Logique

Exercice 1 :

Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. Si Napoléon était chinois alors $3 - 2 = 2$
2. Soit Cléopâtre était chinoise, soit les grenouilles aboient.
3. Soit les roses sont des animaux, soit les chiens ont 4 pattes.
4. Si l'homme est un quadrupède, alors il parle.
5. Les roses ne sont ni des animaux, ni des fleurs.
6. Paris est en France ou Madrid est en chine.
7. La pierre ponce est un homme si et seulement si les femmes sont des sardines.
8. Les poiriers ne donnent pas de melons, et Cléopâtre n'est pas chinoise.

Aller à : Correction exercice 1 :

Exercice 2 :

Soient (P), (Q) et (R) trois propositions, donner la négation de

a) $(P)\ \text{et}\ \big(\text{non}(Q)\ \text{ou}\ (R)\big)$

b) $\big((P)\ \text{et}\ (Q)\big) \Rightarrow (R)$

Aller à : Correction exercice 2 :

Exercice 3 :

Soient A, B et C trois assertions. Pour chacune des assertions suivantes :

$(A_1) \equiv \big(A\ \text{et non}(B)\big)$; $(A_2) \equiv \big(A\ \text{ou non}(B)\big)$; $(A_3) \equiv \big(A\ \text{ou}\ (B\ \text{et}\ C)\big)$; $(A_4) \equiv \big(A\ \text{et}\ (B\ \text{ou}\ C)\big)$
$(A_5) \equiv \big(A \Rightarrow \text{non}(B)\big)$; $(A_6) \equiv (A \Rightarrow B)$; $(A_7) \equiv (\text{non}(A\ \text{ou}\ B) \Rightarrow C)$; $(A_8) \equiv \big((A\ \text{et}\ B) \Rightarrow \text{non}(C)\big)$

Ecrire sa négation.

Aller à : Correction exercice 3 :

Exercice 4 :

Donner la négation mathématique des phrases suivantes

1. Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges.
2. Certains nombres entiers sont pairs.
3. Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4.

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

4. f est positive, c'est-à-dire « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ »
5. f est paire sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire « $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$ »

Aller à : Correction exercice 4 :

Exercice 5 :

Soient les propositions, (P) « J'ai mon permis de conduire » et (Q) « j'ai plus de 18 ans »

Les propositions $(P) \Rightarrow (Q)$ et $(Q) \Rightarrow (P)$ sont-elles vraies ? Que peut-on conclure ?

Aller à : Correction exercice 5 :

Exercice 6 :

Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. $(2 < 3)$ et $(2$ divise $4)$
2. $(2 < 3)$ et $(2$ divise $5)$
3. $(2 < 3)$ ou $(2$ divise $5)$
4. $(2 < 3)$ et non$(2$ divise $5)$

5. $\text{non}(2 < 3)$ ou $(2 \text{ divise } 5)$

Aller à : Correction exercice 6 :

Exercice 7 :

Soient A et B deux parties de $\mathbb{N}$. Ecrire en utilisant $\forall, \exists$ les assertions

$$A = \emptyset, A \cap B \neq \emptyset, A \subset B, A \not\subset B$$

Aller à : Correction exercice 7 :

Exercice 8 :

On considère la proposition (P) suivante :

(P) « Pour tout nombre réel x, il existe au moins un entier naturel N supérieur ou égal à x »

1. Ecrire la proposition (P) avec des quantificateurs.
2. Ecrire la négation avec des quantificateurs puis l'énoncer en français.

Aller à : Correction exercice 8 :

Exercice 9 :

Notons E l'ensemble des étudiants, S l'ensemble des jours de la semaine et pour un étudiant x, $h_j(x)$ son heure de réveil le jour j.

a) Ecrire avec des symboles mathématiques la proposition « Tout étudiant se réveille au moins un jour de la semaine avant 8h »
b) Ecrire la négation de cette proposition avec des symboles mathématiques puis en français.

Aller à : Correction exercice 9 :

Exercice 10 :

Soit $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$ l'ensemble des nombres premiers et A une partie de $\mathbb{N}$. Ecrire en utilisant $\forall, \exists$ les assertions

A est une partie finie de $\mathbb{N}$, A est une partie infinie de $\mathbb{N}$.

Tout entier naturel $n \geq 2$ admet un diviseur premier, les éléments de A ont un diviseur premier commun, les éléments de A n'ont aucun diviseur premier commun.

Aller à : Correction exercice 10 :

Exercice 11 :

Soit n un entier naturel quelconque. Parmi les implications suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ? Donner leur contraposée et leur négation.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Rightarrow (n > 3)$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Rightarrow (n > 6)$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Rightarrow (n \leq 6)$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \Rightarrow (2 \text{ divise } n)$
5. $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \Rightarrow (n \text{ divise } 2)$
6. $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 2) \Rightarrow (n^2 = n)$

Aller à : Correction exercice 11 :

Exercice 12 :

Parmi les équivalences suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Leftrightarrow (n > 4)$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Leftrightarrow (n \geq 4)$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \big((n \geq 5) \text{ et } (n \text{ divise } 12)\big) \Leftrightarrow (n = 6)$

Aller à : Correction exercice 12 :

Exercice 13 :

Soient les 4 assertions suivantes :

a. $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ x + y > 0$
b. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ x + y > 0$
c. $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ x + y > 0$
d. $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ y^2 > x$

1. Les assertions a, b, c et d sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation

Aller à : Correction exercice 13 :

Exercice 14 :

Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres rationnels. Que signifie en mots les assertions suivantes

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists l \in \mathbb{Z}, q_n = l,$

$$\exists l \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}, q_n = l, \quad \forall l \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N}, q_n = l, \quad \forall q \in \mathbb{Q}_{>0}, \forall n \in \mathbb{N}, |q_n| < q$$

Attention : il ne s'agit pas de faire la lecture à voix haute de ces quatre suites de symboles mais de traduire l'énoncé en phrase courte dont la compréhension est immédiate.

Aller à : Correction exercice 14 :

Exercice 15 :

1. Donner la négation de la phrase mathématique suivante :
$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } p \geq 0 \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \epsilon$$
2. Donner la contraposée de la phrase mathématique suivante :
$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } p \geq 0 \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \epsilon$$

Aller à : Correction exercice 15 :

Exercice 16 :

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Donner la négation et la contraposée de cette phrase logique.

Allez à : Correction exercice 16 :

Exercice 17 :

Compléter, lorsque c'est possible, avec $\forall$ ou $\exists$ pour que les énoncés suivants soient vrais.

a) $\ldots x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
b) $\ldots x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 2 = 0$
c) $\ldots x \in \mathbb{R}, 2x + 1 = 0$
d) $\ldots x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 \neq 0$

Aller à : Correction exercice 17 :

Exercice 18 :

Les propositions suivantes sont-elles vraies ? Lorsqu'elles sont fausses, énoncer leur négation.

a) $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 > 7$
b) $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > 7$
c) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x^2$
d) $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, y > x^2$

Aller à : Correction exercice 18 :

Corrections

Correction exercice 1 :

1. Il s'agit, ici d'une implication. « Napoléon est chinois » est faux et « $3-2=2$ » est faux, or la seule possibilité pour qu'une implication soit fausse est qu'une assertion vraie implique une assertion fausse, donc l'assertion 1. est vraie.
2. Une phrase, en français, du genre « soit …, soit … » se traduit mathématiquement par « … ou … » « Cléopâtre était chinoise » est faux et « les grenouilles aboient » est faux donc l'assertion 2. est fausse.
3. « les roses sont des animaux » est faux et « les chiens ont 4 pattes » est vrai, donc l'assertion 3. est vraie.
4. « l'homme est un quadrupède » est faux et «il parle » est vrai, donc l'assertion 4. est vraie.
5. « les roses ne sont ni des animaux, ni des fleurs » peut se traduire par « les roses ne sont pas des animaux et les roses ne sont pas des fleurs ». « les roses ne sont pas des animaux » est vrai et « les roses ne sont pas des fleurs » est faux donc « les roses ne sont ni des animaux, ni des fleurs » est faux. Avec un minimum de bon sens c'est assez évident !
6. « Paris est en France » est vrai et « Madrid est en chine » est faux, donc « Paris est en France ou Madrid est en chine » est vrai.
7. « la pierre ponce est un homme » est faux et «les femmes sont des sardines » est faux, une équivalence entre deux assertion fausse est vraie.
8. « les poiriers ne donnent pas de melons » est vrai et «Cléopâtre n'est pas chinoise » est vrai, donc « les poiriers ne donnent pas de melons, et Cléopâtre n'est pas chinoise » est vrai.

Aller à : Exercice 1 :

Correction exercice 2 :

a)

$$\begin{aligned}\text{non}\Big((P)\ \text{et}\ \big(\text{non}(Q)\ \text{ou}\ (R)\big)\Big) &\equiv \Big(\text{non}(P)\ \text{ou}\ \text{non}\big(\text{non}(Q)\text{ou}\ (R)\big)\Big)\\ &\equiv \big(\text{non}(P)\ \text{ou}\ \big((Q)\ \text{et}\ \text{non}(R)\big)\\ &\equiv \big(\text{non}(P)\ \text{ou}\ (Q)\big)\ \text{et}\ \big(\text{non}(P)\ \text{ou}\ \text{non}(R)\big)\\ &\equiv \big(\text{non}(P)\ \text{ou}\ (Q)\big)\ \text{et}\ \text{non}\big((\text{P})\ \text{et}\ (R)\big)\end{aligned}$$

Les deux dernières équivalences logiques me paraissent acceptables, parce qu'il y a souvent différentes façon d'exprimer une négation, ensuite il faut voir dans les exercices comment se présentent les propositions (P), (Q) et (R).

b)

$$\text{non}\Big(\big((P)\ \text{et}\ (Q)\big)\Rightarrow (R)\Big)\equiv \big((P)\ \text{et}\ (Q)\big)\ \text{et}\ \text{non}(\text{R})\equiv (P)\ \text{et}\ (Q)\ \text{et}\ \text{non}(\text{R})$$

Aller à : Exercice 2 :

Correction exercice 3 :

$$\text{non}(A_1)\equiv \text{non}\big(A\ \text{et}\ \text{non}(B)\big)\equiv \text{non}(A)\ \text{ou}\ \text{non}\big(\text{non}(B)\big)\equiv \text{non}(A)\ \text{ou}\ B$$

$$\text{non}(A_2)\equiv \text{non}\big(A\ \text{ou}\ \text{non}(B)\big)\equiv \text{non}(A)\ \text{et}\ \text{non}\big(\text{non}(B)\big)\equiv \text{non}(A)\ \text{et}\ B$$

$$\begin{aligned}\text{non}(A_3)\equiv \text{non}\big(A\ \text{ou}\ (B\ \text{et}\ C)\big)\equiv \text{non}(A)\ \text{et}\ \text{non}(B\ \text{et}\ C)&\equiv \text{non}(A)\ \text{et}\ \big(\text{non}(B)\ \text{ou}\ \text{non}(C)\big)\\ &\equiv \big(\text{non}(A)\ \text{et}\ \text{non}(B)\big)\ \text{ou}\ \big(\text{non}(A)\ \text{et}\ \text{non}(C)\big)\end{aligned}$$

Il y a d'autres expressions possibles de cette négation.

$$\begin{aligned}\text{non}(A_4)\equiv \text{non}\big(A\ \text{et}\ (B\ \text{ou}\ C)\big)\equiv \text{non}(A)\ \text{ou}\ \text{non}(B\ \text{ou}\ C)&\equiv \text{non}(A)\ \text{ou}\ \big(\text{non}(B)\ \text{et}\ \text{non}(C)\big)\\ &\equiv \big(\text{non}(A)\ \text{ou}\ \text{non}(B)\big)\ \text{et}\ \big(\text{non}(A)\ \text{ou}\ \text{non}(C)\big)\end{aligned}$$

Il y a d'autres expressions possibles de cette négation.

$$\text{non}(A_5) \equiv \text{non}\big(A \Rightarrow \text{non}(B)\big) \equiv \text{non}\big(\text{non}(A) \text{ ou } \text{non}(B)\big) \equiv \text{A et } B$$

$$\text{non}(A_6) \equiv \text{non}(A \Rightarrow B) \equiv \text{non}\big(\text{non}(A) \text{ ou } (\text{B})\big) \equiv (A) \text{ et } \text{non}(B)$$

$$\text{non}(A_7) \equiv \text{non}\big((\text{non}(A \text{ ou } B) \Rightarrow C)\big) \equiv \text{non}\big(\text{non}\big(\text{non}(A \text{ ou } B)\big) \text{ ou } C\big) \equiv \text{non}\big((A \text{ ou } B) \text{ ou } C\big)$$
$$\equiv \text{non}(A \text{ ou } B) \text{ et } \text{non}(C) \equiv \text{non}(A) \text{ et } \text{non}(B) \text{ et } \text{non}(C)$$

$$\text{non}(A_8) = \text{non}\big((A \text{ et } B) \Rightarrow \text{non}(C)\big) \equiv \text{non}\Big(\text{non}(A \text{ et } B) \text{ et } \text{non}\big(\text{non}(C)\big)\Big)$$
$$\equiv \text{non}(\text{non}(A \text{ et } B) \text{ et C}) \equiv (A \text{ et } B) \text{ ou } \text{non}(C) = \big(A \text{ ou } \text{non}(C)\big) \text{ et } (B \text{ ou } \text{non}(C)$$

Aller à : Exercice 3 :

Correction exercice 4 :

1. Il existe une boule qui n'est pas rouge dans l'urne. (La négation de « pour tout » est « il existe » et la négation « rouge » est « n'est pas rouge »).
2. Tous les nombres entiers sont pairs. (La négation de « il existe » (dans l'énoncé « certains » signifie « il existe ») est « tous ». Dans cette question on ne se demande pas si la proposition est vraie ou fausse.
3. Il s'agit d'une implication, la négation de $(P) \Rightarrow (Q)$ est : (P) et $\text{non}(Q)$ donc la négation demandée est « un nombre entier est divisible par 4 et il ne se termine pas par 4 ». Dans cette question on ne se demande pas si l'implication est vraie ou fausse.
4. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) < 0$.
5. $\exists x \in \mathbb{R}, f(-x) \neq f(x)$

Aller à : Exercice 4 :

Correction exercice 5 :

$(P) \Rightarrow (Q)$ est vraie, par contre $(Q) \Rightarrow (P)$ est fausse, on en conclut que ces deux propositions ne sont pas équivalentes.

Aller à : Exercice 5 :

Correction exercice 6 :

1. $(2 < 3)$ est vrai et $(2 \text{ divise } 4)$ est vrai donc $(2 < 3)$ et $(2 \text{ divise } 4)$ est vrai.
2. $(2 < 3)$ est vrai et $(2 \text{ divise } 5)$ est faux, l'un des deux est faux donc $(2 < 3)$ et $(2 \text{ divise } 5)$ est faux.
3. $(2 < 3)$ est vrai et $(2 \text{ divise } 5)$ est faux, l'un des deux est vrai donc $(2 < 3)$ et $(2 \text{ divise } 5)$ est vrai.
4. $(2 < 3)$ est vrai et $\text{non}(2 \text{ divise } 5)$ est vrai, les deux sont vrais donc $(2 < 3)$ et $\text{non}(2 \text{ divise } 5)$ est vrai.
5. $(2 < 3)$ est vrai donc $\text{non}(2 < 3)$ est faux (on peut aussi dire que $\text{non}(2 < 3) \Leftrightarrow (2 \geq 3)$ qui est faux) et $(2 \text{ divise } 5)$ est faux par conséquent $\text{non}(2 < 3)$ ou $(2 \text{ divise } 5)$ est faux car les deux assertions sont fausses.

Aller à : Exercice 6 :

Correction exercice 7 :

$$\forall x \in \mathbb{N}, x \notin A, \qquad \exists x \in \mathbb{N}, x \in A, x \in B, \quad \forall x \in A, x \in B, \quad \exists x \in A, x \notin B$$

Aller à : Exercice 7 :

Correction exercice 8 :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, N \geq x$
2. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, N < x$. Il existe un réel tel que pour tout N entier, N est strictement inférieur à x.

Aller à : Exercice 8 :

Correction exercice 9 :

a) $\forall x \in E, \exists j \in S, h_j(x) < 8h$.

b) $\exists x \in E, \forall j \in S, h_j(x) \geq 8h$. Il y a un étudiant qui se lève à 8h ou après 8h tous les jours de la semaine. (Donc c'est un gros fainéant).

Aller à : Exercice 9 :

Correction exercice 10 :

$$\exists M \in \mathbb{N}, \forall n \in A, n < M, \qquad \forall M \in \mathbb{N}, \exists n \in A, n \geq M$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{P}, \exists k \in \mathbb{N}, n = kp, \qquad \exists p \in \mathbb{P}, \forall n \in A, \exists k \in \mathbb{N}, n = kp, \qquad \forall p \in \mathbb{P}, \exists n \in A, \forall k \in \mathbb{N}, n \neq kp$$

Aller à : Exercice 10 :

Correction exercice 11 :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Rightarrow (n > 3)$ est vraie.
   Sa contraposée est $\forall n \in \mathbb{N}, (n \leq 3) \Rightarrow (n < 5)$ ou encore $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 4) \Rightarrow (n \leq 4)$.
   (On rappelle que $\big((P) \Rightarrow (Q)\big) \equiv \big(\text{non}(P) \text{ ou } (Q)\big)$ donc la négation de $\big((P) \Rightarrow (Q)\big)$ est
   $$\text{non}\Big(\big(\text{non}(P) \text{ ou } (Q)\big)\Big) \equiv \Big(\text{non}\big(\text{non}(P)\big) \text{ et } \text{non}(Q)\Big) \equiv \big((P) \text{ et } \text{non}(Q)\big)$$
   $$\text{non}\big((n \geq 5) \Rightarrow (n > 3)\big) \equiv \big((n \geq 5) \text{ et } (n \leq 3)\big) \equiv \big((n > 4) \text{ et } (n < 4)\big)$$
   La négation est : $\exists n \in \mathbb{N}, (n \geq 5)$ et $(n \leq 3)$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Rightarrow (n > 6)$ est faux car pour $n = 5$, $(n \geq 5)$ est vrai et $(n > 6)$ est faux (idem pour $n = 6$).
   Sa contraposée est $\forall n \in \mathbb{N}, (n \leq 6) \Rightarrow (n < 5) \equiv (n < 7) \Rightarrow (n < 5)$.
   Sa négation est $\big(\exists n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \text{ et } (n \leq 6)\big) \equiv \big(\exists n \in \mathbb{N}, (n > 4) \text{ et } (n < 7)\big)$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Rightarrow (n \leq 6)$ est faux car pour $n = 7$, $(n \geq 5)$ est vrai et $(n \leq 6)$ est faux.
   Sa contraposée est $\forall n \in \mathbb{N}, (n \leq 6) \Rightarrow (n < 5) \equiv (n < 7) \Rightarrow (n < 5)$.
   Sa négation est
   $$\big(\exists n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \text{ et } (n > 6)\big) \equiv \big(\exists n \in \mathbb{N}, (n > 4) \text{ et } (n > 7)\big) \equiv \exists n \in \mathbb{N}, (n > 7)$$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \equiv (n = 0)$ si $(n < 1)$ est vrai alors $n = 0$ et comme $0 = 0 \times 2$, cela signifie que 2 divise 0, par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ divise } 2)$ est vrai.
   Il n'y a que cela à vérifier parce que si $n < 1$ est faux, quoiqu'il arrive à la conclusion, l'implication est vraie.
   On aura pu aussi voir que :
   $$(n \text{ divise } 2) \equiv (\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k) \equiv (n \text{ est pair})$$
   Sa contraposée est $\big(\forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ ne divise pas } 2) \Rightarrow (n \geq 1)\big) \equiv \forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ est impair}) \Rightarrow (n \geq 1)$.
   Vu ainsi il est clair que la contraposée est vraie et que donc $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \Rightarrow (n \text{ divise } 2)$ est vrai.
   La négation est : $\exists\, n \in \mathbb{N}, (n < 1)$ et $(n \text{ ne divise pas } 2)$
5. Comme dans le 4. $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \equiv (n = 0)$ mais 0 ne divise pas 2, sinon cela signifierait qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $2 = k \times 0$ ce qui est faux par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \Rightarrow (n \text{ divise } 2)$ est faux. En effet une assertion vraie ne peut pas impliquer une assertion fausse.
   La contraposée est $\forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ ne divise pas } 2) \Rightarrow (n \geq 1)$.
   La négation est $\big(\exists n \in \mathbb{N}, (n < 1) \text{ et } (n \text{ ne divise pas } 2)\big)$. Vérifions que cette implication est vraie : soit $n = 0$ et $(n < 1)$ est vrai et $(0 \text{ ne divise pas } 2)$ est vrai ce qui entraine que $\big(\exists n \in \mathbb{N}, (n < 1) \text{ et } (n \text{ ne divise pas } 2)\big)$ est vrai.
6. $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 2) \equiv (n \in \{0,1\})$, si $n = 0$ alors $n^2 = 0^2 = 0 = n$ et si $n = 1$ alors $n^2 = 1^2 = 1 = n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 2) \Rightarrow (n^2 = n)$.
   La contraposée est $\forall n \in \mathbb{N}, (n^2 \neq n) \Rightarrow (n \geq 2)$

Sa négation est $\exists n \in \mathbb{N}, (n < 2)$ et $(n^2 \neq n)$.
Aller à : Exercice 11 :

Correction exercice 12 :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Leftrightarrow (n > 4)$ car un entier strictement supérieur à 4 est supérieur ou égal à 5.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \Leftrightarrow (n \geq 4)$ est faux car pour $n = 4$, $(n \geq 4)$ est vrai et $(n \geq 5)$ est faux.
3. Les diviseurs entiers et positifs de 12 sont $\{1,2,3,4,6,12\}$ donc les diviseurs entiers et supérieurs ou égaux à 5 sont 6 et 12, bref, il suffit de dire que 12 rend vrai $\big((n \geq 5)$ et $(n$ divise $12)\big)$ et faux $(n = 6)$ pour pouvoir affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}, \big((n \geq 5)$ et $(n$ divise $12)\big) \Leftrightarrow (n = 6)$ est faux.

Aller à : Exercice 12 :

Correction exercice 13 :

1. a. est faux car si un tel x existe, il suffit de prendre $y = -x - 1$ pour que $x + y > 0$ soit faux, en effet $x + (-x - 1) = -1 < 0$
   b. est vrai, car pour un x fixé, on choisit $y = -x + 1$ de façon à ce que $x + (-x + 1) = 1 > 0$.
   c. est faux car si on prend $x = y = -1$ alors $x + y = -2$ est faux et donc on n'a pas $x + y > 0$
   d. Il suffit de prendre $x = -1$, ainsi pour tout $y \in \mathbb{R}$, $y^2 > -1$, l'assertion est vraie.
2. a. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists\ y \in \mathbb{R}\ x + y \leq 0$
   (on pourra montrer, à titre d'exercice que cette assertion quantifiée est vraie).
   b. $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ x + y \leq 0$
   (on pourra montrer, à titre d'exercice que cette assertion quantifiée est fausse).
   c. $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ x + y \leq 0$
   (on pourra montrer, à titre d'exercice que cette assertion quantifiée est vraie).
   d. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ y^2 \leq x$

Aller à : Exercice 13 :

Correction exercice 14 :

La suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers.
La suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante dont la valeur est entière.
La suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend toutes les valeurs entières.
La suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et vaut 0.
Aller à : Exercice 14 :

Correction exercice 15 :

1.
$$\exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } p \geq 0 \text{ et } |u_{n+p} - u_n| \geq \epsilon$$
2.
$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, |u_{n+p} - u_n| \geq \epsilon \Rightarrow n < N \text{ ou } p < 0$$

Aller à : Exercice 15 :

Correction exercice 16 :

La négation est :
$$\exists \epsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in \mathbb{R}, \quad |x - x_0| < \alpha \quad \text{et} \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$$
La contraposée est
$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \alpha, \qquad |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon \Rightarrow |x - x_0| \geq \alpha$$
Allez à : Exercice 16 :

Correction exercice 17 :

a) $\forall x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 2 = 0$
c) $\exists x \in \mathbb{R}, 2x + 1 = 0$
d) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 \neq 0$ ou $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 \neq 0$

Aller à : Exercice 17 :

Correction exercice 18 :

a) Vraie
b) Fausse par exemple pour $x = 1$, la négation est : $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 \leq 7$
c) Vraie
d) Fausse car la négation est manifestement vraie, la négation est : $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y \geq x^2$.

Aller à : Exercice 18 :

Exercice 1 :

Soient $A = \{1,2,3\}$ et $B = \{0,1,2,3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \times B$.

Allez à : Correction exercice 1 :

Exercice 2 :

Soient $A = [1,3]$ et $B = [2,4]$. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.

Allez à : Correction exercice 2 :

Exercice 3 :

1. Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des parties suivantes :
$$A_1 =]-\infty, 0];\ A_2 =]-\infty, 0[;\ A_3 =]0, +\infty[;\ \ A_4 = [0, +\infty[; A_5 =]1,2[; A_6 = [1,2[.$$
2. Soient $A =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$, $B =]-\infty, 1[$ et $C = [2, +\infty[$. Comparer les ensembles suivants :
$$C_{\mathbb{R}}A \qquad et \qquad C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C$$

Allez à : Correction exercice 3 :

Exercice 4 :

Soient $A =]-\infty, 3]$, $B =]-2,7]$ et $C =]-5, +\infty[$ trois parties de $\mathbb{R}$.

Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $\mathbb{R} \setminus A$, $A \setminus B$, $(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B)$, $(\mathbb{R} \setminus (A \cup B)$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cap (B \cup C)$.

Allez à : Correction exercice 4 :

Exercice 5 :

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que :

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Allez à : Correction exercice 5 :

Exercice 6 :

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. On suppose que :
$$A \cap B \neq \emptyset; A \cup B \neq E; A \not\subseteq B; B \not\subseteq A$$
On pose
$$A_1 = A \cap B; A_2 = A \cap C_E B; A_3 = B \cap C_E A; A_4 = C_E(A \cup B)$$

1. Montrer que A_1, A_2, A_3 et A_4 sont non vides.
2. Montrer que A_1, A_2, A_3 et A_4 sont deux à deux disjoints.
3. Montrer que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = E$.

Allez à : Correction exercice 6 :

Exercice 7 :

1. Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des parties suivantes :
$$A_1 =]-\infty, 0];\ A_2 =]-\infty, 0[;\ A_3 =]0, +\infty[;\ \ A_4 = [0, +\infty[; A_5 =]1,2[; A_6 = [1,2[.$$
2. Soient $A =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$, $B =]-\infty, 1[$ et $C = [2, +\infty[$. Comparer les ensembles suivants :
$$C_{\mathbb{R}}A \qquad \text{et} \qquad C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C$$

Allez à : Correction exercice 7 :

Exercice 8 :

Justifier les énoncés suivants.

a) Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. Si A est inclus dans B, alors le complémentaire de B dans E est inclus dans le complémentaire de A dans E.

b) Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. Si A et B sont disjoints, alors tout élément de E est soit dans C_E^A soit dans C_E^B.

c) Soient E un ensemble, A un sous-ensemble de E. Déterminer les ensembles suivants : $C_E(C_E A)$; $A \cap C_E A$; $A \cup C_E A$; $C_E \emptyset$; $C_E E$

Allez à : Correction exercice 8 :

Exercice 9 :

1. Montrer que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
2. Montrer que $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

Allez à : Correction exercice 9 :

Exercice 10 :

On rappelle que l'on note

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

1. Montrer que

$$(A \cap B) \cap \left(\overline{A \cap C}\right) = A \cap B \cap \overline{C}$$
$$(A \cap C) \cap \left(\overline{A \cap B}\right) = A \cap C \cap \overline{B}$$

2. En déduire que

$$(A \cap B)\Delta(A \cap C) = A \cap (B\Delta C)$$

Allez à : Correction exercice 10 :

Exercice 11 :

On rappelle que pour toutes parties U et V d'un ensemble E, on note

$$U\Delta V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$$

1. Montrer que pour toutes parties A, B et C d'un ensemble E.

$$(A \cup B) \cap \left(\overline{A \cup C}\right) = \overline{A} \cap B \cap \overline{C}$$
$$(A \cup C) \cap \left(\overline{A \cup B}\right) = \overline{A} \cap C \cap \overline{B}$$

2. En déduire que

$$(A \cup B)\Delta(A \cup C) = \overline{A} \cap (B\Delta C)$$

Allez à : Correction exercice 11 :

Exercice 12 :

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.

1. Que pensez-vous de l'implication

$$A \cup B \not\subseteq C \Rightarrow (A \not\subseteq C \text{ ou } B \not\subseteq C) \ ?$$

Justifiez (on pourra utiliser la contraposée).

2. On suppose que l'on a les inclusions suivantes : $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer que $B \subset C$.
3.

Allez à : Correction exercice 12 :

Exercice 13 :

Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Démontrer les égalités suivantes :

1. $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$

2. $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$
   Si $A \subset B$, montrer $C_E B \subset C_E A$

Allez à : Correction exercice 13 :

Exercice 14 :

Soit E un ensemble et F et G deux parties de E. Démontrer que :

1. $F \subset G \Leftrightarrow F \cup G = G$
2. $F \subset G \Leftrightarrow F \cap C_E G = \emptyset$

Allez à : Correction exercice 14 :

Exercice 15 :

Soit E un ensemble et soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Pour A et B dans $\mathcal{P}(E)$, on appelle différence symétrique de A par B l'ensemble, noté $A\Delta B$ défini par :

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

1. Montrer que $A\Delta B = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$ et $A\Delta E$.
3. Montrer que pour tous A, B et C dans $\mathcal{P}(E)$, on a :
   a) Montrer que : $\overline{\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)} = \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup (B \cap A)$
   b) Montrer que : $(A\Delta B)\Delta C = \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(B \cap \overline{A} \cap \overline{C}\right) \cup \left(C \cap \overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup (C \cap B \cap A)$
   c) Montrer que $A\Delta(B\Delta C) = (C\Delta B)\Delta A$
   d) A l'aide du b), montrer que $(A\Delta B)\Delta C = (C\Delta B)\Delta A$,
   e) En déduire que : $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$

Allez à : Correction exercice 15 :

Exercice 16 :

Soit $f: I \to J$ définie par $f(x) = x^2$

1. Donner des ensembles I et J tels que f soit injective mais pas surjective.
2. Donner des ensembles I et J tels que f soit surjective mais pas injective.
3. Donner des ensembles I et J tels que f soit ni injective ni surjective.
4. Donner des ensembles I et J tels que f soit injective et surjective.

Allez à : Correction exercice 16 :

Exercice 17 :

Dire (en justifiant) pour chacune des applications suivantes si elles sont injectives, surjectives, bijectives :

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 \qquad f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ x \mapsto x^2 \qquad f: [0,1] \to [0,2],\ x \mapsto x^2$$

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + x^3 \qquad h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + x^3 \qquad k: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + x^4$$

Allez à : Correction exercice 17 :

Exercice 18 :

Soit $f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ par $f(n,m) = mn$

Soit $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $g(n) = (n,(n+1)^2)$

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. g est-elle injective ?
4. g est-elle surjective ?

Allez à : Correction exercice 18 :

Exercice 19 :

Soient

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \qquad\qquad g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$$
$$n\mapsto 2n \qquad\qquad n\mapsto E\left(\frac{n}{2}\right)$$

Où $E(x)$ désigne la partie entière de x

Les fonctions sont-elles injectives, surjective ? Comparer $f\circ g$ et $g\circ f$.

Allez à : Correction exercice 19 :

Exercice 20 :

Soit f une application de E vers E telle que :

$$f\big(f(E)\big)=E$$

Montrer que f est surjective.

Allez à : Correction exercice 20 :

Exercice 21 :

On considère l'application $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $f(n)=n^2$

1. Existe-t-il $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que :$f\circ g=Id_{\mathbb{N}}$?
2. Existe-t-il $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que :$h\circ f=Id_{\mathbb{N}}$?

Allez à : Correction exercice 21 :

Exercice 22 :

Soit $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ définie par $f(n)=2n$

1. Existe-t-il une fonction $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ telle que $f\circ g=Id_{\mathbb{Z}}$?
2. Existe-t-il une fonction $h:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ telle que $h\circ f=Id_{\mathbb{Z}}$?

Allez à : Correction exercice 22 :

Exercice 23 :

Soit $f:E\to F$ une application, où $Card(E)=Card(F)$

Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes

(i) f est injective

(ii) f est surjective

(iii) f est bijective

Allez à : Correction exercice 23 :

Exercice 24 :

Répondre aux questions qui suivent, en justifiant, le cas échéant, votre réponse par un bref argument, un calcul ou un contre-exemple.

1. Si les applications $u:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ et $v:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ sont bijectives, alors l'application $u\circ v\circ u:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ est aussi bijective. Vrai ou Faux, justifier.
2. L'application $f:\mathbb{N}^3\to\mathbb{N}:(a,b,c)\mapsto 2^a3^b5^c$ est une application (i) bijective (ii) injective et pas surjective (iii) surjective et pas injective (iv) ni surjective ni injective

Justifier.

3. Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. L'application $\varphi:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ qui à l'entier $l\in\mathbb{Z}$ associe le reste de la division euclidienne de l par n est une application.
4. bijective (ii) injective et pas surjective (iii) surjective et pas injective (iv) ni surjective ni injective

Justifier.

5. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $ad - bc = 1$. Déterminer l'application réciproque de la bijection

$$f: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$$
$$(u, v) \mapsto (au + bv + 1, cu + dv - 1)$$

Allez à : Correction exercice 24 :

Exercice 25 :

Soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective $f: E \to \mathcal{P}(E)$. Considérer la partie $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$.

Allez à : Correction exercice 25 :

Exercice 26 :

Pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on désigne par I_n l'ensemble $\{1,2, \dots, n\}$.

1. On suppose $n \geq 2$. Combien y-a-t-il d'application injectives $f: I_2 \to I_n$?
2. A quelle condition portant sur les entiers m et n peut-on définir une application $f: I_m \to I_n$ qui soit injective, surjective, bijective ?

Allez à : Correction exercice 26 :

Exercice 27 :

Soient E, F et G trois ensemble et soient $f: E \to F$ et $g: F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
3. Que peut-on conclure sur $g \circ f$ si f et g sont bijectives ?
4. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
5. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
6. Si à présent $f: E \to F$ et $g: F \to E$, déduire de ce qui précède ce que l'on peut dire dans les cas suivants :
   a. $g \circ f = Id_E$
   b. $f \circ g = Id_F$
   c. $f \circ f = Id_E$

Allez à : Correction exercice 27 :

Exercice 28 :

Soient X et Y deux ensembles non vides et f une application de X dans Y. Une application s, de Y dans X, telle que $f \circ s = Id_Y$ s'appelle une section de f.

1. Montrer que si f admet au moins une section alors f est surjective.
2. Montrer que toute section de f est injective.

Une application r, de Y dans X, telle que $r \circ f = Id_X$ s'appelle une rétraction de f.

3. Montrer que si f possède une rétraction alors f est injective.
4. Montrer que si f est injective alors f possède une rétraction.
5. Montrer que toute rétraction de f est surjective.
6. En déduire que si f possède à la fois une section s et une rétraction r, alors f est bijective et l'on a : $r = s (= f^{-1}$ par conséquent).

Allez à : Correction exercice 28 :

Exercice 29 :

Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F. Soient A et B deux parties de E, montrer que :

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Donner un exemple où cette dernière inclusion est stricte. Montrer alors que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E et pour toute partie B de E, on a $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

Allez à : Correction exercice 29 :

Exercice 30 :

1. Soit f l'application de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ dans lui-même définie par :
$$f(1)=4,\quad f(2)=1\quad ,f(3)=2,\quad f(4)=2.$$
Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A=\{2\}$, $A=\{1,2\}$, $A=\{3\}$.
2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2$. Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A=\{1\}$, $A=[1,2]$.

Allez à : Correction exercice 30 :

Exercice 31 :

1. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x$. Déterminer $f([0,1]\times[0,1])$, $f^{-1}([-1,1])$.
2. Soit $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$ définie par $f(x)=\cos(\pi x)$, déterminer $f(\mathbb{N})$, $f(2\mathbb{N})$, $f^{-1}(\{\pm 1\})$.

Allez à : Correction exercice 31 :

Exercice 32 :

Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F. Soient A' et B' deux parties quelconques de F, non vides. Montrer que :

1. $f^{-1}(A'\cup B')=f^{-1}(A')\cup f^{-1}(B')$
2. $f^{-1}(A'\cap B')=f^{-1}(A')\cap f^{-1}(B')$

Allez à : Correction exercice 32 :

Exercice 33 :

Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F .

1. Montrer que pour toute partie A de E, on a $A\subset f^{-1}\big(f(A)\big)$.
2. Montrer que pour toute partie B de F, on a $f\big(f^{-1}(B)\big)\subset B$.
3. Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E on a $A=f^{-1}\big(f(A)\big)$.
4. Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F on a $f\big(f^{-1}(B)\big)=B$.

Allez à : Correction exercice 33 :

Exercice 34 :

Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,-y\leq x\leq y\}$

Soit $f:D\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=(x^2+y^2,2xy)$

1. Représenter D dans le plan.
2. a. Montrer que si deux couples de réels (x_1,y_1) et (x_2,y_2) vérifient
$$\begin{cases}x_1+y_1=x_2+y_2\\x_1-y_1=x_2-y_2\end{cases}$$
Alors $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$ (autrement dit $x_1=x_2$ et $y_1=y_2$).

   b. Montrer que f est injective, on pourra se ramener au système du 2.a..
3. Est-ce que f est surjective ?

Allez à : Correction exercice 34 :

CORRECTIONS

Correction exercice 1 :

$$A \cap B = \{1,2,3\}\,; \qquad A \cup B = \{0,1,2,3\}$$

Remarque :

Comme $A \subset B$ on a $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$

$$A \times B = \{(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,0),(2,1),(2,2),(2,3),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3)$$

Remarque :

$$\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(B) = 3 \times 4 = 12$$

Allez à : Exercice 1 :

Correction exercice 2 :

$$A \cap B = [2,3]\,; \quad A \cup B = [1,4]$$

Allez à : Exercice 2 :

Correction exercice 3 :

1.

$$C_{\mathbb{R}}A_1 =]0,+\infty[\,; \ C_{\mathbb{R}}A_2 = [0,+\infty[\,; \ C_{\mathbb{R}}A_3 =]-\infty,0]\,; \quad C_{\mathbb{R}}A_4 =]-\infty,0[;$$
$$C_{\mathbb{R}}A_5 =]-\infty,1] \cup [2,+\infty[; \ C_{\mathbb{R}}A_6 =]-\infty,1[\cup [2,+\infty[$$

2.

$$C_{\mathbb{R}}A = [1,2]; \quad C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C = [1,+\infty[\cap]2,+\infty[= [1,2]$$

Remarque :

$$C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C = C_{\mathbb{R}}(B \cup C) = C_{\mathbb{R}}A$$

Allez à : Exercice 3 :

Correction exercice 4 :

$$A \cap B =]-2,3]$$
$$A \cup B =]-\infty,7]$$
$$B \cap C =]-2,7]$$
$$B \cup C =]-5,+\infty[$$
$$\mathbb{R} \setminus A =]3,+\infty[$$
$$A \setminus B =]-\infty,-2]$$
$$(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B) =]3,+\infty[\cap (]-\infty,-2] \cup]7,+\infty[) = (]3,+\infty[\cap]-\infty,-2]) \cup (]3,+\infty[\cap]7,+\infty[)$$
$$= \emptyset \cup]7,+\infty[=]7,+\infty[$$

Ou mieux

$$(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B) = \mathbb{R} \setminus (A \cup B) =]7,+\infty[$$
$$(\mathbb{R} \setminus (A \cup B) =]7,+\infty[$$
$$(A \cap B) \cup (A \cap C) =]-2,3] \cup]-5,3] =]-5,3]$$

Ou

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C) =]-\infty,3] \cap]-5,+\infty[=]-5,3]$$
$$A \cap (B \cup C) =]-\infty,3] \cap]-5,+\infty[=]-5,3]$$

Allez à : Exercice 4 :

Correction exercice 5 :

Il s'agit de résultats du cours que l'on peut utiliser sans démonstration mais cet exercice demande de les redémontrer.

1. Si $x \in A \cup (B \cap C)$

   Alors $\big(x \in A \text{ ou } x \in (B \cap C)\big)$

   Alors $\big(x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C)\big)$

Si $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$, par conséquent $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Si $(x \in B \text{ et } x \in C)$ alors $(x \in A \cup B \text{ et } x \in A \cup C)$
Donc si $\big(x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C)\big)$ alors $(x \in A \cup B \text{ et } x \in A \cup C)$
On a montré que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Si $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ alors $(x \in A \cup B \text{ et } x \in A \cup C)$.

$$(x \in A \cup B \text{ et } x \in A \cup C) \Leftrightarrow \big((x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C)\big)$$

Si $\big(x \in A \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C)\big)$ alors $x \in A \cap A$ ou $x \in A \cap C$
Si $\big(x \in B \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C)\big)$ alors $x \in B \cap A$ ou $x \in B \cap C$
Alors $x \in A$ ou $x \in A \cap C$ ou $x \in B \cap A$ ou $x \in B \cap C$
Alors $x \in A$ ou $x \in A \cap C \subset A$ ou $x \in B \cap A \subset A$ ou $x \in B \cap C$
Alors $x \in A$ ou $x \in B \cap C$
Alors $x \in A \cup (B \cap C)$
On a montré que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$
Finalement $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2. Si $x \in A \cap (B \cup C)$
Alors $(x \in A \text{ et } x \in B \cup C)$
Alors $\big(x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C)\big)$
Alors $(x \in A \text{ et } x \in B)$ ou $(x \in A \text{ et } x \in C)$
Alors $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$
Alors $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
On a montré que $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Si $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Alors $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$
Alors $(x \in A \text{ et } x \in B)$ ou $(x \in A \text{ et } x \in C)$
Alors $(x \in A \text{ ou } x \in A)$ et $(x \in A \text{ ou } x \in C)$ et $(x \in B \text{ ou } x \in A)$ et $(x \in B \text{ ou } x \in C)$
Alors $x \in A$ et $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup A$ et $x \in B \cup C$
Comme $x \in A$ et $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup A$ entraine que $x \in A$

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in A \text{ et } x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$$

On a montré que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$
Et finalement $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Allez à : Exercice 5 :

Correction exercice 6 :

1.

$$A_1 = A \cap B \neq \emptyset$$

D'après l'énoncé

$$A_2 = A \cap C_E B = A \setminus B \neq \emptyset$$

Car $A \not\subset B$.

$$A_3 = B \cap C_E A = B \setminus A \neq \emptyset$$

Car $B \not\subset A$

$$A_4 = C_E(A \cup B) = E \setminus (A \cup B) \neq \emptyset$$

Car $A \cup B \neq E$, en fait $A \cup B \not\subset E$ car $A \subset E$ et $B \subset E$.

2.

$$A_1 \cap A_2 = (A \cap B) \cap (A \cap C_E B) = A \cap B \cap A \cap C_E B = (A \cap A) \cap (B \cap C_E B) = A \cap \emptyset = \emptyset$$
$$A_1 \cap A_3 = (A \cap B) \cap (B \cap C_E A) = A \cap B \cap B \cap C_E A = (B \cap B) \cap (A \cap C_E A) = B \cap \emptyset = \emptyset$$
$$A_1 \cap A_4 = (A \cap B) \cap \big(C_E(A \cup B)\big) = (A \cap B) \cap (C_E A \cap C_E B) = A \cap B \cap C_E A \cap C_E B$$
$$= (A \cap C_E A) \cap (B \cap C_E B) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

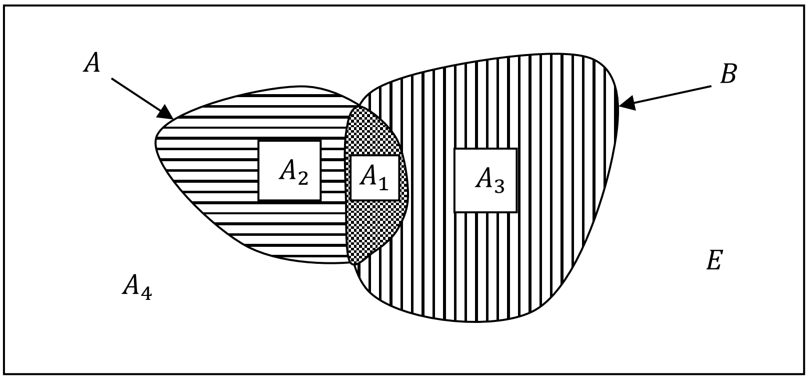
$$A_2 \cap A_3 = (A \cap C_E B) \cap (B \cap C_E A) = A \cap C_E B \cap B \cap C_E A = (A \cap C_E A) \cap (B \cap C_E B) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$
$$A_2 \cap A_4 = (A \cap C_E B) \cap C_E(A \cup B) = (A \cap C_E B) \cap (C_E A \cap C_E B) = A \cap C_E B \cap C_E A \cap C_E B$$
$$= (A \cap C_E A) \cap (C_E B \cap C_E B) = \emptyset \cap C_E B = \emptyset$$
$$A_3 \cap A_4 = (B \cap C_E A) \cap C_E(A \cup B) = (B \cap C_E A) \cap (C_E A \cap C_E B) = B \cap C_E A \cap C_E A \cap C_E B$$
$$= (B \cap C_E B) \cap (C_E A \cap C_E A) = \emptyset \cap C_E A = \emptyset$$

3. A_1, A_2, A_3 et A_4 sont deux à deux disjoints.

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cap A_4 = (A \cap B) \cup (A \cap C_E B) \cup (B \cap C_E A) \cup C_E(A \cup B)$$
$$= (A \cap B) \cup (A \cap C_E B) \cup (B \cap C_E A) \cup (C_E A \cap C_E B)$$
$$= [(A \cap B) \cup (A \cap C_E B)] \cup [(B \cap C_E A) \cup (C_E A \cap C_E B)]$$
$$= [(A \cup A) \cap (A \cup C_E B) \cap (B \cup A) \cap (B \cup C_E B)]$$
$$\cup [(B \cup C_E A) \cap (B \cup C_E B) \cap (C_E A \cup C_E A) \cap (C_E A \cup C_E B)]$$
$$= [A \cap (A \cup C_E B) \cap (A \cup B) \cap E] \cup [(B \cup C_E A) \cap E \cap C_E A \cap (C_E A \cup C_E B)]$$
$$= [A \cap \{(A \cup C_E B) \cap (A \cup B)\}] \cup [C_E A \cap \{(B \cup C_E A) \cap (C_E A \cup C_E B)\}]$$
$$= [A \cap \{A \cup (C_E B \cap B)\}] \cup [C_E A \cap \{C_E A \cup (B \cap C_E B\}]$$
$$= [A \cap \{A \cup \emptyset\}] \cup [C_E A \cap \{C_E A \cup \emptyset\}] = [A \cap A] \cup [C_E A \cap C_E A] = A \cup C_E A = E$$

Remarque :

(A_1, A_2, A_3, A_4) est une partition de E.



Sur un schéma c'est une évidence (E est le carré sur le schéma).

Allez à : Exercice 6 :

Correction exercice 7 :

1.

$$C_{\mathbb{R}} A_1 =]0, +\infty[\ ;\ \ C_{\mathbb{R}} A_2 = [0, +\infty[\ ;\ \ C_{\mathbb{R}} A_3 =]-\infty, 0]\ ;\ \ C_{\mathbb{R}} A_4 =]-\infty, 0[;$$
$$C_{\mathbb{R}} A_5 =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[;\ C_{\mathbb{R}} A_6 =]-\infty, 1[\cup [2, +\infty[$$

2.

$$C_{\mathbb{R}} A = [1,2];\quad C_{\mathbb{R}} B \cap C_{\mathbb{R}} C = [1, +\infty[\cap]2, +\infty[= [1,2]$$

Remarque :

$$C_{\mathbb{R}} B \cap C_{\mathbb{R}} C = C_{\mathbb{R}}(B \cup C) = C_{\mathbb{R}} A$$

Allez à : Exercice 7 :

Correction exercice 8 :

a) Soit $x \in \overline{B} = \complement_E^B$, $x \notin B$, comme $A \subset B$, $x \notin A$, autrement dit $x \in \overline{A} = \complement_E^A$ ce qui montre que si $x \in \overline{B}$ alors $x \in \overline{A}$.

b) Si $x \in A$ alors $x \notin B$ (car $A \cap B = \emptyset$) donc $x \in \overline{B} = \complement_E^B$.

Si $x \notin A$ alors $x \in \overline{A} = \complement_E^A$

c) $C_E(C_E A) = A$, $A \cap C_E A = \emptyset$, $A \cup C_E A = E$, $C_E \emptyset = E$ et $C_E E = \emptyset$

Allez à : Exercice 8 :

Correction exercice 9 :

1. $(A \setminus B) \setminus C = \left(A \cap \overline{B}\right) \setminus C = \left(A \cap \overline{B}\right) \cap \overline{C} = A \cap \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right) = A \cap \left(\overline{B \cup C}\right) = A \setminus (B \cup C)$
2. $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = \left(A \cap \overline{B}\right) \cap \left(C \cap \overline{D}\right) = (A \cap C) \cap \left(\overline{B} \cap \overline{D}\right) = (A \cap C) \cap \left(\overline{B \cup D}\right) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

Allez à : Exercice 9 :

Correction exercice 10 :

1.
$$(A \cap B) \cap \left(\overline{A \cap C}\right) = (A \cap B) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{C}\right) = \left(A \cap B \cap \overline{A}\right) \cup \left(A \cap B \cap \overline{C}\right) = \emptyset \cup \left(A \cap B \cap \overline{C}\right) = A \cap B \cap \overline{C}$$
Pour la seconde il suffit d'intervertir B et C.
2.
$$\begin{aligned}(A \cap B)\Delta(A \cap C) &= \left((A \cap B) \setminus (A \cap C)\right) \cup \left((A \cap C) \setminus (A \cap B)\right) \\ &= \left((A \cap B) \cap \left(\overline{A \cap C}\right)\right) \cup \left((A \cap C) \cap \left(\overline{A \cap B}\right)\right) = \left(A \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(A \cap C \cap \overline{B}\right) \\ &= A \cap \left(\left(B \cap \overline{C}\right) \cup \left(C \cap \overline{B}\right)\right) = A \cap \left((B \setminus C) \cup (C \setminus B)\right) = A \cap (B\Delta C)\end{aligned}$$

Allez à : Exercice 10 :

Correction exercice 11 :

1.
$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap \left(\overline{A \cup C}\right) &= (A \cup B) \cap \left(\overline{A} \cap \overline{C}\right) = \left(A \cap \left(\overline{A} \cap \overline{C}\right)\right) \cup \left(B \cap \left(\overline{A} \cap \overline{C}\right)\right) \\ &= \left(A \cap \overline{A} \cap \overline{C}\right) \cup \left(B \cap \overline{A} \cap \overline{C}\right) = \emptyset \cup \left(B \cap \overline{A} \cap \overline{C}\right) = B \cap \overline{A} \cap \overline{C} = \overline{A} \cap B \cap \overline{C}\end{aligned}$$
Pour la seconde égalité il suffit d'intervertir les rôles de B et C.
2.
$$\begin{aligned}(A \cup B)\Delta(A \cup C) &= (A \cup B) \setminus (A \cup C) \cup (A \cup C) \setminus (A \cup B) = \left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap C \cap \overline{B}\right) \\ &= \overline{A} \cap \left(\left(B \cap \overline{C}\right) \cup \left(C \cap \overline{B}\right)\right) = \overline{A} \cap (B \setminus C \cup C \setminus B) = \overline{A} \cap (B\Delta C)\end{aligned}$$

Allez à : Exercice 11 :

Correction exercice 12 :

1. La contraposée de cette implication est :
$$(A \subset C \quad \text{et} \quad B \subset C) \Rightarrow A \cup B \subset C$$
Cette implication est vraie.
2. Prenons $x \in B$.
Alors $x \in A \cup B$, alors $x \in A \cup C$ d'après l'hypothèse.
Si $x \in C$ c'est fini. Si $x \in A \setminus C$ alors $x \in A \cap B$ (puisque l'on a pris $x \in B$), d'après l'hypothèse $x \in A \cap C$ ce qui entraine que $x \in C$.
On a bien montré que $B \subset C$.

Allez à : Exercice 12 :

Correction exercice 13 :

Il s'agit de résultats du cours, on peut les utiliser sans démonstration mais c'est l'objet de cet exercice.

1. Soit $x \in C_E(A \cap B)$, $x \notin A \cap B$ et donc $x \notin A$ ou $x \notin B$, ce qui signifie que $x \in C_E A \cup C_E B$
Cela montre que $C_E(A \cap B) \subset C_E A \cup C_E B$.
Soit $x \in C_E A \cup C_E B$, $x \notin A$ ou $x \notin B$ donc $x \notin A \cap B$ ce qui entraine que $x \in C_E(A \cap B)$.
Cela montre que $C_E A \cup C_E B \subset C_E(A \cap B)$.
Et finalement

$$C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$$

Remarque :

On aurait raisonner par équivalence.

2. Soit $x \in C_E(A \cup B)$, $x \notin A \cup B$ et donc $x \notin A$ et $x \notin B$, ce qui signifie que $x \in C_E A \cap C_E B$
   Cela montre que $C_E(A \cup B) \subset C_E A \cap C_E B$.
   Soit $x \in C_E A \cap C_E B$, $x \notin A$ et $x \notin B$ donc $x \notin A \cup B$ ce qui entraine que $x \in C_E(A \cup B)$.
   Cela montre que $C_E A \cap C_E B \subset C_E(A \cup B)$.
   Et finalement
$$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$$

Remarque :

On aurait pu raisonner par équivalence.

Allez à : Exercice 13 :

Correction exercice 14 :

Il s'agit de résultats du cours, on peut les utiliser sans démonstration mais c'est l'objet de cet exercice.

1. Supposons que $F \subset G$.
   Si $x \in F \cup G$ alors $x \in F \subset G$ ou $x \in G$ alors $x \in G$. Donc $F \cup G \subset G$.
   Si $x \in G$ alors $x \in F \cup G$, par conséquent $F \cup G = G$.
   On a montré que $F \subset G \Rightarrow F \cup G = G$
   Supposons que $F \cup G = G$.
   Soit $x \in F$, $x \in F \cup G = G$ donc $x \in G$.
   On a montré que $F \cup G = G \Rightarrow F \subset G$.
   Finalement $F \subset G \Leftrightarrow F \cup G = G$.
2. Supposons que $F \subset G$.
   Si $x \in F \cap C_E G$, $x \in F$ et $x \notin G \supset F$ donc $x \in F$ et $x \notin F$ ce qui est impossible par conséquent $F \cap C_E G = \emptyset$.
   On a montré que $F \subset G \Rightarrow F \cap C_E G = \emptyset$
   Supposons que $F \cap C_E G = \emptyset$.
   Soit $x \in F$, supposons que $x \notin G \Leftrightarrow x \in C_E G$ ce qui signifie que $x \in F \cap C_E G = \emptyset$, c'est impossible donc l'hypothèse $x \notin G$ est fausse, par conséquent $x \in G$ et $F \subset G$.
   On a montré que $F \cap C_E G = \emptyset \Rightarrow F \subset G$.
   Finalement $F \subset G \Leftrightarrow F \cap C_E G = \emptyset$.

Allez à : Exercice 14 :

Correction exercice 15 :

1.
$$\begin{aligned}(A \cup B) \setminus (A \cap B) &= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cup B) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)\\ &= \left(A \cap \overline{A}\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) \cup \left(B \cap \overline{B}\right) = \emptyset \cup \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) \cup \emptyset\\ &= \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\end{aligned}$$

2.
$$A \Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$$
$$A \Delta \emptyset = (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) = A \setminus \emptyset = A$$
$$A \Delta E = (A \cup E) \setminus (A \cap E) = E \setminus A = \overline{A}$$

3.

a)

$$\overline{(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})}=\overline{A\cap\overline{B}}\cap\overline{(B\cap\overline{A})}=(\overline{A}\cup B)\cap(\overline{B}\cup A)$$
$$=(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap A)\cup(B\cap\overline{B})\cup(B\cap A)=(\overline{A}\cap\overline{B})\cup\emptyset\cup\emptyset\cup(B\cap A)$$
$$=(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(B\cap A)$$

b)

$$(A\Delta B)\Delta C=\left((A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})\right)\Delta C=\left(\left((A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})\right)\cap\overline{C}\right)\cup\left(C\cap\overline{(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})}\right)$$
$$=(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(B\cap\overline{A}\cap\overline{C})\cup\left(C\cap\left((\overline{A}\cap\overline{B})\cup(B\cap A)\right)\right)$$
$$=(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(B\cap\overline{A}\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{A}\cap\overline{B})\cup(C\cap B\cap A)$$

c)

$$(A\Delta B)\Delta C=(C\cap\overline{A\Delta B})\cup\left((A\Delta B)\cap\overline{C}\right)=\left((A\Delta B)\cap\overline{C}\right)\cup(C\cap\overline{A\Delta B})=C\Delta(A\Delta B)$$

or $A\Delta B=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})=(B\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B})=B\Delta A$ donc $(A\Delta B)\Delta C=C\Delta(A\Delta B)=C\Delta(B\Delta A)$

d)

$(C\Delta B)\Delta A=(C\cap\overline{B}\cap\overline{A})\cup(B\cap\overline{C}\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{C}\cap\overline{B})\cup(A\cap B\cap C)=A\Delta(B\Delta C)$, en changeant A et C.

e)

$(A\Delta B)\Delta C=C\Delta(B\Delta A)$ d'après d) or $C\Delta(B\Delta A)=A\Delta(B\Delta C)$ d'après c).

Donc $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$.

Allez à : Exercice 15 :

Correction exercice 16 :

1. $I=[0,1]$ et $J=[-1,1]$.
2. $I=[-1,1]$ et $J=[0,1]$.
3. $I=[-1,1]$ et $J=[-1,1]$.
4. $I=[0,1]$ et $J=[0,1]$.

Allez à : Exercice 16 :

Correction exercice 17 :

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto x^2$$

$f(-1)=f(1)$ donc f n'est pas injective.

-4 n'a pas d'antécédent, car $f(x)=-4\Leftrightarrow x^2=-4$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. f n'est pas surjective.

Une fonction est bijective si et seulement si elle est injective et surjective donc cette fonction n'est pas bijective.

$$f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$$
$$x\mapsto x^2$$

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^2=x_2^2\Rightarrow\sqrt{x_1^2}=\sqrt{x_2^2}\Rightarrow|x_1|=|x_2|\Rightarrow x_1=x_2$$

Car $x_1\geq 0$ et $x_2\geq 0$. f est injective.

Pour tout $y\in\mathbb{R}^*$, (celui de l'ensemble d'arrivée), il existe $x=\sqrt{y}\in\mathbb{R}^*$, (celui de l'ensemble de départ) tel que : $y=f(x)$, en effet $f(x)=\left(\sqrt{y}\right)^2=y$ donc f est surjective.

f est bijective.

$$f:[0,1]\to[0,2]$$
$$x\mapsto x^2$$

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^2=x_2^2\Rightarrow\sqrt{x_1^2}=\sqrt{x_2^2}\Rightarrow|x_1|=|x_2|\Rightarrow x_1=x_2$$

Car $x_1\geq 0$ et $x_2\geq 0$. f est injective.

2 n'a pas d'antécédent, car $f(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $[0,1]$. f n'est pas surjective.

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x + x^3$$

g est une fonction dérivable, $g'(x) = 1 + 3x^2 > 0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La contraposée de $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ est $x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$

Supposons que $x_1 \neq x_2$, alors $x_1 < x_2$ (ou $x_2 < x_1$, ce que revient au même), on en déduit que $g(x_1) < g(x_2)$ car g est strictement croissante, par conséquent $g(x_1) \neq g(x_2)$, g est injective.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

g est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, par conséquent pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = g(x)$, g est surjective. Mais l'unicité du « x » fait que g est bijective donc il était inutile de montrer l'injectivité de g.

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 + x^3$$

On va étudier (sommairement) cette fonction et dresser son tableau de variation.

h est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. $h'(x) = 2x + 3x^2 = x(2 + 3x)$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$$

Le « x^3 » l'emporte sur le « x^2 ».

$$h(0) = 0 \text{ et } h\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{4}{27}$$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Les seules bijections de $E \subset \mathbb{R}$ sur $F \subset \mathbb{R}$ sont les fonctions strictement monotones dont l'image de E est F.

h n'est pas une bijection.

Comme $h(-1) = 0 = h(0)$, h n'est pas injective.

Pour tout $y \in \mathbb{R}$ il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = h(x)$, et bien il n'y a pas unicité sinon h serait bijective.

Pour tout $y \in [0, \frac{4}{27}[$ il existe trois valeurs x tel que $y = h(x)$, pour $y = \frac{4}{27}$, il y en a deux pour les autres y n'a qu'un antécédent.

$$k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x + x^4$$

On va étudier cette fonction, k est dérivable et $k'(x) = 1 + 4x^3$

$$k'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \left(-\frac{1}{2^2}\right)^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}$$

$$k\left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right) = \left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right)\left(1 + \left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right)^3\right) = \left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right) \times \frac{3}{4} = -\frac{3}{2^{\frac{8}{3}}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$$

Le « x^4 » l'emporte sur le « x ».

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2^{\frac{8}{3}}}$		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	
$k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{3}{2^{\frac{8}{3}}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour tout $y > -\frac{3}{2^{\frac{8}{3}}}$, y admet deux antécédents, k est ni surjective ni injective.

Allez à : Exercice 17 :

Correction exercice 18 :

1.
$$f(1,2) = 1 \times 2 = 2 \times 1 = f(2,1)$$
Donc f n'est pas injective.

2. $f(1,p) = 1 \times p = p$
Donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $(n,m) = (1,p)$ tel que $p = f(n,m)$
f est surjective.

3.
$$g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow (n_1,(n_1+1)^2) = (n_2,(n_2+1)^2) \Rightarrow \begin{cases} n_1 = n_2 \\ (n_1+1)^2 = (n_2+1)^2 \end{cases} \Rightarrow n_1 = n_2$$
Donc g est injective.

4. On va montrer que $(1,1)$ n'admet pas d'antécédent. Supposons que
$$(1,1) = (n,(n+1)^2)$$
Alors
$$\begin{cases} 1 = n \\ 1 = (n+1)^2 \end{cases}$$
Ce qui équivaut à
$$\begin{cases} 1 = n \\ 1 = 2^2 \end{cases}$$
Ce qui est impossible donc $(1,1)$ n'admet pas d'antécédent, g n'est pas surjective.

Allez à : Exercice 18 :

Correction exercice 19 :

$$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow 2n_1 = 2n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$$
f est injective.

1 n'a pas d'antécédent car il n'existe pas d'entier naturel n tel que $1 = 2n$, f n'est pas surjective.

$g(0) = E\left(\frac{0}{2}\right) = E(0) = 0$ et $g(1) = E\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, donc $g(0) = g(1)$ ce qui entraine que g n'est pas injective.

Pour tout $y = n \in \mathbb{N}$ (dans l'ensemble d'arrivé) il existe $x = 2n \in \mathbb{N}$ (dans l'ensemble de départ) tel que :
$$g(x) = E\left(\frac{x}{2}\right) = E\left(\frac{2n}{2}\right) = E(n) = n = y$$
g est surjective.

Si n est pair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$
$$f \circ g(n) = f\big(g(n)\big) = f\big(g(2p)\big) = f\left(E\left(\frac{2p}{2}\right)\right) = f\big(E(p)\big) = f(p) = 2p = n$$
Si n est impaire, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p+1$
$$f \circ g(n) = f\big(g(n)\big) = f\big(g(2p+1)\big) = f\left(E\left(\frac{2p+1}{2}\right)\right) = f\left(E\left(p+\frac{1}{2}\right)\right) = f(p) = 2p = n-1$$
$$f \circ g(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$
Que n soit paire ou impaire
$$g \circ f(n) = g\big(f(n)\big) = g(2n) = E\left(\frac{2n}{2}\right) = E(n) = n$$
$$g \circ f = id$$
Remarque :

Comme on le voit sur cet exemple, il ne suffit pas que $g \circ f = id$ pour que g soit la bijection réciproque de f. La définition de la bijection réciproque d'une fonction $f_1: E \to E$ est :
« S'il existe une fonction $f_2: E \to E$ telle que $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1 = id_E$ alors $f_2 = f_1^{-1}$ » on a alors : f_1 et f_2 sont deux fonctions bijectives.

Allez à : Exercice 19 :

Correction exercice 20 :

$f(E) \subset E$ donc $f\big(f(E)\big) \subset f(E) \subset E$, or $f\big(f(E)\big) = E$ donc $E \subset f(E) \subset E$, par conséquent $E = f(E)$ ce qui signifie que f est surjective.

Allez à : Exercice 20 :

Correction exercice 21 :

1. Supposons que g existe, $f \circ g = Id_{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f\big(g(n)\big) = n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \big(g(n)\big)^2 = n$
   Si n n'est pas un carré cela ne marche pas, par exemple si $n = 2$, $\big(g(2)\big)^2 = 2$ donc $g(2) = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$
   Il n'existe pas de fonction $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :$f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$.
2. Supposons que h existe, $h \circ f = Id_{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, h\big(f(n)\big) = n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, h(n^2) = n$
   Les valeurs $h(p)$ prennent les valeurs qu'elles veulent sauf lorsque p est un carré auquel cas $h(p) = \sqrt{p}$, donnons une fonction h qui répond à la question :
   Si $p \neq n^2$ alors $h(p) = 0$ et si $p = n^2$ alors $h(p) = \sqrt{p} = n$.

Allez à : Exercice 21 :

Correction exercice 22 :

1. Si g existe alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f\big(g(n)\big) = n \Leftrightarrow 2g(n) = n$, si n est impair $g(n) \notin \mathbb{Z}$ donc il n'existe pas de fonction $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f \circ g = Id_{\mathbb{Z}}$.

2. Si h existe alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $h\big(f(n)\big) = n \Leftrightarrow h(2n) = n$
   Soit h la fonction définie, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, par $h(2p) = p$ et $h(2p + 1) = 0$ convient.

Allez à : Exercice 22 :

Correction exercice 23 :

On pose $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ et $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, et bien sur tous les e_j sont distincts ainsi que tous les f_i.
On rappelle que le fait que f soit une application entraine que $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\} \subset \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$
On suppose que f est injective, on va montrer que f est surjective.
On va montrer la contraposée, c'est-à-dire que l'on va montrer que si f n'est pas surjective alors f n'est pas injective.
Soit $f_i \in F$ et on suppose qu'il n'existe pas de $e_j \in E$ tel que $f_i = f(e_j)$ (f n'est pas surjective)
Donc $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\} \subset \{f_1, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_n\}$, il y a n éléments dans le premier ensemble et $n - 1$ dans le second, donc il existe j_1 et j_2, avec $j_1 \neq j_2$ dans $\{1,2, \dots, n\}$ tels que $f\big(e_{j_1}\big) = f(e_{j_2})$, or $e_{j_1} \neq e_{j_2}$ donc f n'est pas injective.
On suppose que f est surjective et on va montrer que f est injective.
On va montrer la contraposée, c'est-à-dire que l'on va montrer que si f n'est pas injective alors f n'est pas surjective.
Si $f(e_i) = f\big(e_j\big) = u$ avec $e_i \neq e_j$ alors

$\{f(e_1),\dots,f(e_{i-1}),u,f(e_{i+1}),\dots,f(e_{j-1}),u,f(e_{j+1})\dots,f(e_n)\}\subset\{f_1,f_2,\dots,f_n\}$, le premier ensemble a $n-1$ éléments et le second n donc il existe un f_j qui n'a pas d'antécédent, cela montre que f n'est pas surjective.

On a montré que $(i)\Leftrightarrow(ii)$, par définition $(iii)\Rightarrow(i)$ et $(iii)\Rightarrow(ii)$. Si on a (i) alors on a (ii) et $(i)\ et\ (ii)$ entraine (iii) de même si on a (ii) alors on a (i) et $(i)\ et\ (ii)$ entraine (iii). Ce qui achève de montrer les trois équivalences.

Allez à : Exercice 23 :

Correction exercice 24 :

1. u et v sont surjectives donc $u(\mathbb{N})=\mathbb{Z}$ et $v(\mathbb{Z})=\mathbb{N}$ par conséquent
$$u\circ v\circ u(\mathbb{N})=u\Big(v\big(u(\mathbb{N})\big)\Big)=u\big(v(\mathbb{Z})\big)=u(\mathbb{N})=\mathbb{Z}$$
Cela montre que $u\circ v\circ u$ est surjective.
$$u\circ v\circ u(x_1)=u\circ v\circ u(x_2)\Leftrightarrow u\Big(v\big(u(x_1)\big)\Big)=u\Big(v\big(u(x_2)\big)\Big)\Leftrightarrow v\big(u(x_1)\big)=v\big(u(x_2)\big)$$
Car u est injective
$$u\circ v\circ u(x_1)=u\circ v\circ u(x_2)\Leftrightarrow v\big(u(x_1)\big)=v\big(u(x_2)\big)\Leftrightarrow u(x_1)=u(x_2)$$
Car v est injective
$$u\circ v\circ u(x_1)=u\circ v\circ u(x_2)\Leftrightarrow u(x_1)=u(x_2)\Leftrightarrow x_1=x_2$$
Car u est injective
Finalement $u\circ v\circ u$ est injective et donc bijective (puisqu'elle est surjective).
2. 7 n'admet pas d'antécédent donc f n'est pas surjective.
$$f(a,b,c)=f(a',b',c')\Leftrightarrow 2^a3^b5^c=2^{a'}3^{b'}5^{c'}$$
L'unicité de la décomposition des entiers en produit de facteur premier entraine que $a=a'$, $b=b'$ et $c=c'$, autrement dit f est injective.
Donc f est injective et pas surjective.
3. $\varphi(n)=0\ \ et\ \varphi(2n)=0$

Donc φ n'est pas injective.
$$\varphi(\mathbb{Z})=\{0,1,\dots,n-1\}\subsetneq\mathbb{N}$$
Donc φ n'est pas surjective.

4. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{Z}$ on cherche s'il existe un unique couple $(u,v)\in\mathbb{Z}$ tel que

Premier cas $a\neq 0$
$$(x,y)=f(a,b)\Leftrightarrow(x,y)=(au+bv+1,cu+dv-1)\Leftrightarrow\begin{cases}x=au+bv+1\\y=cu+dv-1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}x-1=au+bv\\y+1=cu+dv\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\cL_1-aL_2\end{matrix}\begin{cases}x-1=au+bv\\c(x-1)-a(y+1)=cbv-adv\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=au+bv\\c(x-1)-a(y+1)=(cb-ad)v\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=au+bv\\c(x-1)-a(y+1)=-v\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=au+b\big(-c(x-1)+a(y+1)\big)\\v=-c(x-1)+a(y+1)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}au=-b\big(-c(x-1)+a(y+1)\big)+(x-1)\\v=-c(x-1)+a(y+1)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}au=bc(x-1)-ab(y+1)+(x-1)\\v=-c(x-1)+a(y+1)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}au=(bc+1)(x-1)-ab(y+1)\\v=-c(x-1)+a(y+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}au=ad(x-1)-ab(y+1)\\v=-c(x-1)+a(y+1)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}u=d(x-1)-b(y+1)\\v=-c(x-1)+a(y+1)\end{cases}$$
Si $a=0$, alors $bc=-1$, en particulier $b\neq 0$ et $\frac{1}{b}=-c$

$$(x,y)=f(0,b)\Leftrightarrow (x,y)=(bv+1,cu+dv-1)\Leftrightarrow \begin{cases} x=bv+1 \\ y=cu+dv-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v=\dfrac{x-1}{b} \\ y=cu+dv-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=-c(x-1) \\ y=cu-dc(x-1)-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=-c(x-1) \\ y=cu-dc(x-1)-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v=-c(x-1) \\ cu=dc(x-1)+1+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=-c(x-1) \\ u=d(x-1)+\dfrac{1+y}{c} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v=-c(x-1) \\ u=d(x-1)-b(1+y) \end{cases}$$

Ce sont les mêmes formules que dans le cas où $a\neq 0$

Donc pour tout $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ il existe un unique couple

$$(u,v)=\big(d(x-1)-b(y+1),-c(x-1)+a(y+1)\big)\in\mathbb{Z}^2$$

tel que $(x,y)=f(u,v)$, f est bijective et

$$f^{-1}(x,y)=\big(d(x-1)-b(y+1),-c(x-1)+a(y+1)\big)$$

Allez à : Exercice 24 :

Correction exercice 25 :

Supposons qu'il existe $f: E\to\mathcal{P}(E)$ surjective et on cherche s'il existe un antécédent à A. On appelle $x_0\in E$, un antécédent de A, donc par définition $f(x_0)=A$,

si $x_0\in f(x_0)$ alors $x_0\in A$ et donc $x_0\notin f(x_0)$ ce qui est contradictoire

Si $x_0\notin f(x_0)$ alors par définition de A, $x_0\in A=f(x_0)$ ce qui est aussi contradictoire.

L'hypothèse est donc fausse, il n'y a pas d'application surjective de E dans $\mathcal{P}(E)$.

Allez à : Exercice 25 :

Correction exercice 26 :

1. Première méthode : raisonnons par récurrence

On pose (H_n) il y a $n(n-1)$ applications injectives de I_2 dans I_n.

Regardons si (H_2) est vraie.

Il y a 4 applications de I_2 dans I_n.

$$f_1(1)=1 \text{ et } f_1(2)=1$$
$$f_2(1)=1 \text{ et } f_2(2)=2$$
$$f_3(1)=2 \text{ et } f_3(2)=1$$
$$f_4(1)=2 \text{ et } f_4(2)=2$$

Seules f_2 et f_3 sont injectives. Il y a $2=2(2-1)$ applications injectives de I_2 dans I_2.

Montrons que $(H_n)\Rightarrow(H_{n+1})$

Il y a $n(n-1)$ applications injectives de $\{0,1\}$ dans $\{0,1,\dots,n\}$.

Supposons que $f(1)=n+1$ alors $f(2)\in\{1,\dots,n\}$ (pour que $f(1)\neq f(2)$), cela fait n applications injectives de plus.

Supposons que $f(2)=n+1$ alors $f(1)\in\{1,\dots,n\}$ (pour que $f(1)\neq f(2)$), cela fait n applications injectives de plus.

Au total, il y a $n(n-1)+n+n=n^2-n+n+n=n^2+n=n(n+1)$

L'hypothèse est vérifiée.

Conclusion pour tout $n\geq 2$, il y a $n(n-1)$ applications injectives de I_2 dans I_n.

Deuxième méthode :

Si $f(1)=k\in\{0,1,\dots,n\}$ alors $f(2)\in\{1,\dots,k-1,k+1,\dots,n\}$.

Cela fait n choix possibles pour $f(1)$ et $n-1$ pour $f(2)$, soit $n(n-1)$ choix possibles pour $\big(f(1),f(2)\big)$ de façon à ce que $f(1)\neq f(2)$ (autrement dit pour que f soit injective).

2. $f: I_m \to I_n$
f injective équivaut à $f(1) = k_1; f(2) = k_2; \dots; f(m) = k_m$, avec $k_1, k_2, \dots, k_m \in \{1,2, \dots, n\}$ tous distincts par conséquent $m \leq n$.
Remarque :
Cela ne veut pas dire que toutes les applications de $\{1,2, \dots, m\}$ dans $\{1,2, \dots, n\}$ sont injectives !
Supposons que f est surjective.
Pour tout $k_1, k_2, \dots, k_n \in \{1,2, \dots, n\}$ (les k_i tous distincts) il existe $l_1, l_2, \dots, l_n \in \{1,2, \dots, m\}$ tels que $k_i = f(l_i)$ par définition d'une application tous les l_i sont distincts (sinon un élément aurait plusieurs images), par conséquent $n \leq m$.
Pour que f soit bijective il faut (et il suffit) que f soit injective et sujective, par conséquent il faut que $m \leq n$ et que $n \leq m$, autrement dit il faut que $m = n$.
Remarque :
Cela ne veut pas dire que toutes les applications de $\{1,2, \dots, n\}$ dans $\{1,2, \dots, n\}$ sont bijectives.

Allez à : Exercice 26 :

Correction exercice 27 :

1. $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$
Car g est injective
$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$
Car f est injective.
Donc $g \circ f$ est injective.
2. Première méthode :
Pour tout $z \in G$ il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$ car g est surjective.
Comme pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ car f est surjective. On en déduit que pour tout $z \in G$ il existe $x \in E$ tel que $z = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x)$ autrement dit $g \circ f$ est surjective.

Remarque :
(a) D'habitude on appelle y un élément de l'image G mais ici ce pose un petit problème de notation parce que l'on va appeler x l'élément de F et on ne saura pas trop comment appeler l'élément de E, c'est pour cela qu'il est plus malin de l'appeler z.
(b) Si on commence par écrire « pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ car f est surjective » puis « pour tout $z \in G$ il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$ car g est surjective » donc « pour tout $z \in G$ il existe $x \in E$ tel que $z = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x)$ » cela ne va pas, je vous laisse réfléchir pourquoi.

Deuxième méthode :
On rappelle que $\varphi: U \to V$ est surjective si et seulement si $\varphi(U) = V$
Donc $f(E) = F$ et $g(F) = G$, par conséquent $g \circ f(E) = g\big(f(E)\big) = g(F) = G$ et on en déduit que $g \circ f$ est surjective.

3. Si g et f sont bijectives alors elles sont injectives et $g \circ f$ est injective et si g et f sont bijectives alors elles sont surjectives et $g \circ f$ est surjective, on en déduit que $g \circ f$ est bijective.
4. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big) \Rightarrow g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
Car $g \circ f$ est injective, par conséquent f est injective.
5. Première méthode :
Pour tout $z \in G$, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$, donc il existe $y = f(x)$ tel que $z = g(y)$ ce qui signifie que g est surjective.
Deuxième méthode :
Comme $g \circ f$ est surjective, $g \circ f(E) = G \Leftrightarrow g\big(f(E)\big) = G$ or $f(E) \subset F$ donc
$$g\big(f(E)\big) \subset g(F)$$

Comme $g(F) \subset G$, cela donne

$$G = g\big(f(E)\big) \subset g(F) \subset G$$

D'où

$$g\big(f(E)\big) = g(F) = G \Rightarrow g(F) = G$$

Ce qui montre que g est surjective.

6.

a. $g \circ f = Id_E$ est bijective (l'identité est bijective)

$g \circ f$ est injective, d'après 4°), f est injective.

$g \circ f$ est surjective, d'après 5°), g est surjective.

Remarque :

$g \circ f = Id_E$ n'entraine pas que $g = f^{-1}$ et que donc f et g sont bijectives.

b. $f \circ g = Id_F$ est bijective (l'identité est bijective)

$f \circ g$ est injective, d'après 4°), g est injective.

$f \circ g$ est surjective, d'après 5°), f est surjective.

c. $f \circ f = Id_E$ est bijective

$f \circ f$ est injective, d'après 4°), f est injective.

$f \circ f$ est surjective, d'après 5°), f est surjective.

Par conséquent f est bijective et $f^{-1} = f$.

Allez à : Exercice 27 :

Correction exercice 28 :

1. Pour tout $y \in Y$ il existe $x = s(y) \in X$ tel que $y = Id_Y(y) = f\big(s(y)\big) = f(x)$, f est surjective.
2. $s(y_1) = s(y_2) \Rightarrow f\big(s(y_1)\big) = f\big(s(y_2)\big) \Rightarrow y_1 = y_2$

   s est injective.
3. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow r\big(f(x_1)\big) = r\big(f(x_2)\big) \Rightarrow Id_X(x_1) = Id_X(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

   f est injective.
4. Pour tout $x \in X$, pose $y = f(x)$.

   Comme $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ à chaque $y \in Y$ telle que $y = f(x)$ on associe bien une unique valeur x, on définit alors $r: f(X) \to X$ par $r(y) = x$. Pour les $y \in Y$ qui ne sont pas dans l'image de X par f, autrement dit qui ne sont pas de la forme $y = f(x)$, on leur attribue n'importe quelle valeur dans X, mettons x_0 pour fixé les idées (d'ailleurs, on n'est pas obligé de leur attribuer à tous la même valeur).

   Pour tout $x \in X$.

   $$x = r(y) = r\big(f(x)\big) \Leftrightarrow Id_X = r \circ f$$

   r est bien une rétraction de f.

Remarque :

Si $y \notin f(X)$, $r(y) = x_0$ ne sert à rien pour montrer que r est une rétraction.

5. Pour tout $x \in X$, il existe $y = f(x)$ tel que :

   $$x = Id_X(x) = r\big(f(x)\big) = r(y)$$

   Cela montre que r est surjective.

Remarque :

Les rôles habituels de x et y ont été inversés pour respecter les notations de l'énoncé.

6.

Si f admet une section alors f est surjective d'après 1°).

Si f admet une rétraction alors f est injective d'après 3°).

Par conséquent f est bijective, on note $f^{-1}: Y \to X$ sa bijection réciproque.

Comme $Id_X = r \circ f$, en composant par f^{-1} à droite :

$$Id_X \circ f^{-1} = (r \circ f) \circ f^{-1} \Leftrightarrow f^{-1} = r \circ (f \circ f^{-1}) = r$$

Comme $Id_Y = f \circ s$, en composant par f^{-1} à gauche :

$$f^{-1} \circ Id_Y = f^{-1} \circ (f \circ s) \Leftrightarrow f^{-1} = (f^{-1} \circ f) \circ s = s$$

D'où $r = s = f^{-1}$.

Allez à : Exercice 28 :

Correction exercice 29 :

1. Pour tout $y \in f(A \cup B)$, il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.
   Comme $x \in A$, $y = f(x) \in f(A)$, comme $x \in B$, $y = f(x) \in f(B)$ par conséquent
   $$y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$$
   Cela montre que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$
   Pour tout $y \in f(A) \cup f(B)$, $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$
   Si $y \in f(A)$ alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$, mais $x \in A \subset A \cup B$ donc $y = f(x) \in f(A \cup B)$
   Si $y \in f(B)$ alors il existe $x \in B$ tel que $y = f(x)$, mais $x \in B \subset A \cup B$ donc $y = f(x) \in f(A \cup B)$
   Cela montre que s tous les cas $y \in f(A \cup B)$ et que donc
   $$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$$
   Finalement $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. Pour tout $y \in f(A \cap B)$, il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$.
   Comme $x \in A \cap B \subset A$, $y = f(x) \in f(A)$, comme $x \in A \cap B \subset B$, $y = f(x) \in f(B)$ par conséquent
   $$y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$$
   Cela montre que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
   Pour trouver un exemple où l'inclusion est stricte, d'après la suite, il ne faut pas prendre une fonction injective, par exemple prenons $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$, ensuite il faut prendre A et B où f n'est pas injective, par exemple :
   $$A = [-4,2] \quad \text{et } B = [-2,3]$$
   $$f(A) = f([-4,2]) = [0,16]\ ; \quad f(B) = f([-2,3]) = [0,9] \Rightarrow f(A) \cap f(B) = [0,9]$$
   $$A \cap B = [-2,2] \Rightarrow f(A \cap B) = [0,4]$$
   On a bien $f(A \cap B) \subsetneq f(A) \cap f(B)$

Allez à : Exercice 29 :

Correction exercice 30 :

1. $f^{-1}(\{2\}) = \{3,4\}; f^{-1}(\{1,2\}) = \{2,3,4\}\ ; f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$
2. $$f^{-1}(\{1\}) = \{-1,1\}$$
   $$f^{-1}([1,2]) = \left[-\sqrt{2}, -1\right] \cup \left[1, \sqrt{2}\right]$$

Allez à : Exercice 30 :

Correction exercice 31 :

1. $[0,1] \times [0,1] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \le x \le 1 \text{ et } 0 \le y \le 1\}$
   Donc
   $$f([0,1] \times [0,1]) = \{x \in \mathbb{R}, 0 \le x \le 1\} = [0,1]$$
   $$f^{-1}([-1,1]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \in [-1,1]\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [-1,1]\} = [-1,1] \times \mathbb{R}$$
2. $$f(\mathbb{N}) = \{y \in [-1,1], y = \cos(\pi n), n \in \mathbb{N}\} = \{y \in [-1,1], y = (-1)^n, n \in \mathbb{N}\} = \{-1,1\}$$

$$f(2\mathbb{N}) = \{y \in [-1,1], y = \cos(2\pi n), n \in \mathbb{N}\} = \{y \in [-1,1], y = 1, n \in \mathbb{N}\} = \{1\}$$

$$f^{-1}(\{\pm 1\}) = \{x \in \mathbb{R}, \cos(\pi x) = \pm 1\}$$

Or $\cos(x) = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$ et $\cos(x) = -1 \Leftrightarrow x = (2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$$f^{-1}(\{\pm 1\}) = \{x \in \mathbb{R}, x = 2k\pi, x = (2k+1)\pi, \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\} = \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$$

Allez à : Exercice 31 :

Correction exercice 32 :

1. Pour tout $x \in f^{-1}(A' \cup B')$, $f(x) \in A' \cup B'$ donc $f(x) \in A'$ ou $f(x) \in B'$, par conséquent $x \in f^{-1}(A')$ ou $x \in f^{-1}(B')$, autrement dit $x \in f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$
   On a montré que $f^{-1}(A' \cup B') \subset f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$
   Pour tout $x \in f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$, $x \in f^{-1}(A')$ ou $x \in f^{-1}(B')$, par conséquent $f(x) \in A'$ ou $f(x) \in B'$, autrement dit $f(x) \in A' \cup B'$, donc $x \in f^{-1}(A' \cup B')$.
   On a montré que $f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B') \subset f^{-1}(A' \cup B')$
   Finalement $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$
2. Pour tout $x \in f^{-1}(A' \cap B')$, $f(x) \in A' \cap B'$ donc $f(x) \in A'$ et $f(x) \in B'$, par conséquent $x \in f^{-1}(A')$ et $x \in f^{-1}(B')$, autrement dit $x \in f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$
   On a montré que $f^{-1}(A' \cap B') \subset f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$
   Pour tout $x \in f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$, $x \in f^{-1}(A')$ et $x \in f^{-1}(B')$, par conséquent $f(x) \in A'$ et $f(x) \in B'$, autrement dit $f(x) \in A' \cap B'$, donc $x \in f^{-1}(A' \cap B')$.
   On a montré que $f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B') \subset f^{-1}(A' \cap B')$
   Finalement $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$

Allez à : Exercice 32 :

Correction exercice 33 :

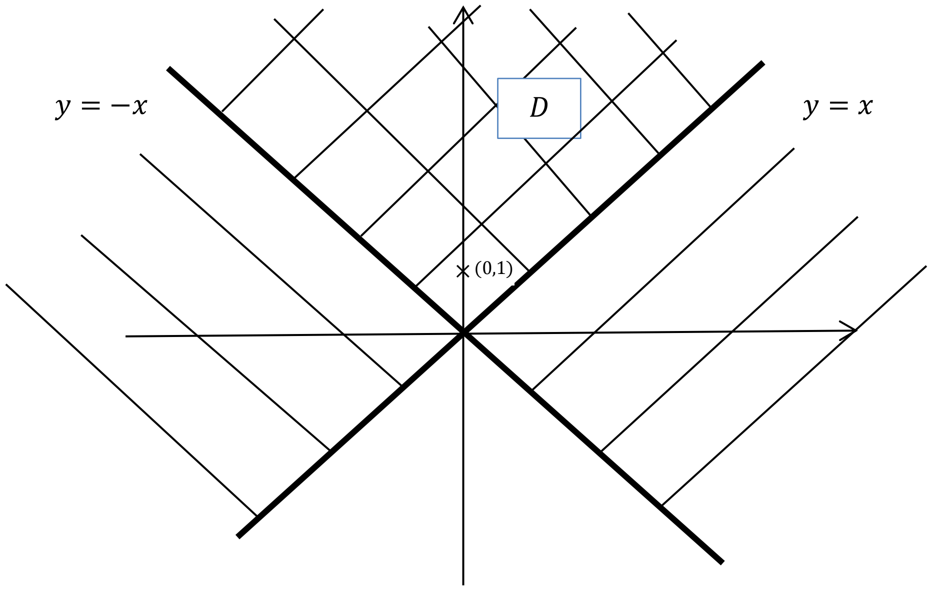
1. Pour tout $x \in A$, $f(x) \in f(A)$ et donc $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$, ce qui montre que $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$
2. Pour tout $y \in f\big(f^{-1}(B)\big)$, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$, comme $x \in f^{-1}(B)$ $f(x) \in B$ ce qui entraine que $y \in B$, ce qui montre que $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$.
3. Comme « pour toute partie A de E, on a $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$ » la question revient à montrer que : « f est injective si et seulement si pour toute partie A de E on a $A \supset f^{-1}\big(f(A)\big)$ »
   Si f est injective.
   Pour tout $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$, $f(x) \in f(A)$ ce qui signifie qu'il existe $x' \in A$ (attention, à priori ce n'est pas le même x que celui du début de la phrase) tel que $f(x) = f(x')$ comme f est injective $x = x'$, par conséquent $x \in A$.
   On a montré que $f^{-1}\big(f(A)\big) \subset A$.
   Si pour toute partie $A \subset E$, $f^{-1}\big(f(A)\big) \subset A$
   $$f(x_1) = f(x_2) = y$$
   On prend $A = \{x_1\}$
   $$f(A) = f(\{x_1\}) = \{f(x_1)\} = \{y\} \Rightarrow f^{-1}\big(f(A)\big) = f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(y)$$
   D'après l'hypothèse $f^{-1}\big(f(A)\big) \subset A$ donc $\{f^{-1}(y)\} \subset \{x_1\}$
   Or $x_2 \in f^{-1}(y)$ car $f(x_2) = y$ donc $x_2 \in \{x_1\}$ par conséquent $x_1 = x_2$ ce qui signifie que f est injective.
   Finalement on a montré l'équivalence demandée.
4. Comme « pour toute partie B de F, on a $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$ » la question revient à montrer que : « f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F on a $f\big(f^{-1}(B)\big) \supset B$ »
   Si f est surjective.

Pour tout $y \in B$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ car f est surjective.
$x \in f^{-1}(B)$ entraine que $y = f(x) \in f\left(f^{-1}(B)\right)$, cela montre que $B \subset f\left(f^{-1}(B)\right)$.
Si pour tout $B \subset f\left(f^{-1}(B)\right)$
On pose $B = \{y\}$, alors $\{y\} \subset f\left(f^{-1}(\{y\})\right)$ ce qui s'écrit aussi $y \in f\left(f^{-1}(\{y\})\right)$, il existe donc $x \in f^{-1}(\{y\})$ tel que $y = f(x)$, cela montre bien que f est surjective.
Finalement on a montré l'équivalence demandée.

Allez à : Exercice 33 :

Correction exercice 34 :

1. Le point $(0,1)$ vérifie $x \leq y$ donc $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y\}$ est le demi-plan supérieur droit. De même $(0,1)$ vérifie $-y \leq x$ donc $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -y \leq x\}$ est le demi-plan supérieur droit, D est l'intersection de ces deux demi-plan, D est le quart de plan supérieur du schéma ci-dessous.



2. a.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$

En additionnant L_1 et L_2 on trouve que $2x_1 = 2x_2$, donc $x_1 = x_2$, puis en remplaçant dans L_1, on trouve que $y_1 = y_2$.
b.

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Rightarrow (x_1^2 + y_1^2, 2x_1y_1) = (x_2^2 + y_2^2, 2x_2y_2) \Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \\ 2x_1y_1 = 2x_2y_2 \end{cases}$$

$L_1 - L_2$ donne $x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 = x_2^2 + y_2^2 - 2x_2y_2$, ce qui entraine que $(x_1 - y_1)^2 = (x_2 - y_2)^2$, comme $x - y \leq 0$ sur D, cela donne $-(x_1 - y_1) = -(x_2 - y_2)$ ou encore $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$.
$L_1 + L_2$ donne $x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1 = x_2^2 + y_2^2 + 2x_2y_2$, ce qui entraine que $(x_1 + y_1)^2 = (x_2 + y_2)^2$, comme $x + y \geq 0$ sur D, cela donne $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$.
D'après 2.a. cela donne que $x_1 = x_2$ et que $y_1 = y_2$, ce qui montre que f est injective.
3. $(-1, 1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ n'a pas d'antécédent dans D car $x^2 + y^2 > 0$.

Allez à : Exercice 34 :