

5 المكثفات

5.1 مقدمة :

قبل دراسة المكثفات من المفيد أن نعود و نذكر سريعاً بمفهوم الجهد الكهربائي. فإذا وضعت شحنة ما في مجال كهربائي ناتج عن شحنة أخرى ثم أزيحت هذه الشحنة إلى نقطة داخل المجال فإن شغلًا يكون قد بذل ضد قوة المجال. هذا الشغل يمثل الزيادة في طاقة الوضع للشحنة. النسبة بين الزيادة في طاقة الوضع والشحنة التي تحركت بين النقطتين تسمى بفرق الجهد، (V) بين هاتين النقطتين، ولهذا يعرف فرق الجهد بين نقطتين بأنه الشغل المبذول لنقل وحدة الشحنة الموجبة بين هاتين النقطتين ضد اتجاه المجال. يمكن إعطاء فرق الجهد بين نقطتين (U_{AB}) بالعلاقة:

$$U = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

حيث (dr) هي عنصر المسافة.

وعندما لا يمر تيار كهربائي في الدائرة فإن فرق الجهد يسمى عندها بالقوة الدافعة الكهربائية (\mathcal{E}).

5.2 تعريف المكثفات:

يتركب المكثف في أبسط صورة من سطحين من مادة موصلة بينهما عازل. والمكثف يعتبر من العناصر المهمة في تركيب الدوائر الكهربائية والإلكترونية. وظيفة المكثف في أية دائرة كهربائية هي تخزين الشحنة الكهربائية وبالتالي طاقة الوضع الكهربائية.

5.3 سعة المكثف:

نعني بسعة المكثف (C) مقدرة على تخزين الشحنة الكهربائية لوحدة الجهد (U)، أي أن:

تقاس الشحنة الكهربائية بوحدة تسمى الفاراد (F)، الذي يمثل $C = \frac{Q}{U}$ النسبة بين الكولوم والفولت. سطح المكثف يحمل أحدهما شحنة (+Q) والآخر شحنة (-Q).

لحساب سعة أي مكثف يجب أن نحسب شدة المجال الكهربائي (E) من أجل حساب قيمة فرق الجهد بين السطحين، ثم نعوض في معادلة السعة السابقة.

5.4 أنواع المكثفات:

تصنف المكثفات أما وفقاً لشكلها الهندسي أو وفقاً لنوع المادة العازلة أو وفقاً للقطبية.

أولاً: وفقاً لنوع العازل:

من أنواع المكثفات، وفقاً لهذا التصنيف، المكثف الهوائي والمكثف الورقي والمكثف البلاستيكي ومكثف المايكا وغيرها.

ثانياً: وفقاً للقطبية:

تنقسم المكثفات حسب قطبيتها إلى نوعين هما المكثف المستقطب والمكثف غير المستقطب الذي ليس له قطب موجب وآخر سالب.

ثالثاً: حسب الشكل الهندسي:

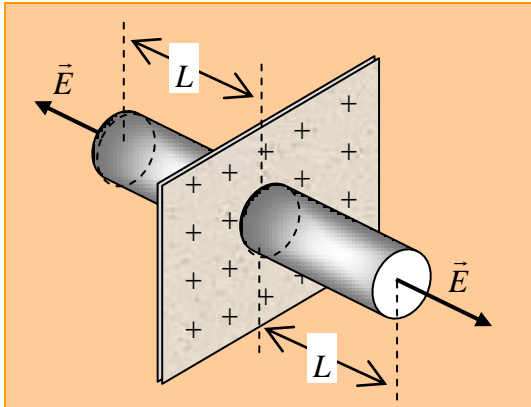
(1) المكثف ذو اللوحين المتوازيين:

قبل التطرق للمكثف ذو اللوحين لنبين أن نعود للدرس السابق و نذكر بالحقل الكهربائي في نقطة من الفضاء و الناتج عن توزيع مستمر للشحنة بكثافة شحنية سطحية σ

$$\Phi_s(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2E \int_A dS = 2EA'$$

$$\Phi_s = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\text{داخل الأسطوانة}} q_i = \frac{\sigma A'}{\epsilon_0}$$

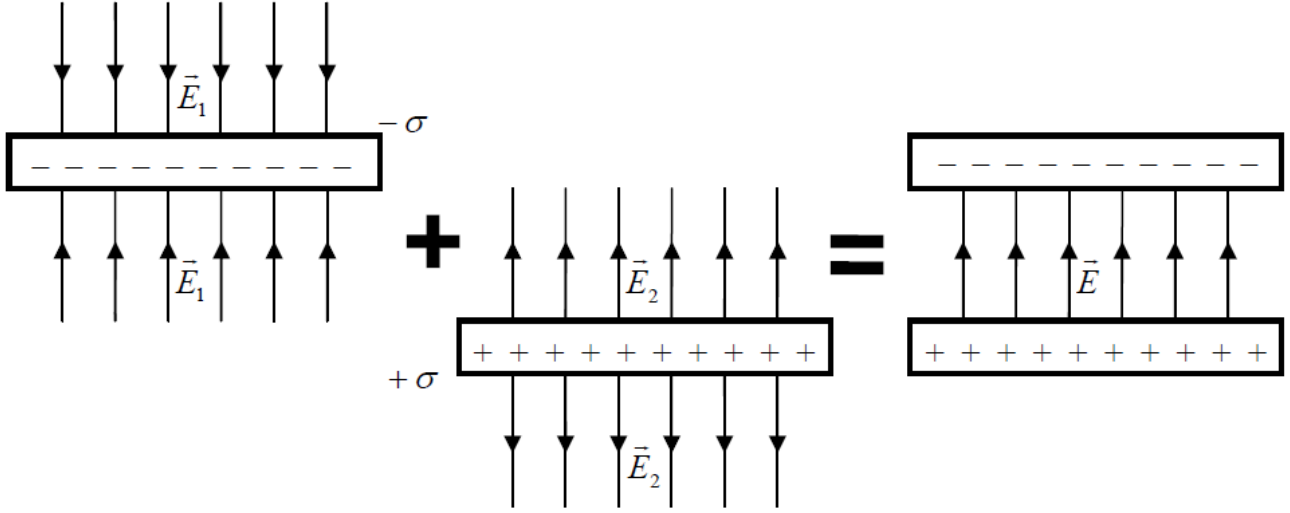
$$2EA = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} A' \rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



الشكل (1)

المكثف المستوي يتكون من لوحين معدنيين متوازيين تفصل بينهما مسافة صغيرة (d) مقارنة بأبعادهما. فإذا كانت مساحة اللوح الواحد (A)

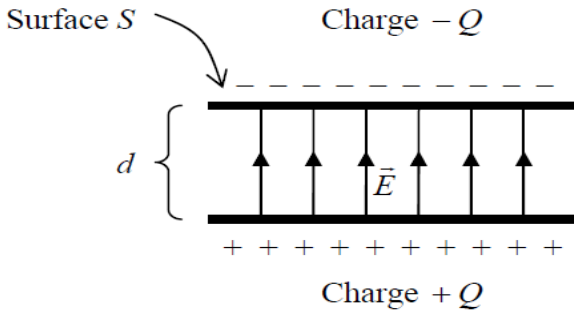
$$\sigma = \frac{-Q}{A} \quad \text{العلوي} \quad \sigma = \frac{+Q}{A} \quad \text{السفلي} \quad \text{والشحنة على اللوح السفلي (+Q) بكثافة سطحية}$$



فإن شدة المجال الكهربائي بين اللوحين، حسب قانون غاوس، تساوي:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (2) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[\frac{V}{m} \right]$$

$$E = \frac{Q}{A} \left(\frac{1}{\epsilon_0} \right) \left[\frac{V}{m} \right]$$



$$V_A \quad \uparrow \quad U_{BA} = V_B - V_A$$

لنحسب فرق الجهد (U) بين اللوحين:

$$U_{BA} = - \int_A \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot A} \cdot (-d) = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot A}$$

و بوضع $U = U_{BA}$ نجد :

$$Q = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{d} U \dots [C] \Leftrightarrow \frac{\epsilon_0 \cdot A}{d} = \frac{Q}{U}$$

يسمى المقدار $\frac{\epsilon_0 \cdot A}{d}$ سعة المكثفة و يقاس بوحدة الفاراد F أي $\left[\frac{C}{m} \right]$

وعليه فإن سعة المكثف تساوي: $\frac{\epsilon_0 \cdot A}{d}$

ويتبين من هذه العلاقة أن سعة المكثف متوازي اللوحين تزيد بزيادة مساحة اللوح الواحد وتنقص بزيادة المسافة بين اللوحين.

2. المكثف متعدد الألواح:

هو مكثف به عدد (N) من الألواح المتوازية. ولما كانت الشحنة تخزن في المادة العازلة وعدد العوازل في هذا المكثف هو (N-1)، فإن سعة هذا المكثف هي:

$$C = (N-1) \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

3. المكثف الكروي:

المكثف الكروي هو عبارة عن موصلين كرويين متحدتي المركز نصفتي قطريهما الداخلي (a)، والخارجي (b). حسب نظرية غوص للتوزيع الكروي نتصور سطحاً مغلقاً نصف قطره (r) حيث (a > r > b) فيكون:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

أما فرق الجهد بين الكرتين فهو:

$$U = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_b^a \frac{dR}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

وعليه فإن سعة هذا المكثف هي:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q \times 4\pi\epsilon_0}{Q \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} \rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{(b-a)}$$

4. المكثف الأسطواني:

يتركب من أسطوانتين متحدتي المركز نصفتي قطريهما الداخلي (a) والخارجي (b) على الترتيب وطول كل منهما (L). حيث التوزيع الشحني

مستمر و ذو كثافة شحنية طولية λ حيث $\left(\lambda = \frac{Q}{L} \right) \rightarrow Q = \lambda L \rightarrow dq = \lambda dL$

الآن لنفرض سطحاً مغلقاً أسطوانياً طوله (L) ونصف قطره (r) حيث (a > r > b)

حسب نظرية غوص في الدرس السابق وجنا عبارة الحقل $E(r)$ و المعرفة بالمعادلة: $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$

وعليه فإن عبارة فرق الكمون تعطى:

$$U = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} \rightarrow U = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{L} \int_a^b \frac{d\vec{r}}{r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{L} (\ln b - \ln a)$$

ومنه:

إذن:

$$U = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

وعليه فإن سعة هذا المكثف:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q \times 2\pi\epsilon_0 L}{Q \times \ln \frac{b}{a}}$$

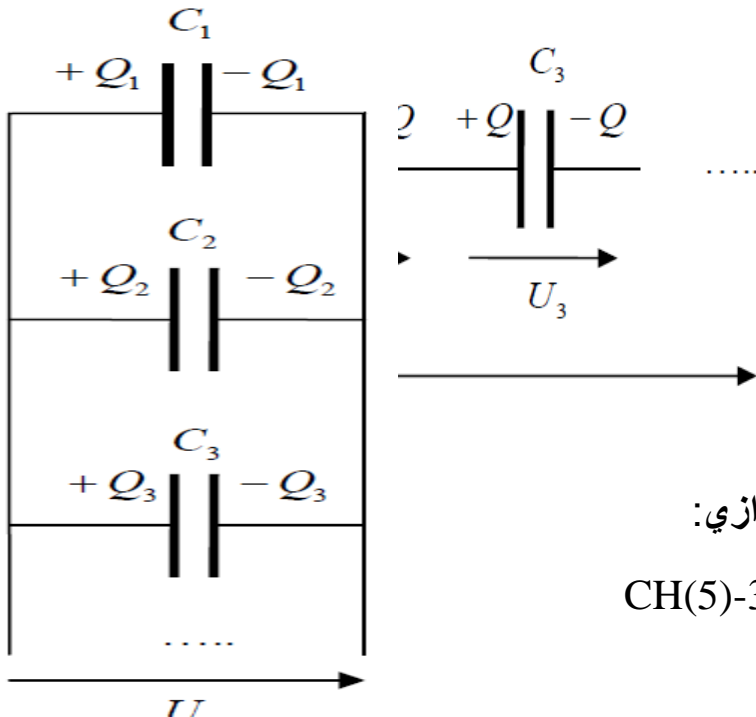
$$\therefore C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{b}{a}}$$

5.5 توصيل المكثفات:

يمكن توصيل المكثفات بطرق مختلفة وذلك للحصول على قيم كبيرة أو صغيرة مقارنة بالقيم الأصلية للسعة الكهربائية.

أولاً: التوصيل على التوالي:

من الشكل نلاحظ أن:



$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots = Q_n$$

ولكن، $(U = Q/C)$ ، وعليه فإن:

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \dots + \frac{Q}{C_n}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

وبالقسمة على (Q) نجد:

ثانياً: التوصيل على التوازي:

في هذه الحالة نجد:

$$U = U_1 = U_2 = U_3 = \dots U_n$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots Q_n$$

ولكن ($Q = C U$) ومنه نجد:

$$CU = C_1 U + C_2 U + C_3 U + \dots C_n U$$

وبالقسمة على (U) نجد:

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots C_n$$

5.6 طاقة المكثف المشحون:

لنفترض في لحظة ما أن الشحنة على أي من سطحي المكثف هي (Q)، وأن فرق الجهد بين السطحين هو (U). إذا مرت شحنة صغيرة (dQ) بين السطحين عبر فرق الجهد (U) فإن العمل اللازم لذلك هو:

$$dW = U \cdot dQ$$

أما العمل (W)، فهو يساوي: $W = \int U \cdot dQ$

ولكن ($U = Q/C$):

$$W = \frac{1}{2} \cdot U^2 C \dots [J]$$

وبتعويض ($Q = U C$) نجد:

$$W = \frac{1}{2} \cdot Q U \dots [J]$$

وكذلك بتعويض ($C = Q/U$):

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} U^2 C = \frac{1}{2} Q U \quad \text{أي أن: } (\bar{U})$$

القوة بين سطحي مكثف:

بما أن الشحنات على السطحين مختلفة الإشارة فإنها تتجاذب بقوة يمكن حسابها وفقاً لقانون كولوم. الآن لنفترض أن شحنة كل من السطحين هي (Q) وأن مساحة كل منها هي (A)، وكانت القوة المتبادلة بينهما هي (F). في هذه الحالة فإن الشغل (dw) المبذول عند زيادة صغيرة للمسافة بين اللوحين المتوازيين مقدارها (dx) هو:

$$dW = -\vec{F} \cdot d\vec{x}$$

وبما أن الإزاحة تغير قيمة الطاقة المخزونة بمقدار ($d\bar{U}$) فإن القوة الكهربائية يمكن تعريفها من العلاقة:

وفي حالة ثبات الشحنة (Q) على السطحين فإن الطاقة $-\vec{F} \cdot d\vec{x} = -d\bar{U}$ المخزونة تساوي، بعد تعويض السعة ($C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$) نجد:

$$d\bar{U} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 A} \cdot d$$

والتغيير الحادث نتيجة الانتقال مسافة (dx)، بدلاً عن (d)، هو:

$$d\bar{U} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 A} \cdot dx \quad \text{ولكن، } (d\bar{U} = F \cdot dx):$$

$$F \cdot dx = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 A} dx$$

CH(5)-4

$$\therefore F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A}$$

وبتعويض الكثافة السطحية للشحنة $(\sigma = \frac{Q}{A})$ نجد: $F = \frac{\sigma^2 A}{2 \epsilon_0}$

5.7. فقدان الطاقة بين مكثفين:

إذا فرضنا وجود سطح مكثف شحنته موجبة وسعته (C_1) وجهده (U_1) ووصل بسطح آخر شحنته موجبة وسعته (C_2) وجهده (U_2) ، حيث $(U_1 > U_2)$ ، فإن هذين السطحين سيتقاسمان الشحنة، مما يجعل الجهد متساوي عند جميع نقاط اللوح.

الجهد المشترك (U) يمكن حسابه كالاتي:

$$C_1 U_1 + C_2 U_2 = (C_1 + C_2) U$$

وتكون الطاقة قبل التوصيل هي:

$$U = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{C_1 + C_2}$$

أما الطاقة بعد التوصيل فهي:

$$\frac{1}{2} C_1 U_1^2 + \frac{1}{2} C_2 U_2^2$$

$$\frac{1}{2} (C_1 + C_2) U^2$$

وبتعويض قيمة (U) نجد أن الطاقة بعد التوصيل تساوي:

$$\frac{1}{2} (C_1 + C_2) U^2 = \frac{1}{2} \frac{(C_1 U_1 + C_2 U_2)^2}{(C_1 + C_2)}$$

ولهذا فإن الفرق في الطاقة $(\Delta \bar{U})$ قبل وبعد التوصيل هو:

$$\Delta \bar{U} = \frac{1}{2} C_1 U_1^2 + \frac{1}{2} C_2 U_2^2 - \frac{1}{2} \frac{(C_1 U_1 + C_2 U_2)^2}{(C_1 + C_2)}$$

بإجراء الحسابات المعتادة نجد أن الفقد في الطاقة، يساوي:

$$\Delta \bar{U} = \frac{(C_1 + C_2)(C_1 U_1^2 + C_2 U_2^2) - (C_1 U_1 + C_2 U_2)^2}{2(C_1 + C_2)}$$

$$\Delta \bar{U} = \frac{C_1 C_2 (U_1^2 - U_2^2)}{2(C_1 + C_2)}$$

وهذا المقدار يكون موجباً عندما $(U_1 \neq U_2)$.

والفرق في الطاقة يظهر على صورة حرارة أو ارتفاع في درجة الحرارة.

5.8. مثال:

مكثفان سعة الأول $(20 \mu F)$ ، وفرق الجهد بين طرفيه $(1000 V)$ ، والآخر سعته $(10 \mu F)$ وفرق الجهد بين طرفيه $(100 U)$ ، أحسب:

- (1) الطاقة الكلية قبل توصيلهما.
- (2) الفقد في الطاقة بعد توصيلهما.
- (3) الجهد العام.

الحل:

(I) شحنة المكثف الأول هي:

$$Q_1 = C_1 U_1 = 20 \times 10^{-6} \times 1000 = 0.02 C$$

شحنة المكثف الثاني هي:

$$Q_2 = C_2 U_2 = 10 \times 10^{-6} \times 100 = 0.001 C$$

أما السعة الكلية فهي:

$$C = C_1 + C_2 = 30 \times 10^{-6} C$$

الطاقة قبل التوصيل هي:

$$\bar{U}_1 = \frac{1}{2} C_1 U_1^2 + \frac{1}{2} C_2 U_2^2 =$$

$$\bar{U}_1 = \frac{1}{2} \times 20 \times 10^{-6} \times (1000)^2 + \frac{1}{2} \times 10 \times 10^{-6} \times (100)^2$$

الطاقة بعد التوصيل هي:

$$\bar{U}_1 = 10.05 J$$

$$\bar{U}_2 = \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{(0.02 + 0.001)^2}{30 \times 10^{-6}}$$

(II) الفقد في الطاقة هو:

$$\bar{U}_2 = 7.55 J$$

$$d\bar{U} = d\bar{U}_1 - d\bar{U}_2 = 10.05 - 7.5 = 2.5 J$$

(III) الجهد العام هو:

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{(0.02 + 0.001)}{30 \times 10^{-6}} = 700 V$$