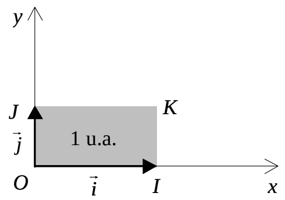
1. Définition de l'intégrale dans le cas d'une fonction continue positive sur un segment [a, b]

1.1. Définition *L'unité d'aire*

Soit P un plan muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Soient I, J et K les points définis par :

$$\overrightarrow{OI} = \vec{i}\ ,\ \overrightarrow{OJ} = \vec{j} \ \text{ et } \ \overrightarrow{OK} = \vec{i} + \vec{j}$$



On appelle unité d'aire (notée en abrégé u.a.) l'unité de mesure des aires telle que :

Aire(rectangle $OIKJ$) = **1** u.a.

Remarques :

- $OIKJ$ peut être un carré lorsque le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé.
- Si l'on a, par exemple, $OI = 3$ cm et $OJ = 2$ cm, alors une unité d'aire correspond à 6 cm^2.

1.2. Définition *Notion d'intégrale d'une fonction continue positive en tant qu'aire*

Soit P un plan muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Soient :

- a et b deux réels avec $a \leqslant b$.
- f une fonction **continue** (ou **continue par morceaux**[(1)]) et **positive** sur le segment[(2)] [a, b].

On appelle intégrale de f de a à b l'aire, exprimée en u.a., du domaine D suivant :

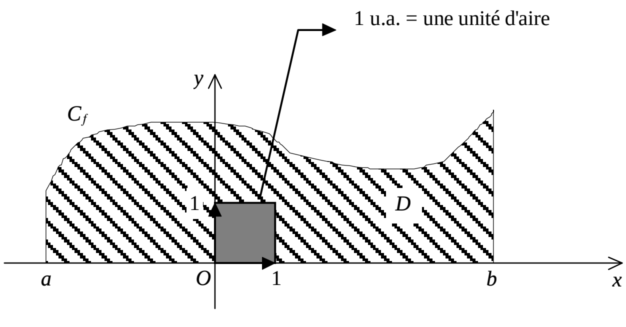
$$D = \{M(x, y) \in P \text{ tels que } a \leqslant x \leqslant b \ \text{ et } \ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

(D est le domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$)

On note cette quantité : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Les réels a et b s'appellent les bornes de l'intégrale.

Illustration :



L'aire de D est de mesure FINIE. En effet, f est continue sur le segment [a, b] donc majorée. Il existe donc un rectangle contenant D.

Remarques :

La variable t (ou x ou autre) figurant dans l'intégrale est "muette" ; elle peut être notée par toute autre lettre. Le symbole dt (ou dx) ne joue aucun rôle pour le moment, si ce n'est de préciser quelle est la variable.

(1) Cette hypothèse est indispensable pour définir l'intégrale d'une fonction en escalier.

(2) Un segment est un intervalle fermé borné.

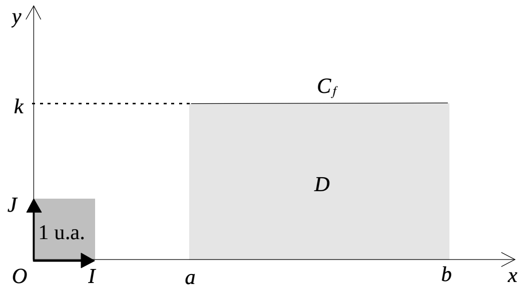
Premiers exemples :

Rapportons le plan à un repère orthonormé $(O\,; \vec{i}, \vec{j}\,)$ avec $\|\vec{i}\,\| = \|\vec{j}\,\| = 1$ cm. (Ainsi 1 u.a. correspond à 1 cm^2)

Cas d'une fonction f égale à une constante positive (notée $k \in \mathbb{R}_+$) sur $[a, b]$ alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b k\,\mathrm{d}t = (b-a)k \text{ u.a .}$$

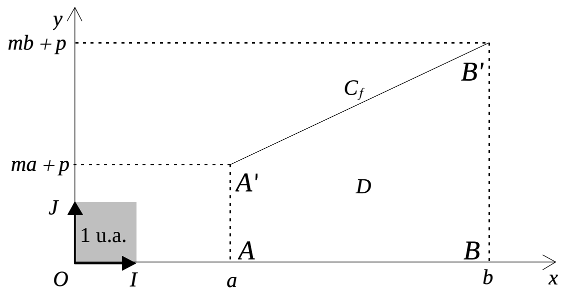
(On a simplement appliqué la formule longueur × largeur pour calculer l'aire d'un rectangle !)



En particulier, si f est nulle sur $[a, b]$ alors : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$

Cas d'une fonction f affine (notons $f(x) = mx + p$) supposée positive sur $[a, b]$ alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \text{Aire du trapèze } ABB'A' = \frac{(\text{petite base} + \text{grande base}) \times \text{hauteur}}{2}$$



$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(AA' + BB')AB}{2} = \frac{(ma + p + mb + p)(b-a)}{2} = \frac{1}{2}m(b^2 - a^2) + p(b-a)$$

La formule ci-contre n'est pas à connaître par cœur.

Cas de la parabole. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2$$

On a vu (voir le DM 1 sur la quadrature de la parabole) qu'alors :

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

Cas d'une fonction en escalier (toujours supposée positive) sur $[a, b]$:

Il s'agit des fonctions pour lesquelles il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ vérifiant :

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$$

tels que f soit constante sur chacun des intervalles ouverts $]a_i, a_{i+1}[$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$

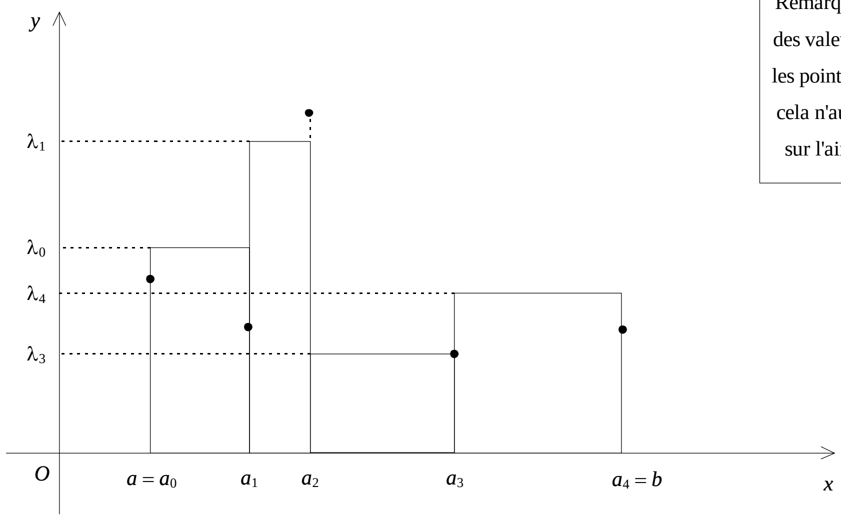
L'ensemble $\{a_0\,; a_1\,; \ldots\,; a_n\}$ est appelé une subdivision adaptée à f.

En notant λ_i la valeur constante de f sur $]a_i, a_{i+1}[$, on a alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)\lambda_i$$

(Pas de panique, cette formule n'est qu'une somme d'aires de rectangles !)

Illustration avec $n = 4$.



Remarque : f peut prendre des valeurs quelconques en les points de la subdivision, cela n'aura pas d'incidence sur l'aire. des rectangles.

Remarques :

- f peut prendre n'importe quelle valeur en chacun des points a_i ; cela ne modifie pas l'aire.
- La formule donnée ci-dessus pour les fonctions en escaliers en fondamentale. C'est cette formule (généralisée à des λ_i réels quelconques) qui sera prise en définition plus tard (classes post-bac). En effet, d'une part, il est facile de prouver les propriétés (telle que la linéarité) des intégrales pour les fonctions en escaliers. D'autre part, il y a un résultat très fort qui est que "toute fonction continue sur un segment peut être approchée par des fonctions en escaliers" ce qui permet d'étendre les propriétés obtenues sur les fonctions en escaliers aux fonctions continues. C'est ainsi que l'on construit, par exemple, l'intégrale dite de Riemann.

Exemple fondamental : *quadrature de l'hyperbole*

Notons, pour tout $x \in [1, +\infty[$, $S(x)$ l'intégrale : $S(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

D'après la définition 1.2., $S(x)$ est l'aire du domaine :

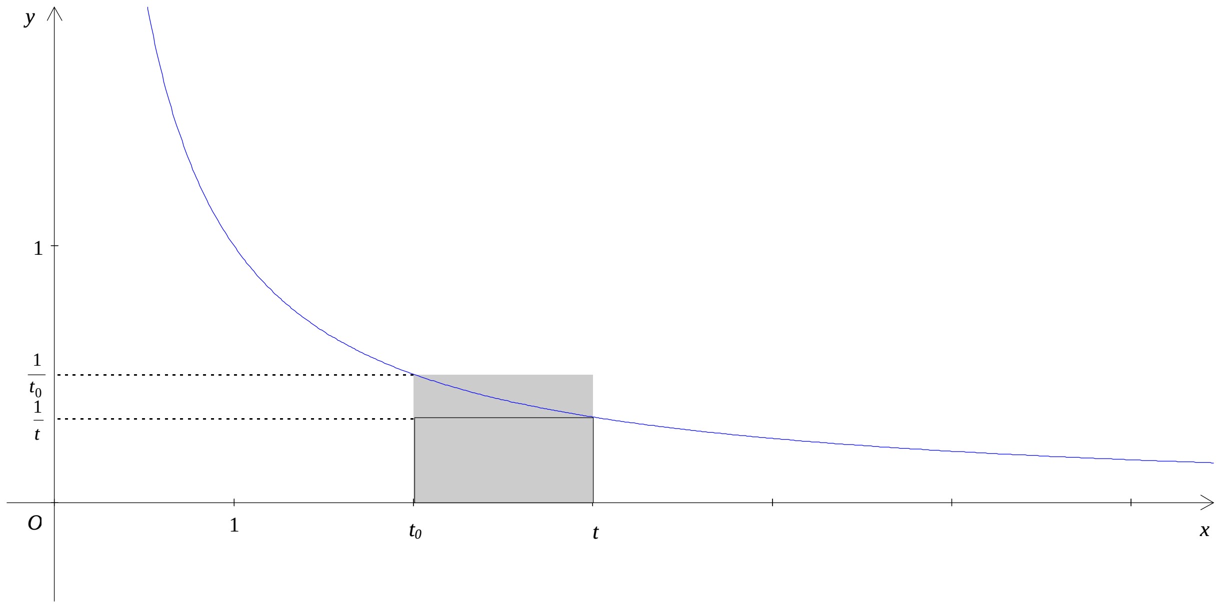
$$D(x) = \{M(t, y) \in P \text{ tels que } 1 \leqslant t \leqslant x \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(t)\}$$

($D(x)$ est le domaine délimité par la courbe de la fonction inverse, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $t = 1$ et $t = x$)

Soit t_0 un réel fixé de l'intervalle $[1, +\infty[$.

Soit t un réel de l'intervalle $[1, +\infty[$.

Distinguons deux cas :



Cas 1 : $t_0 \leqslant t$. Alors $S(t) - S(t_0)$ est l'aire du domaine délimité par la courbe de la fonction inverse, l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équations $x = t_0$ et $x = t$.

Or, par décroissance de la fonction inverse, on a : $\dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{t_0}$

$S(t) - S(t_0)$ est encadrée par l'aire de deux rectangles, de largeur $(t - t_0)$ et de hauteurs respectives $\dfrac{1}{t}$ et $\dfrac{1}{t_0}$:

$$\frac{t-t_0}{t} \leqslant S(t) - S(t_0) \leqslant \frac{t-t_0}{t_0}$$

On a donc : $$\frac{1}{t} \leqslant \frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0} \leqslant \frac{1}{t_0}$$

En passant à la limite lorsque t tend vers t_0, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que l'accroissement moyen $\dfrac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$ admet une limite en t_0 égal à $\dfrac{1}{t_0}$, la fonction S est donc dérivable à droite en t_0.

Cas 2 : $t \leqslant t_0$. Un raisonnement analogue à ci-dessus montre que S est dérivable à gauche en t_0.

Bilan : on a donc : $$S'(t_0) = \frac{1}{t_0}$$

Ce raisonnement étant valable pour tout réel t_0 de $[1, +\infty[$, on a donc pour tout x de $[1, +\infty[$:

$$S'(x) = \frac{1}{x}$$

Considérons maintenant la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$f(x) = S(x) - \ln x$$

La fonction f est dérivable sur $[1, +\infty[$ (car la fonction S et le logarithme népérien le sont) et on a :

$$f'(x) = S'(x) - (\ln x)' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

En conséquence, f est constante sur $[1, +\infty[$: $\quad f(x) = k$

Or, $$f(1) = S(1) - \ln 1 = 0$$

D'où $k = 0$ et f est nulle sur $[1, +\infty[$, on conclut : $\quad S = \ln$

On a montré que pour tout réel x de $[1, +\infty[$: $\quad \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln x$

On montre, de même, ce résultat pour $x \in \,]0\,;1[$.

Exercice :

Soit f la fonction définie sur [–1 ; 1] par : $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

1. Vérifier que la courbe C_f représentant f est le demi-cercle de centre O et de rayon 1 qui est situé dans le demi-plan des ordonnées positives.

2. En déduire : $$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

Solution :

1. Soit $M(x, y)$ un point de C_f . On a alors : $y = \sqrt{1-x^2} \geqslant 0$

   Donc M est situé dans le demi-plan des ordonnées positives.

   De plus : $OM^2 = x^2 + y^2 = x^2 + 1 - x^2 = 1$

   Et comme $OM \geqslant 0$ (c'est une distance) : $OM = 1$

   Donc M est situé sur le demi-cercle de centre O et de rayon 1 correspondant aux ordonnées positives.

   Réciproquement, soit $N(a, b)$ un point de ce demi-cercle. On a alors :

   $$b \geqslant 0 \text{ et } ON^2 = 1$$

   $$b \geqslant 0 \text{ et } a^2 + b^2 = 1$$

   $$b \geqslant 0 \text{ et } b^2 = 1 - a^2$$

   Et comme $a \in [-1, 1]$, on a $1 - a^2 \geqslant 0$, d'où : $b = \sqrt{1-a^2}$

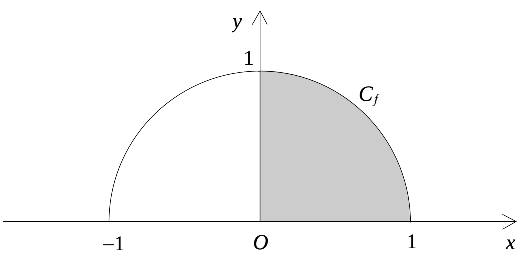
   $$b = f(a)$$

   $$N \in C_f$$

   On a montré que la courbe C_f coïncide avec le demi-cercle de centre O et de rayon 1 qui est situé dans le demi-plan des ordonnées positives.

2. La quantité $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ représente l'aire du domaine délimité par C_f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$. Ce domaine est un quart de disque de rayon 1. Son aire est donc égale à $\frac{\pi}{4}$:

   $$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \text{ u.a.}$$



1.3. Propriété *Calcul de l'aire située entre deux courbes*

Soient f et g deux fonctions continues et définies sur un segment $[a, b]$.

On suppose que : $0 \leqslant g \leqslant f$ sur $[a, b]$

Alors, l'aire du domaine D défini par

$$D = \{M(x, y) \in P \text{ tels que } a \leqslant x \leqslant b \text{ et } g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

est donnée, en u.a., par : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

Démonstration :

Notons, pour toute fonction continue f sur $[a, b]$:

$$D(f) = \{M(x, y) \in P \text{ tels que } a \leqslant x \leqslant b \text{ et } y \text{ compris entre 0 et } f(x)\}$$

Ainsi, on a la partition : $D(g) \amalg D = D(f)$ ($\amalg$: union disjointe)

En passant aux aires : $\text{Aire}(D(g)) + \text{Aire}(D) = \text{Aire}(D(f))$

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t + \text{Aire}(D) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

D'où le résultat.

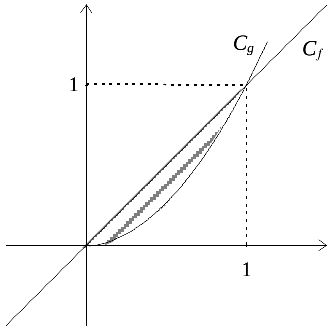
Exemple :

Avec f et g définies sur $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = x \text{ et } g(x) = x^2$$

L'aire D hachurée ci-contre est donnée par :

$$\text{Aire}(D) = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$



Exercice :

Démontrer que : $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$

(On pourra se placer dans un repère orthonormé et utiliser la fait que les courbes représentatives des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto \sqrt{x}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$)

1.4. Définition *Permutation des bornes*

Soit P un plan muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Soient a et b deux réels avec $a \leqslant b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$.

On convient alors que : $\displaystyle\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Autrement dit, permuter les bornes de l'intégrale change le signe de celle-ci.

2. Extension aux fonctions de signe quelconque sur un segment [*a*, *b*]

2.1. Définition *Cas d'une fonction négative*

Soit P un plan muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

Soient a et b deux réels avec $a \leqslant b$.

Soit f une fonction **continue** (ou **continue par morceaux**) et **négative** sur le segment $[a, b]$.

On appelle intégrale de f de a à b **l'opposé** de l'aire, exprimée en u.a., du domaine D suivant :

$$D = \{M(x, y) \in P \text{ tels que } a \leqslant x \leqslant b \text{ et } f(x) \leqslant y \leqslant 0\}$$

Cette quantité est encore notée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Autrement dit, lorsque f est négative sur $[a, b]$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Exemple :

Calculer l'intégrale : $\int_0^1 (-2x-2)\,\mathrm{d}x$

On vérifie que l'application $x \longmapsto (-2x-2)$ est bien négative sur $[0\,;1]$.

Le domaine $D = \{M(x, y) \in P$ tels que $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $f(x) \leqslant y \leqslant 0\}$ est ici un trapèze d'aire 3 u.a. (exercice)

Comme la fonction intégrée est négative sur $[0\,;1]$, on en déduit :

$$\int_0^1 (-2x-2)\,\mathrm{d}x = -3$$

2.2. Définition *Cas d'une fonction de signe quelconque*

Soit P un plan muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

Soient a et b deux réels avec $a \leqslant b$.

Soit f une fonction **continue** (ou continue par morceaux) sur le segment $[a, b]$.

On définit deux nouvelles fonctions continues[(1)] (ou continues par morceaux) f^+ et f^- par :

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } f(x) \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et } f^-(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } f(x) \leqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

(Évidemment f^+ est positive et f^- est négative)

On appelle alors intégrale de f de a à b la quantité

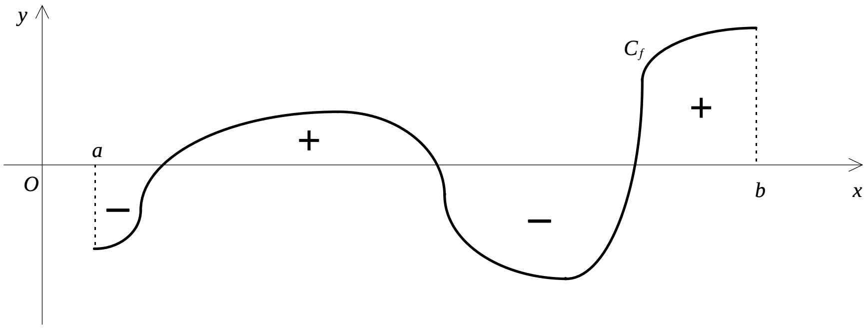
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f^+(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b f^-(t)\,\mathrm{d}t$$

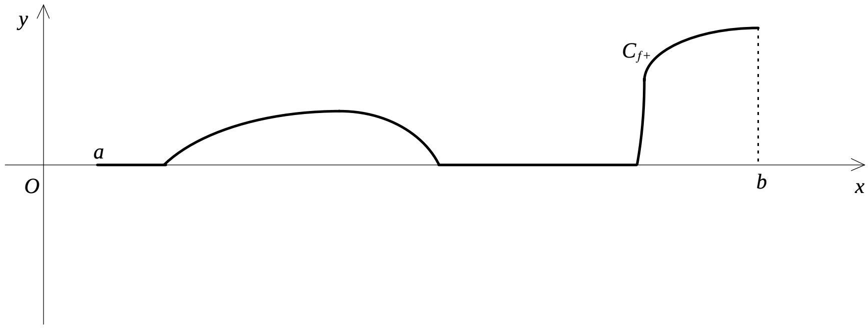
Cette dernière intégrale est négative (car f^- l'est).

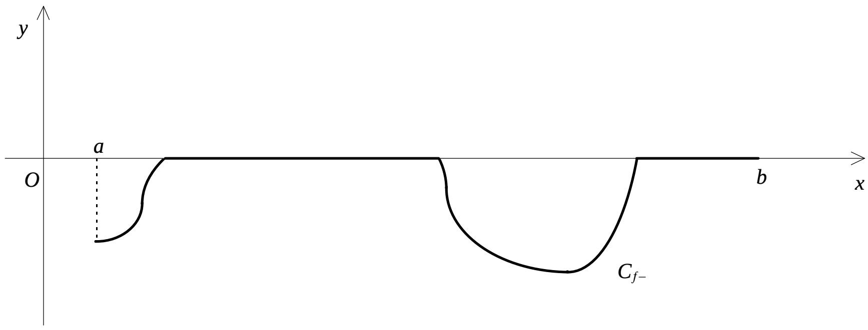
En d'autres termes, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ se calcule en comptant **positivement** l'aire des domaines où f est positive et **négativement** l'aire des domaines où f est négative.

(1) Le lecteur consciencieux pourra vérifier que $f^+ + f^- = f$ et $f^+ - f^- = |f|$. Il en déduira les relations $f^+ = \dfrac{f+|f|}{2}$ et $f^- = \dfrac{f-|f|}{2}$. Ensuite, comme f est supposée continue (ou continue par morceaux), l'application $|f|$ l'est également (par composition) ; et comme la somme (et la différence) de fonctions continues (ou continues par morceaux) l'est encore, on en déduit que les applications $f^+ = \dfrac{f+|f|}{2}$ et $f^- = \dfrac{f-|f|}{2}$ sont bien continues (ou continues par morceaux).

Illustration et représentation des fonctions f^+ et f^- :







Exemple :

Calculer : $I = \int_2^5 (x-3)\,\mathrm{d}x$

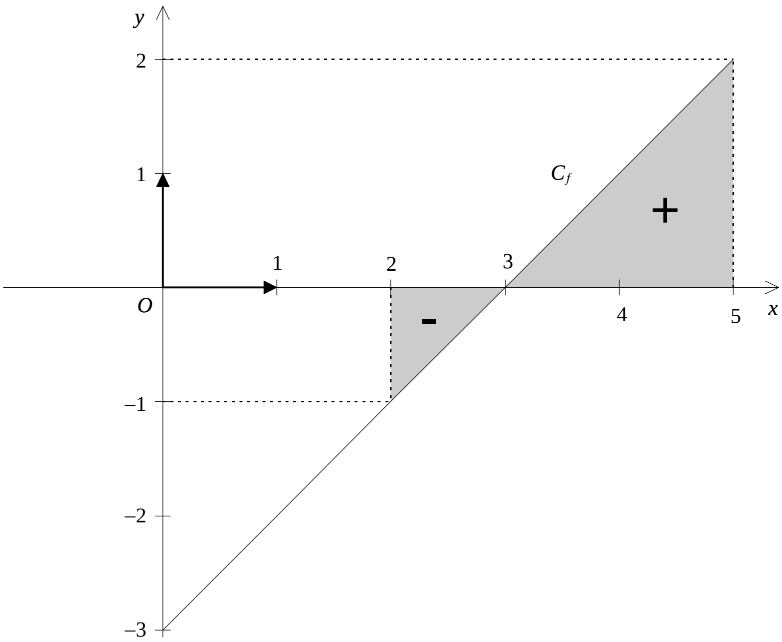
Après un calcul élémentaire, on obtient :

$$I = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

Calculer l'aire A du domaine hachuré.

Cette fois-ci :

$$A = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$



Remarques :

- L'intégrale (d'une fonction continue sur un segment) est donc une **aire algébrique**.
- On verra, plus loin, une méthode plus rapide de calcul des intégrales à l'aide des fonctions primitives.

3. Premières propriétés de l'intégrale d'une fonction f sur un segment [a, b]

3.1. Propriété *Positivité de l'intégrale*

Si f est continue et **positive** sur le segment $[a, b]$ avec $a \leqslant b$, alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

Démonstration :

C'est immédiat puisque une aire est positive.

Remarques :

Évidemment, si f est négative sur $[a, b]$ alors son intégrale est négative.

Par contre, on ne peut rien dire, *a priori*, du signe de l'intégrale d'une fonction changeant de signe sur $[a, b]$.

3.2. Propriété *Compatibilité avec l'ordre (intégration d'une inégalité)*

Si f et g sont continues sur le segment $[a, b]$ avec $a \leqslant b$ alors :

$$f \leqslant g \text{ sur } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration :

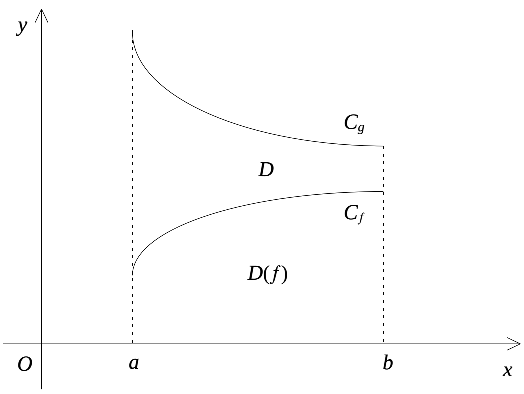
Étudions d'abord le cas où f et g sont positives (on a donc $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $[a, b]$) :

Notons pour toute fonction continue f sur $[a, b]$:

$$D(f) = \{M(x, y) \in P \text{ tels que } a \leqslant x \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

et

$$D = \{M(x, y) \in P \text{ tels que } a \leqslant x \leqslant b \text{ et } f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$$



Vu les hypothèses, on a la partition suivante :

$$D(g) = D(f) \coprod D$$

D'où : $$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{Aire}(D)$$

Et comme Aire(D) $\geqslant 0$, nous obtenons : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

Étudions maintenant le cas où f et g sont de signes quelconques sur $[a, b]$.

On suppose toujours que : $f \leqslant g$ sur $[a, b]$

Comme f est continue sur $[a, b]$, elle est bornée (et atteint ses bornes). Notons m le minimum de f sur $[a, b]$.

Ainsi les fonctions $f - m$ et $g - m$ sont positives sur $[a, b]$.

Il est clair que l'aire du domaine D compris entre les courbes de f et de g est égale à celle du domaine compris entre les courbes translatées de $f - m$ et $g - m$:

$$\text{Aire}(D) = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (g(t) - m)\,\mathrm{d}t - \int_a^b (f(t) - m)\,\mathrm{d}t$$

On en déduit, là encore que : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

<u>Exemple</u> :

1. Démontrer que pour tout réel $t \in \mathbb{R}_+$:

$$1 - t \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant 1$$

2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x$$

<u>Solution</u> :

1. Comme $t \in \mathbb{R}_+$, on peut écrire : $1 - t^2 \leqslant 1 \leqslant 1 + t$

$$(1 - t)(1 + t) \leqslant 1 \leqslant 1 + t$$

Et en divisant par $1 + t > 0$: $\displaystyle 1 - t \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant 1$

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En intégrant, entre 0 et x, l'encadrement ci-dessus, on obtient :

$$\int_0^x (1-t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x 1\,\mathrm{d}t$$

Or, l'aire sous la courbe représentant la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ entre les points d'abscisses 0 et x est la même (via une translation) que celle sous la courbe de la fonction inverse entre les points d'abscisses 1 et $x + 1$.

D'après le résultat obtenu lors de la quadrature de l'hyperbole, on a :

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{x+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(x + 1)$$

Par ailleurs, on calcule facilement :

$$\int_0^x (1-t)\,\mathrm{d}t = x - \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x$$

Naturellement, nous verrons plus loin des techniques plus pratiques pour calculer ces intégrales à l'aide des fonctions primitives.

D'où : $\displaystyle x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x$

3.3. Propriété *Inégalité triangulaire*

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ ($a \leqslant b$).

Alors : $$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Démonstration :

On a toujours : $$-|f| \leqslant f \leqslant |f| \text{ sur } [a, b]$$

En intégrant les inégalités entre a et b ($a \leqslant b$), on obtient :

$$-\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

D'où : $$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

3.4. Propriété *Relation de Chasles*

Soit f une fonction continue sur un segment I.

Soient a, b et c dans I.

Alors : $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration :

Notons P le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}\,)$.

Pour tous réels a et b de I, on note :

$$D(a, b) = \{M(x, y) \in P,\ a \leqslant x \leqslant b \text{ et } y \text{ compris entre } 0 \text{ et } f(x)\}$$

($D(a, b)$ est le domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équations respectives $x = a$ et $x = b$)

Distinguons plusieurs cas :

Cas $a \leqslant c \leqslant b$:

Dans ce cas, on a : $$D(a, b) = D(a, c) \amalg D(c, b)$$ ($\amalg$: union disjointe)

En passant aux aires, on obtient :

$$\text{Aire}(D(a, b)) = \text{Aire}(D(a, c)) + \text{Aire}(D(c, b))$$

D'où : $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Autres cas : ils se déduisent du précédent à l'aide de la relation $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Pour mémoire, démontrons l'un de ces autres cas, par exemple $a \leqslant b \leqslant c$.

D'après la relation de Chasles (cas précédent), on peut écrire :

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$$

D'où : $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t - \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarques :

Cette relation de Chasles sera utilisée dans les deux sens (comme sa cousine pour les vecteurs), soit pour décomposer une intégrale en deux (ou plus) soit pour regrouper plusieurs intégrales en une seule.

La relation de Chasles admet une généralisation par récurrence :

Pour tout $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dans I : $$\int_{a_0}^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple d'utilisation de la relation de Chasles : divergence de la série harmonique.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Soit $n \geqslant 2$. Comme l'application $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $]0 ; +\infty[$, on a, pour tout $k \geqslant 1$:

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$$

En sommant, pour k allant de 1 à n, la relation de Chasles donne :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

> La méthode ci-contre est une des plus efficace pour prouver la divergence vers $+\infty$ de la série harmonique.

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$, donc, par comparaison, la suite (u_n) diverge.

3.5. Propriété *Compatibilité avec l'addition*

Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b (f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration (Hors programme)

C'est un cas particulier de la linéarité de l'intégrale et c'est très délicat à prouver. Nous aurons besoin de deux lemmes importants sur les fonctions en escalier.

Lemme 1 *Propriété de compatibilité avec l'addition pour les fonctions en escaliers*

Soient φ et ψ deux fonctions en escaliers sur un segment $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b (\varphi(t) + \psi(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration (Hors programme)

Il existe donc un entier $m \in \mathbb{N}^*$ et des réels $a_0, \ldots, a_m$ vérifiant :

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = b$$

et tels que : $\forall k \in [\![0, m-1]\!]$, φ est constante sur $]a_k, a_{k+1}[$

De même, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et des réels $b_0, \ldots, b_n$ vérifiant :

$$a = b_0 < b_1 < \ldots < b_n = b$$

et tels que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, ψ est constante sur $]b_k, b_{k+1}[$

Notons $s_1 = \{a_0 ; \ldots ; a_m\}$, $s_2 = \{b_0 ; \ldots ; b_n\}$ et $s = s_1 \cup s_2$.

La subdivision s contient au maximum $m + n + 2$ abscisses distinctes et au minimum 2.

Notons $c_0, \ldots, c_r$ les éléments ordonnés de cette subdivision s ($1 \leqslant r \leqslant m + n + 1$).

Ainsi φ et ψ sont des constantes (notées λ_k et μ_k respectivement) sur chaque intervalle $]c_k, c_{k+1}[$ ($0 \leqslant k \leqslant r - 1$).

On a alors :

$$\int_a^b (\varphi(t)+\psi(t))\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{r-1}(\lambda_k+\mu_k)(c_{k+1}-c_k) = \sum_{k=0}^{r-1}\lambda_k(c_{k+1}-c_k) + \sum_{k=0}^{r-1}\mu_k(c_{k+1}-c_k) = \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t$$

(On a utilisé la propriété suivante :

l'intégrale d'une fonction en escalier e est indépendante de la subdivision adaptée à e)

<u>Lemme 2</u>

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$.

Il existe des fonctions en escaliers φ et ψ telles que :

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \text{ sur } I \quad \text{et} \quad \psi - \varphi \leqslant \varepsilon \text{ sur } I$$

<u>Démonstration</u> (Hors programme)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une subdivision régulière $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ du segment $[a, b]$ par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = a + k\frac{b-a}{n}$$

Comme f est continue sur $[a, b]$, elle l'est aussi sur chacun des segments $[a_k, a_{k+1}]$ ($0 \leqslant k \leqslant n - 1$), donc y est bornée, ce qui permet de définir : $M_k = \sup\limits_{t\in[a_k, a_{k+1}]} f(t)$ et $m_k = \inf\limits_{t\in[a_k, a_{k+1}]} f(t)$

On définit alors des applications en escalier φ et ψ sur $[a, b]$ par :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \forall t \in [a_k, a_{k+1}],\ \varphi(t) = m_k \text{ et } \psi(t) = M_k$$

et : $\varphi(b) = m_{n-1}$ et $\psi(b) = M_{n-1}$

Ainsi, on a bien : $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ sur $[a, b]$

Par ailleurs, f étant continue sur le segment $[a, b]$, elle y est **uniformément continue** (théorème de Heine) :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall (x, y) \in [a, b]^2,\ (|x - y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon)$$

Soit η le réel obtenu pour le réel ε fixé dans les hypothèses.

On sait que le pas de la subdivision est : $\dfrac{b-a}{n}$

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $(x, y) \in [a_k, a_{k+1}]$. On a donc :

$$|x - y| \leqslant a_{k+1} - a_k \leqslant \frac{b-a}{n}$$

Choisissons un pas plus fin que η, obtenu pour les entiers n qui vérifient :

$$n \geqslant \mathrm{E}\left(\frac{b-a}{\eta}\right)+1$$

Ainsi : $|x-y| \leqslant \eta$

De la continuité uniforme de f, on déduit : $|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$

Cette dernière inégalité étant valable pour tous x et y de $[a_k, a_{k+1}]$.

En particulier pour un x tel que $f(x) = M_k$ et un y tel que $f(y) = m_k$ (existent bien car f atteint ses bornes) :

$$M_k - m_k \leqslant \varepsilon$$

D'où $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$ sur chaque $[a_k, a_{k+1}]$ et donc sur $[a, b]$

Fin de la démonstration du lemme 2.

Prouvons maintenant la propriété de compatibilité avec l'addition :

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. D'après le lemme, il existe φ_1, φ_2, ψ_1 et ψ_2 en escaliers sur $[a, b]$ telles que :

$$\varphi_1 \leqslant f \leqslant \psi_1,\ \ \varphi_2 \leqslant g \leqslant \psi_2,\ \ \psi_1 - \varphi_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ et } \ \psi_2 - \varphi_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ sur } [a, b]$$

Posons : $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ et $\psi = \psi_1 + \psi_2$

φ et ψ sont alors des fonctions en escalier (ce n'est pas très difficile à prouver en considérant une subdivision adaptée à la fois à φ_1 et φ_2 (pour φ) ou ψ_1 et ψ_2 (pour ψ) ; il suffit pour cela de considérer la réunion des points de chacune des deux subdivisions)

Ainsi on a évidemment : $\varphi \leqslant f+g \leqslant \psi$ et $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$

De plus, d'après la propriété d'intégration d'une inégalité :

$$\int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \Psi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \varphi(t)+\varepsilon\,\mathrm{d}t$$

Et comme l'intégrale des fonctions en escaliers est compatible avec l'addition :

$$\int_a^b \varphi(t)+\varepsilon\,\mathrm{d}t = \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon(b-a)$$

D'après le lemme 1, comme φ est la somme des fonctions en escalier φ_1 et φ_2 :

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b \varphi_2(t)\,\mathrm{d}t$$

D'où :
$$\int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b \varphi_2(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon(b-a)$$

Et d'après la propriété d'intégration d'une inégalité, il vient finalement :

$$\int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon(b-a)$$

Par des arguments du même genre :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \psi_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b \psi_2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon(b-a) \leqslant \int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t + \varepsilon(b-a)$$

En faisant tendre ε vers 0 dans les deux inégalités, on obtient finalement :

$$\int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

D'autres propriétés seront évoquées plus loin après le paragraphe 4 sur les primitives.

4. Notion de primitive d'une fonction sur un intervalle

4.1. Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$ sur I.

Exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 - 2x + \cos x$

Trouver (mentalement) une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

La fonction F définie ci-après convient : $F(x) = x^3 - x^2 + \sin x$

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction F est dérivable (comme somme de fonctions qui le sont) et on a :

$$F'(x) = 3x^2 - 2x + \cos x = f(x)$$

Remarquons que si l'on avait choisi pour F la fonction définie par $F(x) = x^3 - x^2 + \sin x + 24$, nous aurions encore eu une candidate satisfaisante. Donc si une fonction f admet une primitive, alors elle en admet une infinité.

Remarque : la définition reste valable si I est une partie (non vide) de $\mathbb{R}$.

4.2. Théorème

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I.

Soient F et G deux primitives d'une fonction f sur un intervalle I.

Alors F et G diffèrent d'une constante :

$$F(x) = G(x) + c \quad (c \in \mathbb{R}) \text{ pour tout } x \in I$$

Démonstration :

Puisque F et G sont des primitives de f sur I, on a :

$$F' = G' = f \text{ sur } I$$

Par conséquent : $$F' - G' = 0 \text{ sur } I$$

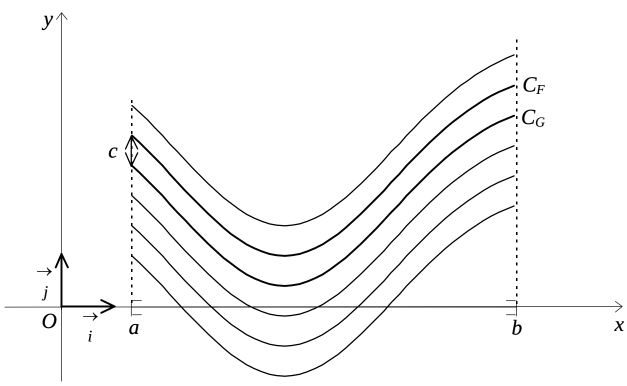
Or, $F' - G' = (F - G)'$ (c'est la linéarité de la dérivation).

Donc : $$(F - G)' = 0 \text{ sur } I$$

Or, les seules fonctions qui ont une dérivée nulle sont les fonctions constantes[1], donc on a, sur I, :

$$F - G = c \text{ où } c \text{ est une constante.}$$

Graphiquement, dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ les représentations graphiques C_F et C_G se correspondent par une translation de vecteur $c\,\vec{j}$.



[1] Ce résultat (qui a été admis en classe de première) se démontre à l'aide du théorème des accroissements finis.

4.3. Tableau des primitives usuelles

Les résultats de ces tableaux s'établissent en vérifiant que l'on a bien $F' = f$ sur l'intervalle considéré.

Fonction f	Fonction primitive F (c = constante)	Intervalle I
$f(x) = k$ (constante)	$F(x) = kx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$F(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{Z}^*$ et $n \neq -1)$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$; $]-\infty\,;0\,[$ ou $]0\,;+\infty[$ si $n \leqslant -2$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + c$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + c$	$\left]\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$
$f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$ $(\omega \neq 0)$	$F(t) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t + \varphi) + c$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ $(\omega \neq 0)$	$F(t) = -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \mathbf{e}^x$	$F(x) = \mathbf{e}^x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + c$	$]0\,;+\infty[$

Exemples : trouver une primitive :

- Fonction g définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = \tan^2 x$

  $\boxed{\tan^2 x \text{ représente } (\tan(x))^2.}$

  Posons : $h(x) = g(x) + 1 = 1 + \tan^2 x$

  Une primitive H de h sur I est définie par :

  $$H(x) = \tan x = x + G(x) \text{ où } G \text{ est une primitive de } g \text{ sur } I$$

  D'où : $G(x) = H(x) - x = \tan x - x$

- Fonction f définie sur $J = \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$f(x) = 2\sin(3x) - 3\cos(2x) + 4 + \tan^2 x - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2}$$

Une primitive F de f sur J est définie par :

$$F(x) = -\frac{2}{3}\cos(3x) - \frac{3}{2}\sin(2x) + 3x + \tan x - 6\sqrt{x} - \frac{2}{x} \ (+\ c)$$

4.4. Opérations sur les primitives

OPÉRATIONS SUR LES PRIMITIVES lorsque u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I		
Fonction	Une primitive	Conditions
$u' + v'$	$u + v$	
ku' (k : constante)	ku	
$u'u^n$ ($n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1$)	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$u \neq 0$ sur I si $n \leqslant 0$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$\dfrac{v'}{v^2}$	$-\dfrac{1}{v}$	$v \neq 0$ sur I
$u'\ \mathrm{e}^u$	e^u	
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$ $\ln(-u)$	si $u > 0$ sur I si $u < 0$ sur I
$u'\,(v' \circ u)$	$v \circ u$	

Exemple :

Trouver une primitive F de la fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

La fonction f est de la forme $u'\,u$. Donc F est de la forme $\frac{1}{2}u^2$:

$$F(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 \ \ (+\ c)$$

Exercice :

Soit F la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $\qquad F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

Calculer $F'(x)$. Qu'a-t-on démontré ?

4.5. Théorème *Primitive définie par une condition initiale*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I admettant des primitives sur I.

Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Il existe une unique primitive F de f sur I satisfaisant la condition initiale $F(x_0) = y_0$.

Démonstration :

Soit G une primitive de f sur I (existe par hypothèse).

D'après le théorème 4.2., toutes les primitives F de f sur I sont de la forme $F = G + c$ (où c est une constante)

La condition $F(x_0) = y_0$ impose $c = y_0 - G(x_0)$.

La constante c est déterminée de manière unique, ce qui démontre le théorème.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Trouver l'unique primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 2$.

Remarquons que $f(x)$ peut s'écrire : $f(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

On reconnaît l'expression dérivée de $\sqrt{x^2+1}$.

Les primitives F de f sur I sont de la forme : $F(x) = \sqrt{x^2+1} + c$

La condition initiale $F(0) = 2$ s'interprète par $\sqrt{0^2+1} + c = 2$ d'où $c = 1$.

Conclusion : la primitive cherchée est la fonction F définie par $F(x) = \sqrt{x^2+1} + 1$.

Remarque : une question légitime qui se pose dans ce paragraphe est la suivante : une fonction admet-elle toujours des primitives ? La réponse est non en général. Cependant si notre fonction est continue... Eh bien c'est ce que nous allons voir dans le paragraphe suivant.

5. Théorème fondamental du calcul intégral. Formule de Newton-Leibniz

Nous allons voir maintenant le théorème fondamental du calcul intégral qui aura pour conséquence que toute fonction continue admet des primitives.

5.1. Théorème

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I.

Soit $x_0 \in I$.

La fonction F définie sur I par

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est **l'unique primitive de f sur I s'annulant en x_0**.

Autrement dit :

$$F(x_0) = 0,\ F \text{ est dérivable sur } I \text{ et pour tout réel } x \in I : F'(x) = f(x)$$

Démonstration (Hors programme)

Le fait que $F(x_0)$ soit nul est une banalité.

Soit $x_1 \in I$. Nous allons montrer que l'accroissement moyen $\dfrac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1}$ admet une limite lorsque x tend vers x_1 et que cette limite est précisément $f(x_1)$.

Évaluons :

$$\left|\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1}-f(x_1)\right| = \frac{1}{|x-x_1|}\left|\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_{x_0}^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t-(x-x_1)f(x_1)\right|$$

En utilisant la relation de Chasles et la formule d'intégration pour une fonction constante, on peut écrire :

$$\left|\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1}-f(x_1)\right| = \frac{1}{|x-x_1|}\left|\int_{x_1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_{x_1}^{x} f(x_1)\,\mathrm{d}t\right|$$

Mais d'après la propriété de compatibilité avec l'addition :

$$\int_{x_1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_{x_1}^{x} f(x_1)\,\mathrm{d}t = \int_{x_1}^{x} (f(t)-f(x_1))\,\mathrm{d}t$$

D'où : $$\left|\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1}-f(x_1)\right| = \frac{1}{|x-x_1|}\left|\int_{x_1}^{x} (f(t)-f(x_1))\,\mathrm{d}t\right|$$

Et d'après l'inégalité triangulaire :

$$\left|\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1}-f(x_1)\right| \leqslant \frac{1}{|x-x_1|}\int_{x_1}^{x} |f(t)-f(x_1)|\,\mathrm{d}t$$

Or, f est continue en x_1 donc admet une limite finie en x_1. Cela signifie que tout intervalle ouvert et centré en $f(x_1)$ contient toutes les valeurs de $f(t)$ pour t assez proche de x_1 :

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $I =]f(x_1)-\varepsilon, f(x_1)+\varepsilon[$. Alors, il existe un réel η tel que pour tout $t \in]x_1-\eta, x_1+\eta[$, on ait :

$$f(t) \in]f(x_1)-\varepsilon, f(x_1)+\varepsilon[$$

C'est-à-dire : $$|f(t)-f(x_1)| < \varepsilon$$

D'où : $$\left|\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1}-f(x_1)\right| \leqslant \varepsilon$$

Comme ε peut être choisi aussi petit que voulu, on a bien :

$$\lim_{x\to x_1}\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} = f(x_1)$$

Donc, F est dérivable en x_1 et : $$F'(x_1) = f(x_1)$$

Et comme ce raisonnement est valable pour tout $x_1 \in I$, F est bien une primitive de f sur I.

Remarque : dans le cas où f est une fonction croissante sur I, il existe une démonstration plus simple (**cette démonstration est au programme et fait partie des connaissances exigibles**) :

Soit $x_1 \in I$ fixé. Nous allons montrer que l'accroissement moyen $\dfrac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1}$ admet une limite lorsque x tend vers x_1 et que cette limite est précisément $f(x_1)$.

Cas 1 : soit $x \in I$ avec $x > x_1$.

Pour tout $t \in I$ tel que $x_1 \leqslant t \leqslant x$, la croissance de la fonction f nous permet d'écrire :

$$f(x_1) \leqslant f(t) \leqslant f(x)$$

En intégrant cet encadrement entre x_1 et x, nous obtenons :

$$f(x_1)(x-x_1) \leqslant \int_{x_1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(x)(x-x_1)$$

Or, d'après la relation de Chasles :

$$\int_{x_1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_1}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \; - \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(x_1)$$

Puisque $x > x_1$, on peut donc écrire :

$$f(x_1) \leqslant \frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} \leqslant f(x)$$

Comme f est continue en x_1 : $\lim\limits_{\substack{x\to x_1\\ x>x_1}} f(x) = f(x_1)$

D'où, par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{\substack{x\to x_1\\ x>x_1}} \frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} = f(x_1)$$

<u>Cas 2</u> : soit $x \in I$ avec $x < x_1$.

Pour tout $t \in I$ tel que $x \leqslant t \leqslant x_1$, la croissance de la fonction f nous permet d'écrire :

$$f(x) \leqslant f(t) \leqslant f(x_1)$$

En intégrant cet encadrement entre x et x_1, nous obtenons :

$$f(x)(x_1-x) \leqslant \int_{x}^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(x_1)(x_1-x)$$

Or, d'après la relation de Chasles :

$$\int_{x}^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t \; - \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x_1) - F(x)$$

Puisque $x_1 > x$, on peut donc écrire :

$$f(x) \leqslant \frac{F(x_1)-F(x)}{x_1-x} \leqslant f(x_1)$$

Comme f est continue en x_1 : $\lim\limits_{\substack{x\to x_1\\ x<x_1}} f(x) = f(x_1)$

D'où, par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{\substack{x\to x_1\\ x<x_1}} \frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} = f(x_1)$$

<u>Bilan</u> : on a bien : $\lim\limits_{x\to x_1} \dfrac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} = f(x_1)$

Ceci étant valable pour tout $x_1 \in I$. Donc la fonction F est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$F'(x) = f(x)$$

Ce théorème admet les corollaires fondamentaux suivants :

5.2. Corollaire 1 *Existence de primitives pour les fonctions continues*

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Démonstration

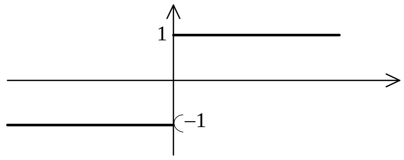
C'est immédiat car si f désigne une fonction continue sur I, une primitive F de f sur I est donnée par :

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \quad (x_0 \in I)$$

Question : une fonction non continue f peut-elle admettre des primitives sur ses intervalles de continuité ?

Réponse 1 : oui si f est continue par morceaux :

Par exemple : $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geqslant 0 \\ -1 \text{ sinon} \end{cases}$

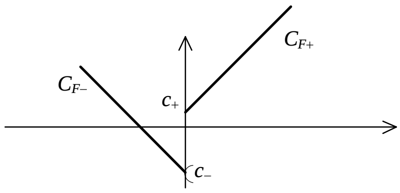


Sur $[0 ; +\infty[$, f admet des primitives F_+ de la forme : $F_+(x) = x + c_+$.

Sur $]-\infty, 0[$, f admet des primitives F_- de la forme : $F_-(x) = -x + c_-$.

Notons que l'on peut très bien choisir $c_+ \neq c_-$.

On peut alors construire une fonction F sur $\mathbb{R}$ qui est continue par morceaux : $F(x) = \begin{cases} x + c_+ \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x + c_- \text{ sinon} \end{cases}$



On peut même s'arranger pour que F soit continue, il suffit de recoller les morceaux en choisissant $c_+ = c_-$.

Cependant, F n'est pas une primitive de f sur $\mathbb{R}$ car non dérivable en 0.

Réponse 2 : non si f admet une infinité de discontinuités :

Par exemple :
$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

5.3. Corollaire 2 *Formule de Newton-Leibniz*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I. Alors pour tous a et b dans I :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Démonstration

Soit $x_0 \in I$ et G la primitive de f définie par : $G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

On sait que deux primitives F et G diffèrent d'une constante. Donc il existe un réel k tel que pour tout x de I :

$$F(x) = G(x) + k$$

On a alors :
$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Notation : la quantité $F(b) - F(a)$ se note très souvent $[F(t)]_a^b$ (c'est commode dans la pratique).

Exemples :

- $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$
- $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t = [\sin t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$
- $\displaystyle\int_0^1 \mathbf{e}^t\,\mathrm{d}t = \left[\mathbf{e}^t\right]_0^1 = \mathbf{e} - 1$
- $\displaystyle\int_x^1 \mathbf{e}^t\,\mathrm{d}t = \left[\mathbf{e}^t\right]_x^1 = \mathbf{e} - \mathbf{e}^x$
- $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln t]_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x$
- $\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$
- $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t = \int_1^x t^{-n}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1-n}}{1-n}\right]_1^x = \frac{1}{1-n}\left[\frac{1}{x^{n-1}} - 1\right]$
- $\displaystyle\int_2^{\mathbf{e}} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}t = \int_2^{\mathbf{e}} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,\mathrm{d}t = [\ln(\ln t)]_2^{\mathbf{e}} = -\ln(\ln 2)$

Commentaires :

Le choix de la primitive F choisie n'influe pas le résultat de l'intégrale. En effet, si F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur I, alors elles différent d'une constante. Les quantités $F(b) - F(a)$ et $G(b) - G(a)$ sont donc égales.

Application de la formule de Newton-Leibniz : une démonstration de l'inégalité des accroissements finis :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que f' soit continue sur I.

S'il existe un réel M tel que $|f'| \leqslant M$ sur I alors :

pour tous réels a et b de I, on a : $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a|$

Pour $a < b$, on a :

$$|f(b) - f(a)| = \left|\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a) \leqslant M|b-a|$$

Pour $a > b$, on a :

$$|f(b) - f(a)| = \left|\int_b^a f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_b^a |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M(a-b) \leqslant M|b-a|$$

Remarque : la démonstration traditionnelle de l'inégalité des accroissements finis (en étudiant les variations des fonctions $x \mapsto f(x) - Mx$ et $x \mapsto f(x) + Mx$) permet de se passer de la condition "f' continue sur I ".

5.4. Propriété *Linéarité de l'intégrale*

Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$ et k un réel. Alors :

$$\int_a^b \big(f(t)+g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_a^b k\,f(t)\,\mathrm{d}t = k\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration :

La première égalité a déjà été démontrée (compatibilité avec l'addition)

La deuxième, qui n'a encore jamais été utilisée dans les démonstrations précédentes se prouve facilement avec la formule de Newton-Leibniz. Soit F une primitive de f sur $[a, b]$. Alors, une primitive de kf est kF d'où :

$$\int_a^b k\,f(t)\,\mathrm{d}t = kF(b) - kF(a) = k[F(b) - F(a)] = k\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple :

Calculer : $$I = \int_0^1 \mathbf{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$$

Il suffit d'écrire, par linéarité : $$I = \frac{1}{3}\int_0^1 3\mathbf{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$$

Comme une primitive de $x \longmapsto 3\,\mathbf{e}^{3x}$ sur $[0, 1]$ est $x \longmapsto \mathbf{e}^{3x}$, nous avons :

$$I = \frac{1}{3}\left[\mathbf{e}^{3x}\right]_0^1 = \frac{\mathbf{e}^3 - 1}{3}$$

Exercice simple :

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = -x + 5 - 2\dfrac{\ln x}{x}$. On note C_f son graphe.

1. Démontrer que C_f admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$ dont on précisera son équation ainsi que sa position par rapport à C_f.
2. Étudier les variations de f. (On étudiera le signe de $g : x \longmapsto -x^2 - 2 + 2\ln x$)
3. Calculer une primitive F de f et déterminer l'aire A (en u.a.) du domaine :

$\{(x\,;y)$ tels que $1 \leqslant x \leqslant \mathbf{e}$ et $f(x) \leqslant y \leqslant -x + 5\}$ (Réponse : $\left[(\ln x)^2\right]_1^{\mathbf{e}} = 1$)

6. Parité et périodicité

6.1. Théorème (Parité)

Soit f une fonction continue sur un intervalle symétrique $[-a, a]$.

- Si f est paire alors : $$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$$
- Si f est impaire alors : $$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

6.2. Théorème (Périodicité)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique. Alors, pour tout réel a :

$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstrations :

Relation de Chasles puis changement de variable ($x = -t$) pour la parité.

Périodicité : encore d'après la relation de Chasles :

$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t + \int_T^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

En posant $u = t - T$, dans la troisième intégrale, on obtient ($\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$) : $\int_T^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(u+T)\,\mathrm{d}u$

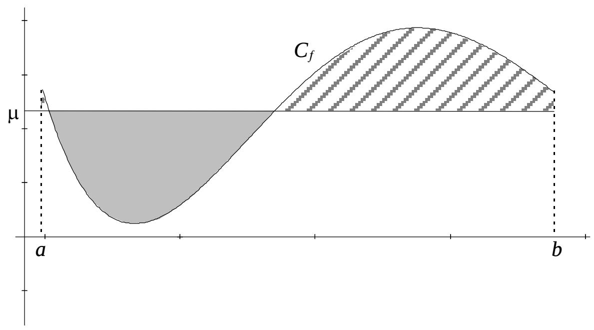
Et comme f est T-périodique : $f(u + T) = f(u)$ pour tout u, d'où $\int_0^a f(u+T)\,\mathrm{d}u = \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u$

Et finalement : $$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple : $$\int_{-1}^{1} \frac{x^{92}(\cos x)^{27}\sin x}{(x^2+1)^{28}}|x|\,\mathrm{d}x = 0$$

7. Valeur moyenne d'une fonction f sur un segment $[a, b]$

Introduction : supposons que l'on veuille niveler un terrain dont le profil n'est pas horizontal (de sorte que les remblais compensent exactement les déblais). Comment procéder ?



Notons f la fonction représentant le profil. On cherche dont une constante μ vérifiant :

$$\mu(b-a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

On a donc : $$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

7.1. Définition

Soit f une fonction continue sur un segment $I = [a, b]$.

On appelle valeur moyenne de f sur l'intervalle I le nombre réel μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

On note souvent $\overline{f}$ au lieu de μ.

Exemple : Soit f le signal sinusoïdal 2π-périodique défini par : $f(t) = \sin t$.

Calculer la moyenne $\overline{f}$ sur $[0, 2\pi]$ ainsi que la moyenne quadratique $\sqrt{\overline{f^2}}$ sur $[0, 2\pi]$.

$$\overline{f} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\overline{f^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} 1-\cos(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi}\left[t\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \text{ d'où } \sqrt{\overline{f^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Lien avec l'électricité :

On appelle intensité efficace I_{eff} d'un courant alternatif, l'intensité d'un courant continu (on devrait plutôt dire "constant") qui produirait, à travers la même résistance R, le même effet calorifique pendant la durée d'une période T. Dans le cas d'un courant de type sinusoïdal :

si $I(t) = I_{\max}\sin(\omega t)$ est l'intensité du courant à l'instant t du courant alternatif, la loi de Joule donne :

$$E(T) = R\,I_{\text{eff}}^2\,T = \int_0^T RI^2(t)\,\mathrm{d}t$$

D'où :

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T I_{\max}^2\sin^2(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{I_{\max}^2}{2T}\int_0^T 1-\cos(2\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{I_{\max}^2}{2T}\left[t\right]_0^T = \frac{I_{\max}^2}{2}$$

D'où la relation :

$$I_{\max} = \sqrt{2}\,I_{\text{eff}}$$

7.2. Théorème (inégalité de la moyenne)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$.

Soit m et M des réels tels que : $\quad m \leqslant f \leqslant M$ sur I

Alors : $$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a)$$

Une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ est toujours bornée (et de plus atteint ses bornes). Les réels m et M ci-contre existent donc toujours.

Le nom de ce théorème est légitime, en effet, on peut le reformuler ainsi : si $m \leqslant f \leqslant M$ alors $m \leqslant \mu \leqslant M$.

Démonstration : il suffit d'intégrer l'inégalité $m \leqslant f \leqslant M$ sur $[a, b]$.

Exemple : à l'aide de l'inégalité de la moyenne, on peut retrouver l'inégalité :

$$x + 1 \leqslant \mathbf{e}^x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Comme la fonction exponentielle est croissante sur $[0 ; x]$, on a pour tout $t \in [0 ; x]$:

$$1 \leqslant \mathbf{e}^t \leqslant \mathbf{e}^x$$

Et d'après l'inégalité de la moyenne appliquée à la fonction $f : t \mapsto \mathbf{e}^t$ sur l'intervalle $[0 ; x]$:

$$x \leqslant \int_0^x \mathbf{e}^t\,\mathrm{d}t \leqslant x\,\mathbf{e}^x$$

$$x \leqslant \mathbf{e}^x - 1 \leqslant x\,\mathbf{e}^x$$

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $$x + 1 \leqslant \mathbf{e}^x$$

Si maintenant x est un réel négatif, on a pour tout $t \in [x\,;\,0]$:

$$\mathbf{e}^x \leqslant \mathbf{e}^t \leqslant 1$$

Et d'après l'inégalité de la moyenne : $$-x\,\mathbf{e}^x \leqslant \int_x^0 \mathbf{e}^t\,\mathrm{d}t \leqslant -x$$

$$1 - \mathbf{e}^x \leqslant -x$$

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}_-$: $$x + 1 \leqslant \mathbf{e}^x$$

Bilan : on a bien, pour tout réel x : $$x + 1 \leqslant \mathbf{e}^x$$

Comme le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a une version avec valeurs absolues :

> 7.2. bis. Théorème (inégalité de la moyenne)
>
> Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$.
>
> $$\text{Si } |f| \leqslant M \text{ sur } I \text{ alors } \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M|b-a|$$

Démonstration :

D'après la première version, on a : $$-M(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a)$$

La distance entre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et 0 est donc inférieure à celle entre $M(b-a)$ et 0 d'où :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M|b-a|$$

Notons que ce théorème peut se démontrer aussi avec l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $\mathscr{F}$ définie par : $$\mathscr{F}(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple : démontrer que pour tous réels x et y :

$$|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$$

On applique l'inégalité de la moyenne à la fonction $t \mapsto \cos t$ sur l'intervalle $[x\,;\,y]$ (si $x \leqslant y$) ou $[y\,;\,x]$ sinon.

Comme on a pour tout réel t : $$-1 \leqslant \cos t \leqslant 1$$

On obtient lorsque $x \leqslant y$: $$\left|\int_x^y \cos t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |y - x|$$

$$|\sin y - \sin x| \leqslant |y - x|$$

Et lorsque $y \leqslant x$: $$\left|\int_y^x \cos t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |x - y|$$

$$|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$$

Ce qui est la même inégalité que celle obtenue pour $x \leqslant y$.

Exercice : démontrer la "première formule de la moyenne"

Soient f et g deux fonctions continues définies sur un intervalle $[a, b]$ avec g positive. Alors

$$\text{Il existe } c \text{ dans } [a, b] \text{ tel que } \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Comme f est continue sur le segment $[a, b]$, il existe des constantes m et M telles que :

$$m \leqslant f \leqslant M \text{ sur } [a, b]$$

Comme g est positive : $$m\,g \leqslant f\,g \leqslant M\,g \text{ sur } [a, b]$$

En intégrant cet encadrement entre a et b ($a < b$) :

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

- Si $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, alors la formule de la moyenne est évidente (tout c de $[a, b]$ convient)
- Si $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$, alors on pose : $$\lambda = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$$

  Comme $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$ (puisque g l'est), on a : $m \leqslant \lambda \leqslant M$

  Et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

  D'où le résultat.

8. Intégration par parties

On dit qu'une fonction f est de classe C^1 sur un intervalle I si elle est dérivable sur I et si sa dérivée f' est continue sur I.

8.1. Théorème

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration : on sait que pour tout $t \in [a, b]$:

$$(uv)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$$

En intégrant de a à b : $$\int_a^b (u(t)v(t))'\,\mathrm{d}t = \int_a^b u'(t)v(t) + u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Et d'après la linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b (u(t)v(t))'\,\mathrm{d}t = \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$[u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

D'où le théorème.

<u>Exemples</u> : calculer $I = \int_0^1 t\mathbf{e}^t \, \mathrm{d}t$ et $J(x) = \int_1^x \ln t \, \mathrm{d}t$

On pose : $u(t) = t$ $\quad v'(t) = \mathbf{e}^t$

$u'(t) = 1$ $\quad v(t) = \mathbf{e}^t$ (à une constante près)

D'où : $$I = \left[t\mathbf{e}^t\right]_0^1 - \int_0^1 \mathbf{e}^t \, \mathrm{d}t = \mathbf{e} - (\mathbf{e} - 1) = 1$$

On pose : $u(t) = \ln t$ $\quad v'(t) = 1$

$u'(t) = \dfrac{1}{t}$ $\quad v(t) = t$ (à une constante près)

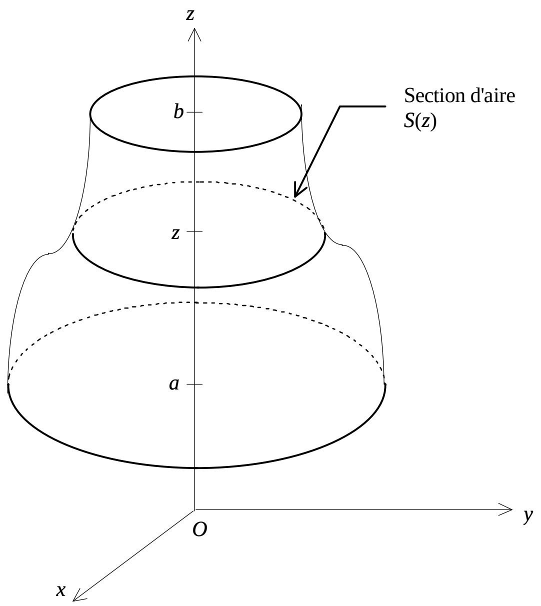
On a déterminé ici une primitive de la fonction logarithme.

D'où : $$J(x) = \left[t \ln t\right]_1^x - \int_1^x \mathrm{d}t = x \ln x - (x-1) = x \ln x - x + 1$$

9. Calcul de volumes

Dans l'espace muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère un solide délimité par des **plans parallèles** d'équation $z = a$ et $z = b$. Si la fonction S qui, à toute cote z associe l'aire de la section contenue dans le plan perpendiculaire à l'axe $(O, \vec{k})$ est **continue** sur $[a\,;\,b]$ alors le volume V du solide est donné par la formule :

$$V = \int_a^b S(z) \, \mathrm{d}z \text{ u.v.}$$



(L'unité de volume est le volume du parallélépipède unité)

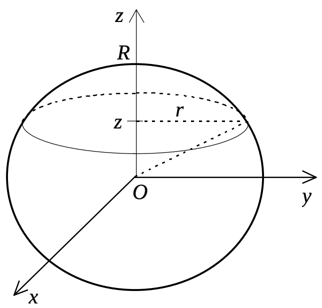
<u>Exemples</u> :

- Volume d'une sphère de rayon R :

  On a $r^2 = R^2 - z^2$, d'où $S(z) = \pi(R^2 - z^2)$

  $$V = \pi \int_{-R}^{R} R^2 - z^2 \, \mathrm{d}z = 2\pi \int_0^R R^2 - z^2 \, \mathrm{d}z = 2\pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_0^R$$

  $$V = 2\pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ u.v.}$$

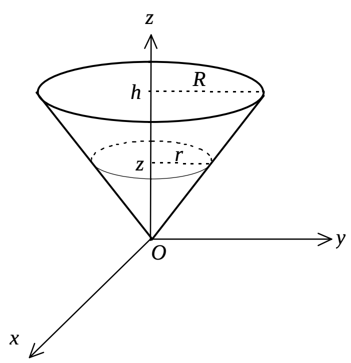


- Volume d'un cône de hauteur h et de rayon de base R : $S(z) = \pi r^2$.

  D'après le théorème de Thalès : $\dfrac{r}{R} = \dfrac{z}{h}$

  Donc $S(z) = \pi \dfrac{R^2}{h^2} z^2$.

  $$V = \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h z^2 \, \mathrm{d}z = \frac{\pi R^2 h}{3} \text{ u.v.}$$



10. Vrai ou faux ?

f et g désignent des fonctions continues sur les intervalles considérés.

- Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ alors $f \leqslant g$ sur $[a, b]$ (Faux : $\int_0^1 t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{3}{4}\,\mathrm{d}t$ et pourtant $t \not\leqslant \frac{3}{4}$ sur $[0 ; 1]$!)
- Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ alors $f = g$ sur $[a, b]$ (Faux : prendre $f(t) = t$ et $g(t) = -t$ sur $[-1 ; 1]$)
- $\int_1^2 \frac{x^2 \mathbf{e}^x \ln(1+x^2)}{(1+x^4)}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ (Vrai : positivité)

11. Quelques exercices

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$ (Linéariser : $\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$)
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}$ (Linéariser : $\cos^3 t = \frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{3}{4}\cos(t)$)
- $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin t|\,\mathrm{d}t = 2$ (Utiliser Chasles : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}$ ce qui permet de supprimer les valeurs absolues)
- $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$ (Intégrer deux fois par parties de façon à retomber sur l'intégrale I)
- $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n\,\mathrm{d}t$ (intégrales de Wallis, voir complément 3)

  Calculer I_0 et I_1. Établir une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n.

  Calculer J_0. Établir une relation de récurrence entre J_{n+1} et J_n.

  (On trouve $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$. Intégrer I_{n+2} par parties, en écrivant que $\sin^{n+2} x = \sin^{n+1} x \times \sin x$. On peut alors exprimer I_{n+2} en fonction de I_n. On trouve : $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$. On trouve $J_0 = 2$. Puis on intègre J_{n+1} par parties, en écrivant $(t^2-1)^{n+1} = 2t \times \frac{1}{2} t (t^2-1)^n - (t^2-1)^n$. On peut alors exprimer J_{n+1} en fonction de J_n. On trouve : $J_{n+1} = -\frac{2n+2}{2n+3} J_n$)

- Trouver un réel α tel que $\int_{-1}^{1} x^2 - \alpha\,\mathrm{d}x = 0$.

  Trouver un réel β tel que $\int_{-1}^{1} x^4 - \beta x^2\,\mathrm{d}x = 0$. ($\alpha = \frac{1}{3}$ et $\beta = \frac{3}{5}$)

- Étudier la limite suivante : $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. (On trouve ln 2 et non 0...)

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction I_n définie pour $x > 0$ par : $I_n(x) = \int_0^x t^n \mathbf{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. On note $I_n = \lim\limits_{x \to +\infty} I_n(x)$.

  (On admettra que cette limite est réelle)

  À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_{n+1} = (n+1)I_n$.

  Calculer I_0 et en déduire, par récurrence, que $I_n = n!$

Soit α un nombre réel quelconque.

Soit $\varepsilon > 0$ et $A > 1$. On considère les intégrales suivantes :

$$I_\alpha(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_\alpha(A) = \int_1^A \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

Le but du problème est de déterminer :

- les valeurs de α pour lesquelles I_α admet une limite finie lorsque ε tend vers 0.
- les valeurs de α pour lesquelles J_α admet une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$.

Étude de I_α

1. Étude du cas $\alpha = 1$
   a) Démontrer que $I_1(\varepsilon) = -\ln \varepsilon$.
   b) En déduire $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} I_1(\varepsilon)$.
2. Étude du cas $\alpha \neq 1$
   a) Démontrer que : $$I_\alpha(\varepsilon) = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$
   b) En écrivant $\varepsilon^{1-\alpha} = \mathbf{e}^{(1-\alpha)\ln\varepsilon}$, déterminer les valeurs du réel α pour lesquelles $\varepsilon^{1-\alpha}$ admet une limite finie lorsque ε tend vers 0.
   c) Conclure : I_α admet une limite finie lorsque ε tend vers 0 si et seulement si ....

Remarque : on note dans ce cas $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ cette limite et on a donc $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha}$

Étude de J_α

1. Étude du cas $\alpha = 1$
   a) Démontrer que $J_1(A) = \ln A$.
   b) En déduire $\lim\limits_{A \to +\infty} J_1(A)$.
2. Étude du cas $\alpha \neq 1$
   a) Démontrer que : $$J_\alpha(A) = \frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$
   b) En écrivant $A^{1-\alpha} = \mathbf{e}^{(1-\alpha)\ln A}$, déterminer les valeurs du réel α pour lesquelles $A^{1-\alpha}$ admet une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$.
   c) Conclure : I_α admet une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$ si et seulement si ....

Remarque : on note dans ce cas $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ cette limite et on a donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}$

<u>RÉSUMÉ</u>

$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ existe si et seulement si $\alpha < 1$. (On dit alors que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge)

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ existe si et seulement si $\alpha > 1$. (On dit alors que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge)

Complément 2 : fonction Γ

On considère la fonction Γ définie pour tout réel x de $]0, +\infty[$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathbf{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$$

Dans tout ce qui suit x est un réel strictement positif **fixé**.

1. Justification de l'écriture $\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathbf{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$

   a) **Étude en 0**. On considère la fonction I_x définie pour tout ε de $\mathbb{R}_+^*$ par :

   $$I_x(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 t^{x-1}\mathbf{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$$

   i) Démontrer que pour tout réel t de $[\varepsilon ; 1]$, on a :

   $$0 \leqslant t^{x-1}\mathbf{e}^{-t} \leqslant \frac{1}{t^{1-x}}$$

   ii) En déduire (en utilisant les résultats sur les intégrales de Riemann) que I_x admet une limite finie lorsque ε tend vers 0.

   On note $\int_0^1 t^{x-1}\mathbf{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ cette limite.

   b) **Étude au voisinage de +∞**. On considère la fonction J_x définie pour tout réel X de $]1, +\infty[$ par :

   $$J_x(X) = \int_1^X t^{x-1}\mathbf{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$$

   i) Démontrer qu'il existe un réel A positif tel que pour tout réel t de $[A, +\infty[$:

   $$0 \leqslant t^{x+1}\mathbf{e}^{-t} \leqslant 1$$

   (On pourra utiliser le fait que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{x+1}\mathbf{e}^{-t} = 0$)

   En déduire que pour tout réel t de $[A, +\infty[$:

   $$0 \leqslant t^{x-1}\mathbf{e}^{-t} \leqslant \frac{1}{t^2}$$

   ii) On suppose ici que $X \geqslant A$. En écrivant $J_x(X) = J_x(A) + \int_A^X t^{x-1}\mathbf{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$, démontrer (en utilisant les résultats sur les intégrales de Riemann) que J_x admet une limite finie lorsque X tend vers +∞.

   On note $\int_1^{+\infty} t^{x-1}\mathbf{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ cette limite.

   Comme les intégrales $\int_0^1 t^{x-1}\mathbf{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} t^{x-1}\mathbf{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ ont toutes les deux un sens, la fonction Γ est donc bien définie et l'écriture $\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathbf{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ a bien un sens.

2. Propriétés de la fonction Γ

   a) Calculer $\Gamma(1)$.

   b) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : pour tout $x > 0$:

   $$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

   c) Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Complément 3 : intégrales de Wallis

Il s'agit, pour $n \in \mathbb{N}$, des intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \, dt \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \, dt \qquad K_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, dt \qquad L_n = \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n \, dt$$

Calcul de I_n par IPP

On a immédiatement : $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = 1$.

Pour tout $n \geqslant 0$, on a par IPP : $(u(t) = (\cos t)^{n+1}$ et $v'(t) = \cos t)$

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+1} \cos t \, dt = \Big[(\cos t)^{n+1} \sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n (\sin t)^2 \, dt$$

$$I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$$

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

$$\left(\text{Variante : } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \text{ pour tout } n \geqslant 2\right)$$

On en déduit immédiatement : $I_2 = \dfrac{1}{2} I_0 = \dfrac{\pi}{4}$; $I_3 = \dfrac{2}{3} I_1 = \dfrac{2}{3}$; $I_4 = \dfrac{3}{4} I_2 = \dfrac{3\pi}{16}$

Formule générale :

Si n pair ($n = 2p$)

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \dots \times \frac{1}{2} I_0$$

$$I_{2p} = \frac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}(p!)^2} = \frac{\binom{2p}{p}\pi}{2^{2p+1}}$$

Si n impair ($n = 2p+1$)

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \dots \times \frac{2}{3} I_1$$

$$I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

Calcul de J_n en se ramenant à I_n

En posant $u = \dfrac{\pi}{2} - t$, on obtient :

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)^n (-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^n \, du = I_n$$

Calcul de K_n en se ramenant à I_{2n+1}

En posant $u = \text{Arcsin } t$. (Bijection de $[-1 ; 1]$ dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$). On a donc : $t = \sin u$.

$$K_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2n} \cos u \, du = 2\, I_{2n+1} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Calcul de L_n en se ramenant à K_n

$$L_n = \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n \, dt = (-1)^n K_n = \frac{(-1)^n 2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Équivalent des intégrales de Wallis lorsque n tend $+\infty$

On raisonne avec la suite (I_n).

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$: $\quad 0 \leqslant \cos^{n+1} t \leqslant \cos^n t$

En intégrant pour t allant de 0 à $\frac{\pi}{2}$: $\quad 0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$

En conséquence, la suite (I_n) est décroissante.

On a donc : $\quad 0 \leqslant I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$

Et comme $I_{n+2} > 0$: $\quad 1 \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leqslant \frac{I_n}{I_{n+2}}$

Or, on a vu que : $\quad \frac{I_n}{I_{n+2}} = \frac{n+2}{n+1} \qquad (1)$

D'où : $\quad 1 \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leqslant \frac{n+2}{n+1}$

Par encadrement, on en déduit que $\frac{I_{n+1}}{I_{n+2}}$ admet une limite égale à 1 en $+\infty$.

Autrement dit : $\quad I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n+1} \qquad (2)$

Montrons enfin que la suite (u_n) définie par $u_n = (n+1)I_n\, I_{n+1}$ est constante :

$$u_{n+1} = (n+2)\, I_{n+1}\, I_{n+2} \overset{(1)}{=} (n+1)\, I_n\, I_{n+1} = u_n$$

La suite (u_n) est donc bien constante.

Et comme $u_0 = I_0\, I_1 = \frac{\pi}{2}$, on a, pour tout entier n : $\quad u_n = \frac{\pi}{2}$

En multipliant l'équivalent (2) par $(n+1)I_n$:

$$(n+1)\, I_n^2 \underset{+\infty}{\sim} u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$$

D'où : $\quad I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

On retiendra ce résultat très utile : $\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$