جامعة الاخوة منتوري قسنطينة 1 — 14 جوان 2015

علوم و تقنيات ST1 — ساعة و نصف

امتحان استدراكي في مقياس الرياضيات 2

التمرين 1(8ن)

1) احسب التكاملات التالية:

ا) $\int \frac{dx}{\sqrt{3}-x}$ ب) $\int \frac{dx}{\sqrt{3}+x}$ ج) $\int \frac{x}{1+x^2}dx$

2) اوجد المعاملات A, B, C, D التي تحقق المساواة التالية

$$\frac{(1+x)^2}{(3-x^2)(1+x^2)} = \frac{A}{\sqrt{3}-x} + \frac{B}{\sqrt{3}+x} + \frac{Cx+D}{1+x^2}$$

3) استنتج قيمة التكامل $I(x) = \int \frac{(1+x)^2}{(3-x^2)(1+x^2)} dx$

4) باستعمال التحويل المناسب استنتج قيمة التكامل التالي $J(x) = \int \frac{1+\sin x}{1+2\cos x} dx$.

التمرين 2(5ن)

حل المعادلة التفاضلية التالية

$$y'' + 4y' + 4y = (x-1)e^{-2x}$$

التمرين 3(7ن)

1) عين مساحة الجزء D من المستوي المحدود بالمنحنيين ذو المعادلتين $y = x, y^2 = x$.

2) احسب $I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} xy^2\, dx\right) dy$

3) هل يمكن كتابتها على الشكل $I = \iint_D xy^2\, dxdy$؟ ما هو المجال D حينئذ؟

4) اكتب I على الشكل $I = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} xy^2\, dy\right) dx$

بالتوفيق للجميع

التصحيح النموذجي للامتحان الاستدراكي لمقياس الرياضيات 2

التمرين 1:

1)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3}-x} = \overbrace{-\ln|\sqrt{3}-x|}^{0,5} + C \quad 0,25$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3}+x} = \overbrace{\ln|\sqrt{3}+x|}^{0,5} + C \quad 0,25$$

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx \quad 0,5$$

$$= \overbrace{\frac{1}{2}\ln|1+x^2|}\ + C \quad 0,25$$

2) المعاملات:

$$B = \frac{2-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \quad 0,25 \qquad\qquad A = \frac{2+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \quad 0,25$$

$$C = \frac{1}{2} \quad 0,25 \qquad\qquad D = 0 \quad 0,25$$

3) استنتاج قيمة التكامل $I(x)$:

$$I(x) = \underbrace{\frac{2+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{3}-x}} + \overbrace{\frac{2-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{3}+x}}^{0,25} + \overbrace{\frac{1}{2}\int \frac{x}{1+x^2}dx}^{0,25}$$

حسب السؤال (1)

$$I(x) = \left(\frac{-2-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\right)\ln|\sqrt{3}-x| + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\right)\ln|\sqrt{3}+x| + \frac{1}{4}\ln|1+x^2| + C$$

0,12 ✓ 0,12 ✓ 0,12 ✓ 0,12 ✓

4) نضع $t = tg\frac{x}{2}$ ، $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ ، $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ، $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

0,12 ✓ 0,12 ✓ 0,12 ✓ 0,12 ✓

بالتعويض في التكامل $J(x)$ نجد:

$$\int \frac{(1+t)^2}{(3-t^2)(1+t^2)}dt = \frac{-2-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\ln|\sqrt{3}-t| + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\right)\ln|\sqrt{3}+t| + \frac{1}{4}\ln|1+t^2| + C$$

0,12 ✓ 0,12 ✓ 0,12 ✓ 0,12 ✓

ومنه

$$J(x) = \frac{-2-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}-tg\frac{x}{2}\right| + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\right)\ln\left|\sqrt{3}+tg\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{4}\ln\left|1+tg^2\frac{x}{2}\right| + C.$$

0,12 ✓ 0,12 ✓ 0,12 ✓ 0,12 ✓

ص 9

التمرين 02:

الحل العام هو من الشكل $y_G = y_H + y_p$

أ) البحث عن y_H: حل المعادلة المتجانسة

$$y''+4y'+4y=0$$

المعادلة المميزة: (0,25)

$$k^2+4k+4=0 \Rightarrow \Delta=0 \Rightarrow k=-2$$

ومنه

$$\boxed{y_H=(C_1x+C_2)e^{-2x}}$$ (0,5)

C_1, C_2 ثوابت حقيقية (0,25)

ب) البحث عن y_p: حل المعادلة $y''+4y'+4y=(x-1)e^{-2x}$

نلاحظ أن $\lambda=-2$ حل مضاعف للمعادلة المميزة

إذن y_p له الشكل التالي (0,5)

(0,5) $$y_p=(Ax+B)x^2e^{-2x}$$

$$y_p' = Ax^2e^{-2x}+(Ax+B)2xe^{-2x}-2(Ax+B)x^2e^{-2x}$$

$$y_p''=2xAe^{-2x}-2Ax^2e^{-2x}+A2xe^{-2x}+(Ax+B)2e^{-2x}$$

$$-4(Ax+B)xe^{-2x}-2Ax^2e^{-2x}-4(Ax+B)xe^{-2x}$$

$$+4(Ax+B)x^2e^{-2x}$$

نجد المشتقات:

0,75 . $y'_p = 3Ax^2e^{-2x} + 2xBe^{-2x} - 2Ax^3e^{-2x} - 2Bx^2e^{-2x}$

$$y''_p = -12Ax^2e^{-2x} + 6Axe^{-2x} - 8Bxe^{-2x} + 4Ax^3e^{-2x} + 4Bx^2e^{-2x} + 2Be^{-2x}$$ --- 0,75

بالتعويض في المعادلة التفاضلية والمطابقة نجد:

$$6Axe^{-2x} + 2Be^{-2x} = (x-1)e^{-2x}$$

$$\begin{cases} 6A = 1 \\ 2B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/6 \\ B = -1/2 \end{cases}$$ 0,25 0,25

$$\boxed{y_p = \left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{2}\right)x^2e^{-2x}}$$ 0,5

ومنه

$$y_G = (C_1x + C_2)e^{-2x} + \left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{2}\right)x^2e^{-2x}$$

حيث C ثابت حقيقي

0,5

ص

التمرين 3

1) تعيين مساحة الجزء D :

$$\int_0^1\int_{x^2}^{x} dy\,dx = \int_0^1 [y]_{x^2}^{x}\,dx \quad 0{,}5$$

$$= \int_0^1 (x - x^2)\,dx \quad 0{,}5 \quad = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 \quad 0{,}25$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad 0{,}5$$

2)

$$I = \int_0^1 \left[\int_0^{1-y} xy^2\,dx\right] dy = \int_0^1 \left(y^2 \frac{x^2}{2}\right)_0^{1-y} dy \quad 0{,}5$$

$$= \int_0^1 \left(y^2 \frac{(1-y)^2}{2}\right) dy \quad 0{,}5 \quad = \frac{1}{2}\int_0^1 (y^2 - 2y^3 + y^4)\,dy \quad 0{,}5$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{2y^4}{4}\Big|_0^1 + \frac{y^5}{5}\Big|_0^1\right) \quad 0{,}25$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{\cancel{2}}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{60} \quad 0{,}25$$

3) نعم يمكن كتابتها على الشكل $\iint_D xy^2\,dx\,dy$ 0,5

حيث:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le 1-y\}$$

14) بالحصر تحديد :

$0 \leq x \leq 1-y \Rightarrow 0 \leq y \leq 1-x$ 0,18

$\wedge$

0,12 $0 \leq x \leq 1$ 0,1

ومنه : $u(x) = 0 \wedge v(x) = 1-x$ 0,12

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x y^2 \, dy \right) dx$$

0,5

Ol