

1. Grandeurs et unités physiques

a. Définition

Le mot *physique* à pour origine physis signifiant NATURE. La physique étudie les lois des phénomènes matériels (ou naturels) du monde qui nous entoure. Tout les processus naturels observés dans la nature obéissent à des lois bien déterminées. Comme toute autre science, la physique a pour objectif essentiel la découverte et l'étude de ces lois. Donc, les lois de mouvement, d'interaction entre les corps, des phénomènes de l'électromagnétisme, ... etc appartiennent au domaine de la physique (la pluie, le vent, ...etc).

Les sciences physiques jouent un rôle très important en biologie, en médecine puisque les phénomènes comme la montée de la sève dans les végétaux, l'ouïe, la vue, la tension artérielle, ...etc sont des problèmes qui ne peuvent être expliqués sans les lois de la physique.

La physique est une science exacte où les lois sont exprimées par des formules mathématiques. Pour décrire ces lois, la physique fait appel aux *notions* de grandeurs physiques. Chacune d'elles doit être bien définie et nous devons savoir la mesurer. Il existe deux types de grandeurs :

- Scalaires : comme la masse, le temps, la longueur, ...etc ;
- Vectorielles : qui sont caractérisées par une direction, un sens, un module et un point d'application. Par exemple, la force, la vitesse, ... etc.

b. Grandeurs fondamentales et grandeurs dérivées

La mesure de certaines grandeurs physiques exige l'utilisation d'*étalons* préalablement choisis, par exemple, pour mesurer les distances, il faut être en possession d'un étalon de longueur qui est le mètre, pour mesurer le temps, il faut avoir une horloge étalon synchronisée avec la rotation de la terre autour de son axe.

Les étalons de grandeurs physiques ne doivent pas varier au cours du temps ou pendant la mesure. Ils sont conservés dans les conditions stationnaires au Bureau International des Poids et Mesures (BIPM). Pour les mesures ordinaires, on se sert des copies fideles de ces étalons. Les grandeurs pour la mesure desquelles on a choisi des étalons sont dites *grandeurs fondamentales*. Le nombre de ces grandeurs fondamentales doit être minimum car il est très difficile de contrôler et d'assurer l'invariabilité des étalons dans le temps. Le reste des grandeurs dont la mesure ramène à celle des grandeurs fondamentales sont dites *grandeurs dérivées*. Les grandeurs fondamentales doivent être indépendantes entre elles. Par exemple, la longueur et la masse sont

indépendantes mais la longueur et la vitesse ne le sont pas puisque la vitesse dépend de la longueur.

c. Système international d'unités (SI)

L'ensemble des définitions, des méthodes de mesure et des unités des grandeurs fondamentales constitue ce qu'on appelle un système d'unités. Il existe plusieurs systèmes d'unités mais le plus usuel est le système international (SI) où les grandeurs fondamentales sont :

Grandeur	Symbole	Unité
Longueur	L	Mètre (m)
Masse	M	Kilogramme (Kg)
Temps	T	Seconde (S)
Intensité de courant électrique	I	Ampère (A)
Température thermodynamique	θ	Kelvin (K)
Quantité de matière	μ ou N	Mole (mol)
Intensité lumineuse	J	Candela (cd)

Plus deux autres grandeurs supplémentaires :

Angle plan	α	Radian (rd)
Angle solide	Ω	Stéradian (sr)

Par souci de commodité, certaines unités dérivées ont reçu un nom spécial et un symbole particulier. Ces noms et symboles peuvent eux-mêmes être utilisés pour exprimer d'autres unités dérivées. Les noms spéciaux et les symboles particuliers permettent d'exprimer, sous une forme condensée, des unités fréquemment utilisées.

Le tableau suivant donne des unités dérivées fréquemment utilisées en physique et qui ont un nom spécifique :

Grandeur dérivée	Unité	SI
Fréquence	Hertz (Hz)	S^{-1}
Force	Newton (N)	$m.Kg.S^{-2}$
Pression	Pascal (Pa (=N.m ⁻²))	$m^{-1}.Kg.S^{-2}$
Différence de potentiel électrique	Volt (V (=W.A ⁻¹))	$m^2.kg.S^{-3}.A^{-1}$

Enfin voici quelques exemples d'unités dérivées mais qui n'ont pas reçu de nom spécifique :

Grandeur dérivée	Unité	SI
Viscosité	Pascal. Seconde (Pa.S)	$m^{-1}.Kg.S^{-1}$
Tension superficielle	Newton par mètre (N/m)	$Kg.S^{-2}$
Champ électrique	Volt par mètre (V/m)	$m.Kg.S^{-3}.A^{-1}$

Enfin il existe aussi des unités en dehors du SI dont la valeur en unité SI est obtenue expérimentalement comme par exemple :

Nom	Symbole	Valeur en unités SI
Electronvolt	eV	$1 \text{ eV} = 1,06021773349.10^{-19} \text{ J}$
Unité de masse atomique	u	$1 \text{ u} = 1,660540210.10^{-27} \text{ Kg}$
Unité astronomique	ua	$1 \text{ ua} = 1,4959787069130.10^{11} \text{ m}$

Pour en finir avec les conventions, des préfixes des multiples et sous-multiples décimaux des unités SI ont été définis :

Facteur	Préfixe	Symbole	Facteur	Préfixe	Facteur
10^{24}	Yotta	Y	10^{-1}	Déci	d
10^{21}	Zetta	Z	10^{-2}	Centi	c
10^{18}	Exa	E	10^{-3}	Milli	m
10^{15}	Peta	P	10^{-6}	Micro	μ
10^{12}	Téra	T	10^{-9}	Nano	n
10^9	Giga	G	10^{-12}	Pico	p
10^6	Méga	M	10^{-15}	Femto	f
10^3	Kilo	K	10^{-18}	Atto	a
10^2	Hécto	h	10^{-21}	Zepto	z
10^1	Déca	da	10^{-24}	yocto	y

d. Analyse dimensionnelle

Dans le système international réduit Mètre Kilogramme Seconde Ampère n'importe quelle grandeur dérivée G peut être exprimée en fonction des grandeurs fondamentales (Longueur, Masse, Temps, Intensité de courant,...) selon l'expression :

$$[G] = L^a \cdot M^b \cdot T^c \cdot I^d \cdot \theta^e \cdot \mu^f \cdot J^j$$

Avec : a, b, c et d sont des nombres réels. L'expression $[G] = L_a \cdot M^b \cdot T^c \cdot I^d$ est l'équation aux dimensions de la grandeur G.

Exemples :

- La vitesse = longueur / temps $\Rightarrow [v] = L^1 \cdot T^{-1}$
- L'accélération : $\gamma = \frac{v}{t} = \frac{x}{t^2} \Rightarrow [\gamma] = L \cdot T^{-2}$
- La pression : $\left. \begin{array}{l} P = \frac{F}{S} \\ F = m\gamma \end{array} \right\} \Rightarrow P = \frac{m\gamma}{S} \Rightarrow [P] = M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L^{-2} = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$

L'analyse dimensionnelle va nous permettre de retrouver facilement les formules physiques et d'éviter les erreurs dues aux unités puisque toutes les relations entre les grandeurs physiques sont homogènes de point de vue dimensions.

e. Homogénéité d'un résultat

Par souci de clarté, on doit conduire tous les calculs sous forme littérale en conservant les symboles des différentes grandeurs physiques. On ne réalise d'application numérique que lorsque le calcul littéral est terminé. Ceci permet de juger l'homogénéité d'une formule.

Il faut en effet se rappeler le principe suivant :

Tout résultat non homogène est nécessairement faux

Par contre, un résultat homogène n'est pas forcément le bon.

Exemples :

1. Comme chacun sait, Einstein a trouvé que l'énergie $E = m \cdot c^2$ et on va vérifier l'homogénéité de cette équation d'Einstein :

On a :

- $[E] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$
- $[mc^2] = [m] \cdot [c^2] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$

On peut dire l'équation d'Einstein est homogène du point de vue analyse dimensionnelle.

2. Vérification de l'homogénéité de l'équation $E = 4 mc^2$, On a :

- $[E] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$
- $[4mc^2] = [m] \cdot [c^2] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$

On peut dire l'équation précédente est homogène du point de vue analyse dimensionnelle. Un résultat bon mais avec une équation fautive.

Règles d'homogénéité

- On ne peut additionner que des termes homogènes ;
- L'argument d'une fonction mathématique transcendante (exp, ln, cos, sin, tan. . .) est nécessairement sans dimension ;
- On doit éviter de remplacer le symbole d'une grandeur par sa valeur numérique ;
- Un vecteur ne peut être ajouté qu'à un vecteur et non à un scalaire.

f. Changement de systèmes de grandeurs

Pour écrire l'équation aux dimensions d'une grandeur donnée G dans un système de grandeurs fondamentales quelconques différent du SI, on procède comme suit :

- Ecrire l'équation aux dimensions de la grandeur G dans le SI et dans le nouveau système avec des exposants inconnus ;
- Ecrire les équations aux dimensions de toutes les grandeurs du nouveau système dans le SI ;
- Déterminer les inconnus par l'analyse dimensionnelle en respectant l'homogénéité des expressions ;
- Ecrire l'équation aux dimensions de G dans le nouveau système d'unités.

Exemple :

Supposons que l'on prenne pour grandeurs fondamentales la force (F), la masse volumique (ρ) et la fréquence (N). Ecrire les équations aux dimensions de la longueur dans le système : $F\rho N$?

1. $L = F^\alpha \cdot \rho^\beta \cdot N^\gamma$
 2. $[F] = M \cdot L \cdot T^{-2}$; $[\rho] = M \cdot L^{-3}$ et $[N] = T^{-1}$
 3. $L = (M \cdot L \cdot T^{-2})^\alpha \cdot (M \cdot L^{-3})^\beta \cdot (T^{-1})^\gamma = M^{\alpha+\beta} \cdot L^{\alpha-3\beta} \cdot T^{-2\alpha-\gamma}$
- $$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - 3\beta = 1 \\ -2\alpha - \gamma = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1/4 \\ \beta = -1/4 \\ \gamma = -1/2 \end{array} \right.$$
4. $L = F^{1/4} \cdot \rho^{-1/4} \cdot N^{-1/2}$

2. Incertitudes et calcul d'erreurs

a. Les différents types d'erreurs

Pour qu'il soit valorisé, tout résultat expérimental doit être suivi d'une estimation sur l'ordre de grandeur de l'erreur globale que l'on a pu commettre. On peut distinguer deux types d'erreurs :

- **Erreurs systématiques** : elles sont dues à une cause bien déterminée et se produisent dans un même sens qui n'est pas toujours connu. Elles sont répétitives et constantes. Les erreurs systématiques doivent être traquées et éliminées.

Exemple : l'utilisation d'une règle dont il manque le premier centimètre : toutes les mesures seraient surévaluées ou si une balance indique déjà quelques grammes lorsque le plateau n'est pas chargé, toutes les mesures fourniront une valeur trop élevée.

- **Erreurs aléatoires** : elles sont mal définies, varient dans le temps et se produisent de part et d'autre de la valeur vraie. Les erreurs aléatoires ne peuvent pas être éliminées mais on peut les limiter. Il faut donc savoir les évaluer.

Exemple : la mesure de la longueur d'un objet par une règle ; l'erreur aléatoire est inévitable liée à l'ajustement de la règle sur l'objet, à la vision de l'expérimentateur et à la précision de la règle. La valeur mesurée peut être surévaluée ou sous-évaluée et une répétition des mesures puisse atténuer l'erreur aléatoire.

b. Expression d'erreurs

L'erreur peut être exprimée sous forme de :

- **Erreur absolue** : c'est la valeur absolue de l'écart entre la valeur vraie (X_v) et la valeur mesurée (X_m). La valeur vraie (X_v) étant inconnue, l'erreur absolue l'est également.

$$\text{Erreur absolue} = |X_v - X_m| = \text{inconnue}$$

L'**incertitude absolue** (ΔX) est la limite supérieure de l'erreur absolue :

$$\text{Incertainitude absolue} = \text{limite supérieure de l'erreur absolue} = \Delta X$$

- **Erreur relative** : c'est le rapport de l'erreur absolue à la valeur mesurée. Elle n'est pas connue.

$$\text{Erreur relative} = \frac{\text{Erreur absolue}}{\text{Valeur mesurée}} = \frac{|X_v - X_m|}{X_m} = \text{Inconnue}$$

L'incertitude relative est le quotient de l'incertitude absolue ΔX par la valeur mesurée X_m .

$$\text{Incertainude relative} = \text{limite sup. de l'erreur relative} = \frac{\text{Incertainude absolue}}{\text{Valeur mesurée}} = \frac{\Delta X}{X_m}$$

Elle nous donne la précision de la mesure et s'exprime par le rapport :

$$\varepsilon(\%) = \frac{\Delta X}{X} \cdot 100$$

Exemple : soit $X_m = 1,523428$ (valeur mesurée) et $\Delta X = 3 \cdot 10^{-4}$ (incertainude absolue = limite supérieure de l'erreur absolue)

- ✓ L'erreur absolue = $|X_v - X_m|$ = inconnue car X_v est inconnue
- ✓ On peut dire que la valeur vraie X_v est entre $1,523428 - 3 \cdot 10^{-4} = 1,523728$ et $1,523428 + 3 \cdot 10^{-4} = 1,523128$ et on écrit : $X_v = X_m \pm \Delta X = 1,523428 \pm 0,0003$
- ✓ L'erreur relative = $\frac{|X_v - X_m|}{X_m}$ = inconnu
- ✓ L'incertainude relative = $\frac{\Delta X}{X_m} = \frac{3 \cdot 10^{-4}}{1,523428} \cdot 100 = 0,02\% \Rightarrow X_v = 1,523428 \pm 0,02\%$
- ✓ On peut transformer l'incertainude absolue en incertainude relative et vis-versa : $0,02\% \cdot 1,523428 = 0,0003 \Rightarrow 1,523428 \pm 0,02\% \equiv 1,523428 \pm 3 \cdot 10^{-4}$

c. Origine des erreurs

Les erreurs sont dues généralement à l'appareil de mesure et à l'expérimentateur. On distingue :

- **Erreurs de consommation** : ce sont des erreurs systématiques dues à la consommation de l'appareil de mesure.

Exemple : introduction de l'appareil de mesure dans des circuits électriques.

- **Erreurs de lecture** : sont la différence entre la valeur indiquée par l'appareil et celle lue par l'expérimentateur.

Exemple : pour une burette graduée, l'intervalle qui sépare deux traits consécutifs correspond à un volume de $1/20\text{mL}$.

- ✓ L'erreur absolue de lecture d'un volume à la burette est donc de $0,05\text{mL}$.
- ✓ Si $V_m = 3\text{mL} \Rightarrow V_v = 3 \pm 0,05\text{mL}$

- **Erreurs instrumentales** : sont des erreurs systématiques dues au manque de fidélité de l'appareil. Un appareil de mesure est fidèle lorsque les résultats qu'il donne sont reproductibles.

L'erreur instrumentale est donnée par : $\Delta X = \frac{\text{Classe} \cdot \text{Calibre}}{100}$

avec : le calibre est la grandeur de la valeur à mesurer qui donne

sur le cadran la déviation maximale de l'aiguille. La classe est le rapport du maximum de l'erreur tolérée sur le calibre de l'appareil. Donc lorsqu'on change de calibre l'erreur maximale change aussi puisque la classe ne dépend pas du calibre utilisé. La classe est toujours donnée par le constructeur.

Exemple : Lorsqu'un voltmètre de classe 0,5 est utilisé sur le calibre de 100Volts, l'erreur instrumentale est

$$\Delta V = \frac{0,5 \cdot 100}{100} = 0,5 \text{ Volt}$$

La valeur 0,5 Volts est l'erreur absolue maximale (incertitude absolue) que l'on peut commettre avec un appareil de cette classe et utilisé sur ce calibre. Cette erreur est la même quelle que soit la déviation de l'aiguille, par contre l'erreur relative varie :

$$\text{si } U = 1 \text{ Volts} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\Delta U}{U} = \frac{0,5}{1} = 0,5 = 50\%$$

$$\text{si } U = 50 \text{ Volts} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\Delta U}{U} = \frac{0,5}{50} = 0,01 = 1\%$$

d. Calcul d'incertitude

1^{er} cas : Lorsque la grandeur G est mesurée directement à l'aide d'un appareil de mesure. Dans ce cas, l'erreur globale est minimale commise est l'incertitude de la mesure. Elle est égale à :

$$|\Delta G| = |\Delta G|_s + |\Delta G|_l + |\Delta G|_i$$

Avec : $|\Delta G|_s$ est l'erreur systématique, $|\Delta G|_l$ est l'erreur de lecture et $|\Delta G|_i$ est l'erreur instrumentale.

Exemple : La mesure avec une burette est de 80 graduations sur 100 graduations.

- *Quelle est le volume mesuré lorsque la burette est de 10mL?*
- *Quelles sont les incertitudes absolue et relative de cette mesure ?*
- *Si la graduation lue par le lecteur est n=79, quelle est l'erreur de lecture commise ?*
- *Calculer l'erreur globale commise lors de cette mesure?*

Corrigé :

- *80 graduations sur l'échelle N=100 graduations.*

Le volume est 100 graduations \rightarrow 10mL

80 graduations \rightarrow V

Alors V= 8mL

- Incertitude absolue : $\Delta V = 0,2/20 = 0,01 \text{ mL}$
- Incertitude relative : $\varepsilon (\%) = (\Delta V/V) \times 100 = 1/8 = 0,125\%$
- La valeur lue est: 100 graduations $\rightarrow 10 \text{ mL}$
79 graduations $\rightarrow V'$

Alors $V' = 7,9 \text{ mL}$

L'erreur de lecture est $\Delta V = 8 - 7,9 = 0,1 \text{ mL}$

- L'erreur globale est: $\Delta V = |\Delta V_s| + |\Delta V_l| = 0,01 + 0,1 = 0,11 \text{ mL}$

2^{ème} cas : lorsque la grandeur G est déduite de la mesure et des valeurs connues d'autres grandeurs X, Y et Z à partir d'une relation de forme : $G = G(X, Y, Z)$

L'incertitude absolue s'écrit à l'aide d'une expression analogue à celle de la différentielle totale de $G = G(X, Y, Z)$.

On a :

$$G = G(X, Y, Z) \Rightarrow dG = \left(\frac{\partial G}{\partial X}\right)_{Y,Z} dX + \left(\frac{\partial G}{\partial Y}\right)_{X,Z} dY + \left(\frac{\partial G}{\partial Z}\right)_{X,Y} dZ$$

$$\Rightarrow |\Delta G| = \left| \left(\frac{\partial G}{\partial X}\right)_{Y,Z} \right| |\Delta X| + \left| \left(\frac{\partial G}{\partial Y}\right)_{X,Z} \right| |\Delta Y| + \left| \left(\frac{\partial G}{\partial Z}\right)_{X,Y} \right| |\Delta Z|$$

Une autre méthode de calcul pratique permet de d'estimer ces incertitudes (relatives et absolues), il s'agit de la différentielle de la fonction logarithmique $d(\ln G) = \frac{dG}{G}$

Exemple : Soient deux (02) résistances R_1 et R_2 respectivement 10Ω et 100Ω montées en parallèle. Elles sont mesurées avec une précision de 1%. Calculer la résistance équivalente R, ΔR et $\frac{\Delta R}{R}$?

Corrigé :

1. La résistance équivalente R :

Les résistances R_1 et R_2 sont montées en parallèle : $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

Application numérique :

$$\left. \begin{array}{l} R_1 = 10\Omega \\ R_2 = 100\Omega \end{array} \right\} \Rightarrow R = \frac{10 \times 100}{10 + 100} \Rightarrow R = 9,09\Omega$$

2. L'incertitude absolue ΔR et l'incertitude relative $\frac{\Delta R}{R}$:

✓ La méthode de la différentielle totale ($\Delta R \rightarrow \frac{\Delta R}{R}$)

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow dR = \left(\frac{\partial R}{\partial R_1}\right) dR_1 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_2}\right) dR_2$$

$$\text{avec : } \left(\frac{\partial R}{\partial R_1}\right) = \frac{R_2(R_1+R_2)-(R_1R_2)}{(R_1+R_2)^2} \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{(R_2)^2}{(R_1+R_2)^2}; \left(\frac{\partial R}{\partial R_2}\right) = \frac{R_1(R_1+R_2)-(R_1R_2)}{(R_1+R_2)^2} \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{(R_1)^2}{(R_1+R_2)^2}$$

$$\Rightarrow dR = \left(\frac{(R_2)^2}{(R_1+R_2)^2}\right) dR_1 + \left(\frac{(R_1)^2}{(R_1+R_2)^2}\right) dR_2 \Rightarrow \Delta R = \left|\frac{(R_2)^2}{(R_1+R_2)^2}\right| |\Delta R_1| + \left|\frac{(R_1)^2}{(R_1+R_2)^2}\right| |\Delta R_2|$$

$$\text{Où : } \frac{\Delta R_1}{R_1} = 1\% \Rightarrow \frac{\Delta R_1}{R_1} = 0,01 \Rightarrow \Delta R_1 = 0,01 * R_1; \frac{\Delta R_2}{R_2} = 1\% \Rightarrow \frac{\Delta R_2}{R_2} = 0,01 \Rightarrow \Delta R_2 = 0,01 * R_2;$$

Application numérique :

$$\left. \begin{array}{l} R_1 = 10\Omega \\ R_2 = 100\Omega \\ R = 9,09\Omega \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta R_1 = 0,01 * R_1 \Rightarrow \Delta R_1 = 0,01 * 10 \Rightarrow \Delta R_1 = 0,1\Omega \\ \Delta R_2 = 0,01 * R_2 \Rightarrow \Delta R_2 = 0,01 * 100 \Rightarrow \Delta R_2 = 1\Omega \\ \Delta R = \left(\frac{(100)^2}{(10+100)^2}\right) * 0,1 + \left(\frac{(10)^2}{(10+100)^2}\right) * 1 \Rightarrow \Delta R = 0,09\Omega \\ \Rightarrow \frac{\Delta R}{R} = \frac{0,09}{9,09} \Rightarrow \frac{\Delta R}{R} = \frac{0,09}{9,09} \Rightarrow \frac{\Delta R}{R} = 0,01 = 1\% \end{array} \right.$$

✓ La méthode de la différentielle de la fonction logarithmique $\left(\frac{\Delta R}{R} \rightarrow \Delta R\right)$

$$\ln(R) = \ln\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right) \Rightarrow \ln(R) = \ln(R_1 R_2) - \ln(R_1 + R_2) \Rightarrow \ln(R) = \ln(R_1) + \ln(R_2) - \ln(R_1 + R_2)$$

$$\Rightarrow \frac{dR}{R} = \frac{dR_1}{R_1} + \frac{dR_2}{R_2} - \frac{d(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)} \Rightarrow \frac{dR}{R} = \frac{dR_1}{R_1} + \frac{dR_2}{R_2} + \frac{-dR_1}{(R_1 + R_2)} + \frac{-dR_2}{(R_1 + R_2)}$$

$$\Rightarrow \frac{dR}{R} = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{(R_1 + R_2)}\right) dR_1 + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{(R_1 + R_2)}\right) dR_2$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta R}{R} = \left|\frac{1}{R_1} - \frac{1}{(R_1 + R_2)}\right| |\Delta R_1| + \left|\frac{1}{R_2} - \frac{1}{(R_1 + R_2)}\right| |\Delta R_2|$$

Application numérique :

$$\left. \begin{array}{l} R_1 = 10\Omega \\ R_2 = 100\Omega \\ R = 9,09\Omega \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta R}{R} = \left|\frac{1}{10} - \frac{1}{(10+100)}\right| * |0,1| + \left|\frac{1}{100} - \frac{1}{(10+100)}\right| * |1| \Rightarrow \frac{\Delta R}{R} = 0,01 = 1\% \\ \frac{\Delta R}{R} = 0,01 \Rightarrow \Delta R = 0,01 * R \Rightarrow \Delta R = 0,01 * 9,09 \Rightarrow \Delta R = 0,09\Omega \end{array} \right.$$

3^{ème} cas : lorsque les erreurs sont aléatoires (erreurs de sensibilité, erreurs de fidélité, ...) on utilise la méthode statistique en répétant (n) fois la même mesure de la grandeur X et on prend la moyenne :

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

Et chaque mesure s'écarte de la valeur moyenne \bar{X} d'une quantité $\Delta X_i = X_i - \bar{X}$.
On peut prendre alors comme erreur l'écart moyen $\overline{\Delta X}$ défini par :

$$\overline{\Delta X} = \frac{\sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}|}{n}$$

Et l'intervalle $[\bar{X} - \overline{\Delta X}, \bar{X} + \overline{\Delta X}]$ s'appelle l'intervalle de confiance de la mesure.

$$\begin{array}{ccc} \bar{X} - \overline{\Delta X} & \bar{X} & \bar{X} + \overline{\Delta X} \\ \hline & \text{Intervalle de confiance} & \end{array}$$

Exemple : Pour manque de fidélité de notre ampèremètre, on répète 5 fois la mesure de l'intensité du courant électrique (en mA) qui traverse une résistance R. Les résultats obtenus sont : 101,00 ; 102,30 ; 99,80 ; 100,90 ; 98,50.

- Calculer \bar{i} : Par définition de la moyenne : $\bar{i} = \frac{\sum_{a=1}^5 i_a}{5}$

$$\text{Application numérique : } \bar{i} = \frac{101,00 + 102,30 + 99,80 + 100,90 + 98,50}{5} \Rightarrow \bar{i} = 100,50 \text{ mA}$$

$$2- \text{ Calculer } \overline{\Delta i} : \text{ Par définition de l'écart moyen : } \overline{\Delta i} = \frac{\sum_{a=1}^5 |i_a - \bar{i}|}{5}$$

Application numérique :

$$\overline{\Delta i} = \frac{|101,00 - 100,5| + |102,30 - 100,5| + |99,80 - 100,5| + |100,90 - 100,5| + |98,50 - 100,5|}{5}$$

$$\Rightarrow \overline{\Delta i} = 1,08 \text{ mA}$$

3- Déterminer l'intervalle de confiance de cette mesure : Par définition de l'intervalle de confiance : $[\bar{i} - \overline{\Delta i}, \bar{i} + \overline{\Delta i}]$

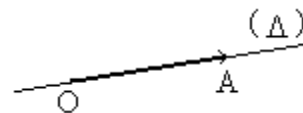
$$\text{Application numérique : } [\bar{i} - \overline{\Delta i}, \bar{i} + \overline{\Delta i}] \equiv [100,5 - 1,08; 100,5 + 1,08] \equiv [99,42; 101,58]$$

3. Les vecteurs

a. Définitions

Un vecteur \overrightarrow{OA} est un segment de droite orienté. Il est caractérisé par :

- Une direction : celle de la droite (Δ) qui le porte ;
- Un sens : celui qui se dirige de O vers A ;
- Un point d'application : son origine au point O ;
- Une extrémité : sa fin au point A ;
- Un module : la longueur du segment [OA]. Soit $\overrightarrow{OA}(x, y, z)$, donc le module de \overrightarrow{OA} est $\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$



Un *vecteur libre* est un vecteur qui se déplace librement dans l'espace en gardant la direction, le sens et son module.

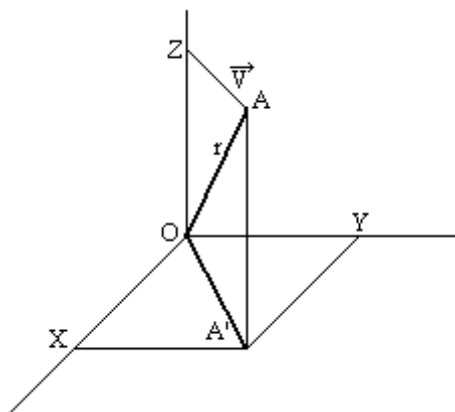
Un *vecteur unitaire* est un vecteur qui a pour module l'unité, soit $\|\overrightarrow{OA}\| = \text{unité}$.

b. Coordonnées d'un vecteur

Soit une base orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On construit le vecteur $\overrightarrow{OA} = \vec{V}$.

Soient :

- $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = \text{unité}$ modules des vecteurs unitaires \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} , perpendiculaires entre eux et portés respectivement sur les axes Ox, Oy et Oz ;
- $\|\overrightarrow{OA}\| = \|\vec{V}\| = r$: longueur du segment [OA] ;
- $\overrightarrow{OA'}$: la projection de \overrightarrow{OA} sur le plan (xOy) et le module de $\|\overrightarrow{OA'}\| = \rho$;
- $X\vec{i}$ est la projection de $\overrightarrow{OA'}$ sur l'axe Ox, $Y\vec{j}$ est la projection de $\overrightarrow{OA'}$ sur l'axe Oy et $Z\vec{k}$ est la projection de \overrightarrow{OA} sur l'axe Oz ;
- ϕ est l'angle formé entre \overrightarrow{OA} et l'axe Oz et θ est l'angle formé entre $\overrightarrow{OA'}$ et l'axe Ox.



Le vecteur \vec{V} peut être écrit sous forme d'une somme vectorielle des trois (03) vecteurs.

Avec : $X = \rho \cos \theta = r \sin \phi \cos \theta$, $Y = \rho \sin \theta = r \sin \phi \sin \theta$ et $Z = r \cos \phi$.

Le vecteur \vec{V} peut être défini par les coordonnées cartésiennes (X, Y, Z) dont les vecteurs unitaires sont \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} .

c. Propriétés des vecteurs

Soit une base orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les vecteurs $\vec{V}_1(x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{V}_2(x_2, y_2, z_2)$ ont les propriétés suivantes :

- $\vec{V}_1(x_1, y_1, z_1) = \vec{V}_2(x_2, y_2, z_2)$ si les vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 ont le même module, le même sens (lignes parallèles) et la même direction.
- $\vec{V}_1(x_1, y_1, z_1) + \vec{V}_2(x_2, y_2, z_2) = \vec{V}_2(x_2, y_2, z_2) + \vec{V}_1(x_1, y_1, z_1) = \vec{S}(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ ou graphiquement.
- $-\vec{V}_1(x_1, y_1, z_1) = \vec{V}_1(-x_1, -y_1, -z_1)$
- $\vec{V}_1(x_1, y_1, z_1) - \vec{V}_2(x_2, y_2, z_2) = \vec{D}(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$
- $\lambda \vec{V}_1(x_1, y_1, z_1) = \vec{V}_1(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

d. Opérations sur les vecteurs :

❖ Produit scalaire de deux vecteurs

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V}_1(x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{V}_2(x_2, y_2, z_2)$ est un **scalaire** ayant les propriétés suivantes :

- Notation : $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$
- Valeur : $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$
- Expression analytique :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \cdot (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Donc, selon le signe de l'angle (θ) formé entre les deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 , le produit scalaire peut être :

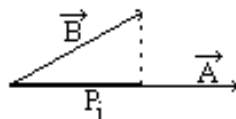
* si $\theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = 1 \Rightarrow \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\|$: positif.

* si $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$: nul.

* si $\theta = \pi \Rightarrow \cos \theta = -1 \Rightarrow \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = -\|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\|$: négatif.

Projection d'un vecteur sur un autre : soit P_j la projection du vecteur \vec{B} sur le vecteur \vec{A} .

On a : $\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos(\vec{A}, \vec{B})$ et puisque : $\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{P_j}{\|\vec{B}\|}$ donc : $P_j = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\|}$



❖ Produit vectoriel de deux vecteurs

Le produit vectoriel de deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} est un **vecteur** \vec{C} ayant les propriétés suivantes :

- Notation : $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{C}$;
- Direction : perpendiculairement à \vec{A} et \vec{B} simultanément ;
- Module : $\|\vec{C}\| = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \sin(\vec{A}, \vec{B})$;
- Sens : déterminé par la règle de tire- bouchon ;
- Signification : représente la surface de parallélogramme construit sur la base des vecteurs \vec{A} et \vec{B} .

Expression analytique :

$$\begin{aligned} \vec{A} \wedge \vec{B} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} y_A & z_A \\ y_B & z_B \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} x_A & z_A \\ x_B & z_B \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix} \\ &= (y_A \cdot z_B - y_B \cdot z_A) \cdot \vec{i} - (x_A \cdot z_B - x_B \cdot z_A) \cdot \vec{j} + (x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A) \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

❖ Produit mixte de trois vecteurs

Le produit mixte de trois vecteurs $\vec{V}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{V}_2(x_2, y_2, z_2)$ et $\vec{V}_3(x_3, y_3, z_3)$ est un **scalaire** défini par :

$$\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot \|\vec{V}_3\| \cdot \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) \cdot \sin(\vec{V}_2, \vec{V}_3)$$

Le produit mixte peut être exprimé aussi sous forme d'un déterminant :

$$\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 + x_3 y_1 z_2 + x_2 y_3 z_1 - x_3 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_3 - x_1 y_3 z_2$$

Signification : la valeur $|\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)|$ représente le volume du parallélépipède construit sur la base des vecteurs \vec{V}_1 , \vec{V}_2 et \vec{V}_3

e. Opérateurs vectoriels

L'opérateur différentiel $\vec{\nabla}$ (Nabla) est une grandeur vectorielle qui indique comment une grandeur physique varie en fonction de ses différents paramètres. $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$

❖ Gradient d'une fonction

Soit une fonction à trois (03) variables $F(x, y, z)$. Le gradient de la fonction F est défini par :

$$\overrightarrow{\text{grad}} F = \vec{\nabla} \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot F = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k}$$

Le gradient d'une fonction est un vecteur.

Le gradient caractérise une variation, orientée dans l'espace, d'une grandeur physique. Cette fonction peut représenter, par exemple, la température à chaque point dans une pièce. La valeur de T dépend de la position du point. On cherche maintenant un vecteur qui pointe vers l'augmentation maximale de T dans la pièce à partir de la source de la propagation de la température.

❖ Divergence d'un vecteur

Soit un vecteur $\vec{V}(A_x, A_y, A_z)$. La divergence de \vec{V} est définie par :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

La divergence d'un vecteur est un scalaire.

La divergence d'un champ vectoriel peut être interprétée comme suit : soit un champ vectoriel la vitesse d'un gaz réel (compressible), la divergence de ce champ peut être interprétée comme une mesure de l'accroissement de la matière en un point donné. Ce phénomène se traduit par le fait que toutes les vitesses sont localement dirigées vers ce point. Lorsqu'un champ converge (les directions des vecteurs convergent), la divergence est négative.

❖ Rotationnel d'un vecteur

Soit un vecteur $\vec{V}(A_x, A_y, A_z)$. Le rotationnel de \vec{V} est définie par :

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Le rotationnel d'un vecteur est un vecteur.

Le rotationnel est un opérateur permettant de mesurer localement un tourbillonnement. On l'applique généralement à un vecteur.

❖ Le Laplacien

Soit une fonction à trois (03) variables $F(x, y, z)$. Le laplacien de la fonction F est défini par :

$$\Delta F = \operatorname{div} \cdot \operatorname{grad} F = \nabla^2 \cdot F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

Le laplacien d'une fonction est un scalaire.

Cas particulier :

$$* \vec{\operatorname{rot}} \cdot \operatorname{grad} F = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} F = \vec{0}$$

$$* \operatorname{div} \cdot \vec{\operatorname{rot}} \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = 0$$