeable, porte à son extrémité supérieure une masse ponctuelle m. L'autre bout de la tige est relié à un ressort de raideur k. Celui-ci *n'était pas* déformé à l'équilibre et supposé rester horizontal lors des petits mouvements. La tige peut tourner librement autour du point O. À l'équilibre la tige était verticale.



1. Trouver l'énergie potentielle U et l'énergie cinétique T du système si $\theta \ll 1$. ($\sin\theta \approx \theta$. $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$.)
2. Trouver l'équation du mouvement et la pulsation propre ω_0 : soit avec l'équation de Lagrange, soit avec l'équation de conservation de l'énergie totale. (Utilisez la méthode que vous préférez !)
3. Trouver la condition d'oscillation du système.

Exercice 3. Système amorti. $\boxed{\text{8 Points}}$

Un disque de masse M et de rayon $2r$ est relié à sa périphérie à un ressort de raideur k et à un amortisseur de coefficient de frottement α. Une masse m est suspendue à un fil enroulé autour de la périphérie du disque et une autre masse $2m$ suspendue à un fil enroulé autour d'un sillon de rayon r gravé sur la surface du disque. Les fils sont supposés inextensibles et non glissants. Le disque peut tourner librement autour de son axe *fixe*.



1. Trouver l'énergie potentielle U, l'énergie cinétique T, ainsi que la fonction de dissipation $\mathcal{D}$ pour $\theta \ll 1$. (À l'équilibre le ressort *n'était pas* déformé)
2. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit $\ddot{\theta} + \frac{2\alpha}{M+3m}\dot{\theta} + \frac{2k}{M+3m}\theta = 0$.
3. Sachant que α=**8**N.s/m, M=m=**1**kg, k=**2**N/m : trouver la nature du mouvement.
4. Quelle est la valeur de α qui ne faut pas dépasser pour avoir des oscillations.
5. Si α=**2**N.s/m, calculer le temps $\boldsymbol{\tau}$ au bout duquel l'amplitude est divisée par **6**.

> *Rappels: Le moment d'inertie d'un disque de masse M et de rayon* $\boldsymbol{a}$ *par rapport à son axe est* $I=\frac{1}{2}M\boldsymbol{a}^2$.
> *L'équation de Lagrange du système amorti est* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{\theta}}$.

Questions de cours. $\boxed{\text{3 Points}}$

1. La pulsation de résonance est la pulsation qui donne l'amplitude *maximale*, ou *minimale*?
2. Les pulsations de coupure Ω_1 et Ω_2 sont les pulsations pour lesquelles la puissance moyenne $\langle\mathcal{P}\rangle$ fournie par l'excitation atteint *son maximum*, ou la *moitié de son maximum*, ou devient *nulle*?
3. La bande passante B est donnée par Ω_2/Ω_1, ou $\Omega_2 + \Omega_1$, ou $\Omega_2 - \Omega_1$?

Bon week-end !

Exercice 1

1. La période de la fonction est $\boxed{T=\mathbf{3s}.}$ 1 **2**. La fonction est paire. 0,5

3. $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$ 0,5 $= \frac{1}{3}\left[\int_0^1 0.\mathrm{d}t + \int_1^2 1.\mathrm{d}t + \int_2^3 0.\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{3}.$ 0,5

$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}\,\mathrm{d}t$ 0,5 $= \frac{2}{3}\left[\int_0^1 0.\mathrm{d}t + \int_1^2 1.\cos\frac{2\pi nt}{3}\mathrm{d}t + \int_2^3 0.\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{\pi\mathbf{n}}\left(\sin\frac{4\pi\mathbf{n}}{3} - \sin\frac{2\pi\mathbf{n}}{3}\right)$ 0,5

$b_n = 0.$ 0,5 (Car la fonction est paire.) $\{$*Remarque: L'utilisation de* $\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} \to \frac{1}{3}\int_{-1}^{2}$ *est correcte aussi*$\}$

Donc, $f(t) = \frac{1}{3} + \sum \frac{2(-1)^{\mathbf{n}}}{\pi\mathbf{n}}\sin\frac{\pi\mathbf{n}}{3}\cos\frac{2\pi\mathbf{n}t}{3}.$ $\{$Car $\sin\frac{4\pi\mathbf{n}}{3} - \sin\frac{2\pi\mathbf{n}}{3} = \sin(\pi\mathbf{n}+\frac{\pi\mathbf{n}}{3}) - \sin(\pi\mathbf{n}-\frac{\pi\mathbf{n}}{3}) = 2(-1)^n\sin\frac{\pi\mathbf{n}}{3}\}$

Ou encore, $f(t) = \frac{1}{3} + \sum \frac{-2}{\pi\mathbf{n}}\sin\frac{2\pi\mathbf{n}}{3}\cos\frac{2\pi\mathbf{n}t}{3}.$ $\{$Car $\sin\frac{4\pi\mathbf{n}}{3} - \sin\frac{2\pi\mathbf{n}}{3} = \sin(2\pi\mathbf{n}-\frac{2\pi\mathbf{n}}{3}) - \sin\frac{2\pi\mathbf{n}}{3} = -2\sin\frac{2\pi\mathbf{n}}{3}\}$

Exercice 2

1. $U = U_k + U_m \approx \frac{1}{2}k(l\sin\theta)^2$ 0,5 $- mg(L - L\cos\theta)$ 0,5 $\approx \frac{1}{2}kl^2\theta^2 - \frac{1}{2}mgL\theta^2$ 0,5 $T = \boxed{\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2.}$ 0,5

2. Avec l'équation de Lagrange: Le Lagrangien est $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(kl^2 - mgL)\theta^2.$

$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0}$ 0,5 $\Rightarrow mL^2\ddot{\theta} + (kl^2 - mgL)\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{kl^2 - mgL}{mL^2}\theta = 0.}$ 1 $\Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{kl^2 - mgL}{mL^2}}}$ 0,5

Avec l'équation de conservation de l'énergie totale: $E = T + U = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(kl^2 - mgL)\theta^2.$

$\boxed{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0}$ 0,5 $\Longrightarrow mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + (kl^2 - mgL)\theta\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{kl^2 - mgL}{mL^2}\theta = 0.}$ 1 $\Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{kl^2 - mgL}{mL^2}}}$ 0,5

3. À partir de l'énergie potentielle U, la condition d'oscillation est $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=0} > 0$ 0,5 $\Rightarrow \boxed{kl^2 - mgL > 0}$ 0,5

D'après l'équation du mouvement aussi, la condition d'oscillation est $\frac{kl^2 - mgL}{mL^2} > 0 \Rightarrow kl^2 - mgL > 0.$

Exercice 3 **1**. $U = U_k + U_{2m} + U_m = \boxed{\frac{1}{2}k(2r\theta)^2 + 2mgh - mgH.}$ 0,5

Puisque le fil est non glissant et inextensible on a $\boxed{h = r\theta \text{ et } H = 2r\theta.}$ 0,5 (Donc, $\dot{h} = r\dot{\theta}$ et $\dot{H} = 2r\dot{\theta}$)

$U = 2kr^2\theta^2 + 2mgr\theta - 2mgr\theta = \boxed{2kr^2\theta^2.}$ 0,5

$T = T_{disque} + T_{2m} + T_m = \frac{1}{2}\frac{1}{2}M(2r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}2m\dot{h}^2 + \frac{1}{2}m\dot{H}^2 = \boxed{Mr^2\dot{\theta}^2}$ 0,5 $+ \boxed{mr^2\dot{\theta}^2 + 2mr^2\dot{\theta}^2}$ 0,5

$T = (M + 3m)r^2\dot{\theta}^2.$ $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha(2r\dot{\theta})^2 = \boxed{2\alpha r^2\dot{\theta}^2.}$ 0,5

2. Le Lagrangien est: $\mathcal{L} = T - U = (M + 3m)r^2\dot{\theta}^2 - 2kr^2\theta^2.$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{\theta}} \Longrightarrow \boxed{2(M+3m)r^2\ddot{\theta} + 4kr^2\theta = -4\alpha r^2\dot{\theta}}$ 0,5 $\Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{2\alpha}{M+3m}\dot{\theta} + \frac{2k}{M+3m}\theta = 0.$

3. L'équation est de la forme: $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$: avec $\boxed{\lambda = \frac{\alpha}{M+3m}. \quad \omega_0^2 = \frac{2k}{M+3m}.}$ 0,5

A.N: $\boxed{\lambda^2 - \omega_0^2}$ 0,5 $= \boxed{\mathbf{3>0}.}$ 0,5 Le mouvement est donc **apériodique.** 0,5

4. Pour avoir des oscillations il faut que $\boxed{\lambda^2 - \omega_0^2 < 0}$ 0,5 $\Rightarrow \lambda < \omega_0 \Rightarrow \alpha < \sqrt{2k(M+3m)}$: $\boxed{\alpha < \mathbf{4}\,\mathrm{Ns/m}.}$ 0,5

5. $\boxed{Ae^{-\lambda(t+\boldsymbol{\tau})} = \frac{1}{\mathbf{6}}Ae^{-\lambda t}}$ 0,5 $\Longrightarrow \boxed{\lambda\boldsymbol{\tau} = \ln\mathbf{6}}$ 0,5 $\Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\tau} = \frac{\ln\mathbf{6}}{\lambda} \approx \mathbf{3{,}6}\mathrm{s}.}$ 0,5

Questions de cours **1.** La pulsation de résonance donne l'amplitude *maximale*. 1

2. Aux pulsations de coupure, $\langle\mathcal{P}\rangle$ atteint la *moitié* de son maximum. 1

3. $B = \Omega_2 - \Omega_1.$ 1