محاضرة : التطبيقات الخطية

تعريــــف التطبيقات الخطيـــــة :

لـــيكن f تطبيق من E نـحو F ، حيث E و F فضاءان شعاعيان على الحقل K، نقول أن f تطبيق خـــطي إذا وفقط إذا تحقق :

$$1)\ \forall x \in E \quad \forall y \in E \quad : f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$2)\ \forall x \in E \quad \forall \alpha \in K \quad : f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$$

ملاحظـــة : يمكن إختصار الخاصيتين 1) و 2) بالخاصية : $\forall x, y \in E_1, \forall \alpha, \beta \in K : f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

مـــثال : ليكن f : $f : IR^3 \to IR^2$ حيث IR^3, IR^2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل IR ،

والمعرف كما يلي: $\forall (x, y, z) \in IR^3 : f(x, y, z) = (x - y, y - z)$ ، فإن f تطبيق خطي ،

<u>نتحقق من الشرط 1)</u>

$$1)\forall (x, y, z), (x', y', z') \in IR^3 : f((x, y, z) + (x', y', z')) = f(x + x', y + y', z + z')$$

$$\Rightarrow f((x, y, z) + (x', y', z')) = (x + x' - (y + y'), y + y' - (z + z'))$$

$$\Rightarrow f((x, y, z) + (x', y', z')) = (x + x' - y - y', y + y' - z - z')$$

$$\Rightarrow f((x, y, z) + (x', y', z')) = (x - y + x' - y', y - z + y' - z')$$

$$\Rightarrow f((x, y, z) + (x', y', z')) = (x - y, y - z) + (x' - y', y' - z')$$

$$\Rightarrow f((x, y, z) + (x', y', z')) = f(x, y, z) + f(x', y', z')$$

و منه الشرط الأول محقـــق .

<u>نتحقق من الشرط 2)</u>

$$2)\forall (x, y, z) \in IR^3, \forall \lambda \in IR : f(\lambda(x, y, z)) = f(\lambda x, \lambda y, \gamma z)$$

$$\Rightarrow f(\lambda(x, y, z)) = (\lambda x - \lambda y, \lambda y - \lambda z) \Rightarrow f(\lambda(x, y, z)) = \lambda(x - y, y - z)$$

$$\Rightarrow f(\lambda(x, y, z)) = \lambda f(x, y, z)$$

ومنـــــه f هو تطبيق خطــــي .

- **التطبيق الخطي المتبايـــن** : نقول عن التطبيق الخطي f أنه متباين إذا وفقط إذا تحقق :

$$[\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y]$$

- **التطبيق الخطي الغامــــر** : نقول عن التطبيق الخطي f أنه غامــــر إذا وفقط إذا تحقق :

$$[\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad : f(x) = y]$$

- **التطبيق الخطي التقابلـــي** : نقول عن التطبيق الخطي f تـــقابلي إذا وفقط إذا كان متباين و غامر .

مـــثال : بين أن التطبيق f المعرف بـــ $\forall (x, y) \in IR^2 : f(x, y) = (x + y, y)$ ، هو تطبيق خطي تقابلي .

<u>نـــتيجة</u> : تركيب التطبيقات الخطية هو تطبيق خطي.

تـــعر يف نـــواة تطبيق خطي $Ker f$:

ليكن V_2, V_1 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K ، و ليكن f تطبيق خطي من V_1 نحو V_2 ، نسمي نواة التطبيق الخطي f المجموعة : $Ker(f) = \{x \in V_1 : f(x) = 0_{V_2}\}$ و نرمز لها بـ $Ker(f)$.

نـــتيجة هامة : $Ker(f)$ هي فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي V_1 (مجموعة البدا) .

مـــثال : ليكن $f : IR^3 \to IR^2$ حيث IR^3, IR^2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل IR ،

والمعرف كما يلي: $\forall (x, y, z) \in IR^3 : f(x, y, z) = (x - y, y - z)$

هو تطبيق خطي كما رأينا سابقاء أوجـــد نواة هذا التطبيق الخطي.

الحــــل : المطلوب هو إيجاد المجموعة التالية: $Ker(f) = \{(x, y, z) \in IR^3 : f(x, y, z) = (0,0)\}$ أي :

$$Ker(f)=\{\forall(x,y,z)\in IR^3 : f(x,y,z)=(0,0)\}$$
$$\Rightarrow Ker(f)=\{\forall(x,y,z)\in IR^3 : (x-y,y-z)=(0,0)\}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ y=z \end{cases} \Rightarrow x=y=z$$

ومنه نجد أن: $Ker(f)=\{(x,y,z)\in IR^3 : x=y=z\}$

ونلاحظ كـــــذلك :

$$\forall(x,y,z)\in IR^3 : x=y=z \Rightarrow (x,y,z)=(x,x,x)=x(1,1,1)$$
$$\Rightarrow Ker(f)=\{x(1,1,1)\in IR^3 : x\in IR\} \Rightarrow Ker(f)=[(1,1,1)]$$

أي أن النواة هي المجموعة الجزئية من IR^3 المولدة بالشعاع $(1,1,1)$.

ونلاحظ في هذا المثال أن النواة هي فضاء شعاعي جزئي من IR^3 مولد بشعاع واحد هو $(1,1,1)$ أي : $\dim Ker(f)=1$

نـــــتيجة :

ليكن V_2, V_1 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K , وليكن f تطبيق خطي من V_1 في V_2 ,
النواة $Ker(f)$ هي عبارة عن فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي. V_1 (مجموعة البدء) .

تــعر يف صورة تطبيق خطي $\text{Im} f$:

ليكن V_2, V_1 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K
وليكن f تطبيق خطي من V_1 في V_2, نسمي المجموعة التالية: $\text{Im}(f)=\{y\in V_2 / \exists x\in V_1 : f(x)=y\}$
بصورة التطبيق الخطي f.

مـــثال :

ليكن IR^2, IR^3 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل IR و التطبيق الخطي : $f: IR^3 \to IR^2$
المعرف كما يلي: $\forall(x,y,z)\in IR^3 : f(x,y,z)=(x-y,y-z)$ ، اوجد صورة هذا التطبيق ؟

الحـــل :

المطلوب هو إيجاد المجموعة التالية: $\text{Im}(f)=\{(x',y')\in IR^2 / \exists(x,y;z)\in IR^3 : f(x,y,z)=(x',y')\}$

$$\text{Im}(f)=\{(x',y')\in IR^2 / \exists(x,y;z)\in IR^3 : f(x,y,z)=(x',y')\}$$
$$\text{Im}(f)=\{(x',y')\in IR^2 / \exists(x,y;z)\in IR^3 : (x-y,y-z)=(x',y')\}$$
$$\begin{cases} x'=x-y \\ y'=y-z \end{cases} \Rightarrow (x',y')=(x-y,y-z) \Rightarrow \text{Im}(f)=\{(x',y')\in IR^2 / \exists(x,y;z)\in IR^3 : (x',y')=(x-y,y-z)\}$$

و نلاحظ أيضا أن :

$$\Rightarrow (x',y')=x(1,0)+y(-1,1)+z(0,-1)$$
$$\Rightarrow \text{Im}(f)=\{(x',y')\in IR^2 / \exists(x,y;z)\in IR^3 : (x',y')=x(1,0)+y(-1,1)+z(0,-1)\}$$

و الأشعة: $(1,0),(1,-1),(0,-1)$
هي ثلاثة أشعة من الفضاء IR^2 ونعلم أن بعده هو 2 مما يؤكد أن الأشعة السابقة هي اشعة مرتبطة خطيا.
ومنه وبأخذ شعاعين من الأشعة السابقة أي: $(1,0),(1,-1)$
مثلا نجد أنها مستقلة خطيا, اي أن الفضاء الشعاعي الجزئي $\text{Im}(f)=[(1,0),(1,-1)]$
وبما أن:

$$\boxed{\dim(\text{Im}(f))=2 \Rightarrow \text{Im}(f)=IR^2}$$

نـــتيجة :

ليكن V_2, V_1 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K , وليكن f تطبيق خطي من V_1 في V_2,
$\text{Im}(f)$ عبارة عن فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي V_2 (مجموعة الوصول).

نـــتيجة :

ليكن V_2, V_1 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K , وليكن f تطبيق خطي من V_1 في V_2,

إذا كان f تطبيقا تقابليا فإن التطبيق العكسي : $f^{-1}: V_2 \rightarrow V_1$ هو تطبيق خطي أيضا .

نتـــــائـــج :

ليكن V_2, V_1 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K, وليكن f تطبيق خطي من V_1 في V_2

◄ $Ker(f) = \{0\} \Leftrightarrow f$ يكون متباينا.

◄ $\mathrm{Im} f = V_2 \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = \dim V_2$ (أي أنه غامر).

◄ f تطبيق خطي تقابلي $\Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2$.

مـبرهنة :

ليكن V_2, V_1 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K, وليكن f تطبيق خطي من V_1 في V_2 فإن:

$$\boxed{\dim V_1 = \dim(Kerf) + \dim(\mathrm{Im} f)}$$

تعريف رتبة تطبيق خطي :

ليكن V_2, V_1 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K, وليكن f تطبيق خطي من V_1 في V_2

نسمي بعد $\mathrm{Im} f$ رتبة التطبيق الخطي f ونرمز لها بالرمز $rang(f)$ أي :

$$\boxed{rang(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))}$$

تمرين 1 : $f: IR^2 \rightarrow IR^2$ تطبيق معرف بـ $f(x, y) = (x + y, x - y)$

1) بين أنه تطبيق خطي.

2) أوجد صورة ونواة هذا التطبيق مستنتجا أنه تقابلي (ايزوموزفيزم) .

تمرين 2 : ليكن $f: IR^3 \rightarrow IR^3$ تطبيق معرف بـ $f(x, y, z) = (x + y, x + z, x - z)$

1) بين أنه تطبيق خطي.

2) أحسب : $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ حيث e_1, e_2, e_3 عبارة عن الأساس القانوني في الفضاء الشعاعي IR^3 على الحقل IR

3) أثبت أن الأشعة : $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ مستقلة خطيا ، مستنتجا أن هذا التطبيق تقابلي .