

4 نظرية التدفق

- 1.4- مقدمة
- 2.4- نظرية غوص
- 3.4- أمثلة تطبيقية
- 4.4- الصيغة التفاضلية للنظرية

1.4 - مقدمة:

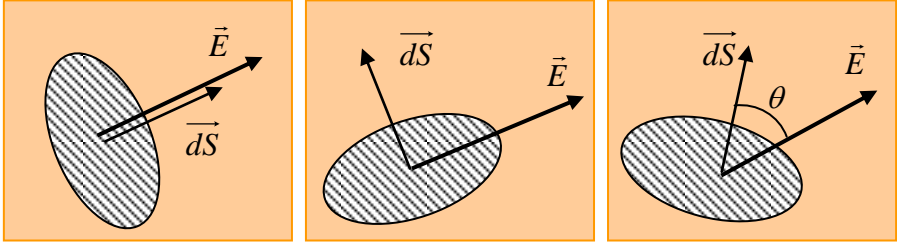
سنسوق الآن خاصية في غاية الأهمية تعرف باسم "نظرية غوص"، وهي مستنتجة من قانون كولوم، أو بصفة عامة من " قانون التربيع العكسي ". تكمن أهمية هذه النظرية في قدرتها على إثبات عدة خواص بسهولة لم نعهدها في قانون كولوم، غير أنها تقتصر على عدد محدود من المسائل التي يتسم فيها توزيع الشحنات بتناظر عال.

نتعرض هنا للبرهان التقليدي على هذه النظرية، ثم نطلع على صيغتها المحلية التي تشكل أولى معادلات ماكسويل الأربع، التي قام فيها جيمس ماكسويل عام 1867 بالتوحيد الشكلي لكل من نظريات الكهرباء والمغناطيسية والضوء.

البرهان على نظرية غوص يستدعي إدخال مفهوم " تدفق الحقل الشعاعي " الذي نرمز له بالرمز Φ ، والذي يقاس بعدد خطوط القوة التي تخترق سطحا افتراضيا. فإذا كانت M نقطة من عنصر السطح $d\vec{S}$ ، وكان \vec{E} حقلًا كهربائيًا وليدا في تلك النقطة عن جملة من الشحنات، أمكن اعتبار \vec{E} ثابتا على امتداد الرقعة dS لفرط ضيقها. عندئذ نكتب تدفق هذا الحقل عبر ذاك السطح على الصورة:

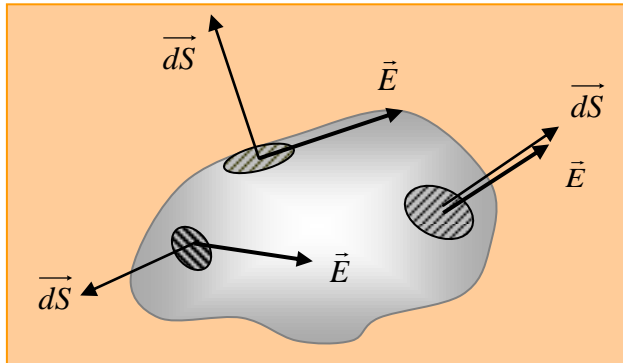
$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS \cos \theta \quad (1.4)$$

حيث $\theta = (\vec{E}, \vec{dS})$ زاوية يمكن لها أن تكون قائمة أو منفرجة أو حادة، وبالتالي فإن التدفق على الترتيب إما معدوم أو سالب أو موجب [الشكل (1.4)].



الشكل (1.4)

إذا تعلق الأمر بالتدفق عبر سطح كفي ما، مغلقا كان أم مفتوحا، فإن العملية تؤول إلى تجزئة السطح إلى رقع صغيرة ΔS بالقدر الذي يسمح باعتبارها مستويات، ثم نمثل كل عنصر بشعاع \vec{dS} طوله يعادل مساحة الرقعة واتجاهه ناظمي نحو الخارج بالاتفاق. وقد يستدعي شكل السطح أن نتمادى في تجزئته إلى عناصر تفاضلية \vec{dS} . هذا الاختيار يسمح باعتبار الحقل الشعاعي ثابت الشدة على نفس الرقعة، أما اتجاهه



الشكل (2.4)

فقد يكون مماسيا للسطح أو داخلا فيه أو خارجا منه بحسب موقع الرقعة [أنظر

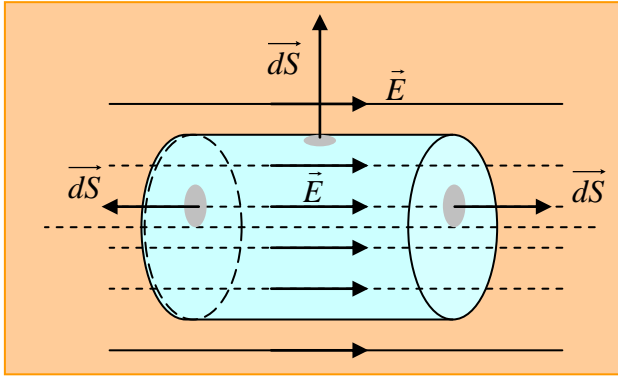
الشكل (2.4).

وهكذا نعرف التدفق الكلي Φ للحقل الشعاعي \vec{E} عبر سطح كروي S بالعلاقة:

$$\Phi_s = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (2.4)$$

مثال (1.4):

ما هو التدفق الكلي Φ عبر أسطوانة مغلقة محورها يوازي الحقل الشعاعي \vec{E} كما يبين الشكل (3.4)؟



الشكل (3.4)

الجواب:

السطح الأسطواني المغلق S عبارة عن اتحاد ثلاثة سطوح: السطح الجانبي S_3 ، وسطحا القاعدتين S_1 و S_2 . وبالاعتماد على التعريف (2.4) مع كون الحقل منتظما، نجد أن:

$$\begin{aligned}\Phi_s(\vec{E}) &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \int_S \cos \theta \, dS \\ &= E \left[\int_{S_1} \cos \theta_1 \, dS + \int_{S_2} \cos \theta_2 \, dS + \int_{S_3} \cos \theta_3 \, dS \right]\end{aligned}$$

يتضح من الشكل (3.4) أن: $\theta_1 = \pi$ و $\theta_2 = 0$ و $\theta_3 = \pi/2$ ، وأن: $S_1 = S_2$ ومنه:

$$\Phi = E[-S_1 + S_2 + 0] = 0$$

ملاحظة: لاحظ أنه كلما كان عدد خطوط الحقل الداخلة يساوي عدد خطوط الحقل الخارجة، انعدم التدفق من خلال السطح المغلق، لأن التدفق الذي نقدره بعدد الخطوط التي تخترق السطح يكون سالبا عبر القاعدة اليسرى S_1 (خطوط داخلة)، بينما يكون موجبا عبر القاعدة اليمنى S_2 (خطوط خارجة).

2.4 - نظرية غوص:

تعتبر نظرية غوص بشكل موجز وملائم عن العلاقة الكائنة بين التدفق الكهربائي عبر سطح مغلق و الشحنة الصرفة التي يضمها هذا السطح. وتنص على أن "تدفق الحقل الكهربائي عبر سطح مغلق يساوي المجموع الجبري للشحنات التي يحتويها هذا السطح، مقسوما على السماحية ϵ_0 ". وتكتب:

$$\Phi_s(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{\text{int}} \quad (3.4)$$

$$\epsilon_0 \Phi_s(\vec{E}) = \sum q_{\text{int}} \quad (4.4) \quad \text{أو:}$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_{\text{int}} \quad (5.4) \quad \text{أو أيضا:}$$

حيث \vec{D} هو شعاع " التحريض الكهربائي " أو " كثافة التدفق "، ويساوي في حالة الفراغ:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) \quad (6.4)$$

يدل الرمز $\left(\oint_S \right)$ على أن التكامل يتم على سطح مغلق.

هذه النظرية أعم من قانون كولوم بحكم أنها تتسحب على جميع أنواع الحقول الكهربائية، الساكنة منها أو الناشئة عن الحقول المغناطيسية المتغيرة مع الزمن، بل وأكثر من ذلك فهي تتسحب على كل حقل شعاعي تتناسب شدته عكسيا مع مربع البعد (الحقول التي تخضع لقانون التربيع العكسي)، كحقل الجاذبية مثلاً، وليست تصح من أجل غير هذه الحقول.

لاحظ أن نظرية غوص تكافئ قانون كولوم، وأنه يمكن أن نعكس تقديم موضوع الكهرباء الساكنة باتخاذ خاصية تناسب التدفق مع مجموع الشحنات المحتواة داخل سطح مغلق كمبدأ أساسي، ويصبح معه قانون كولوم مستنتجا منه كنظرية. تجدر الإشارة إلى أن الحقل في العلاقة (3.4) ليس ناشئاً بالضرورة عن الشحنة لوحدها؛ فهو يمثل محصلة الحقل الكهربائي في كل نقطة من السطح، قد تساهم فيه شحنات غير الشحنات التي يحتويها السطح المغلق.

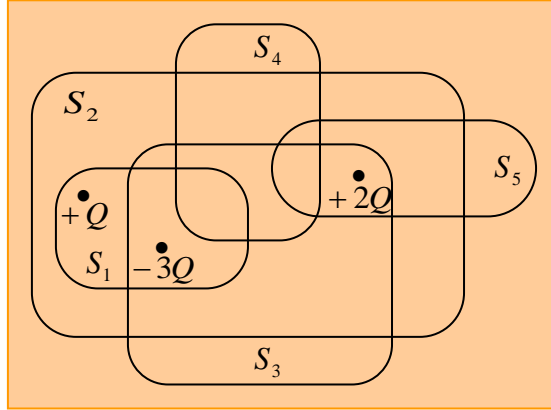
يتضح من خلال العلاقة (3.4) أن نظرية غوص يمكن توظيفها لحساب شدة الحقل إذا اتسم توزيع الشحنات بالتناظر الكافي. ومع ذلك ينبغي أن نحسن اختيار السطح المناسب الذي يكفل إنجاز التكامل بسهولة، وبالضبط ذلك السطح الذي يوشي تماثله بثبوت شدة الحقل على امتداد هذا السطح (أو على بعض أجزائه). مثل هذا السطح هو سطح وهمي يدعى " سطح غوص " ويجب أن تتوفر فيه المواصفات

التالية:

1. سطح مغلق يشمل نقطة المراقبة M التي يراد حساب الحقل عندها.
2. سطح يجعل الجداء السلمي $(\vec{E} \cdot d\vec{S})$ معلوما تماما في أية نقطة من السطح. وبصفة خاصة يجعل الشعاع مماسيا للسطح أو ناظميا عليه.
3. سطح يجعل شدة الحقل ثابتة في جميع نقاطه التي يتعامد فيها الحقل مع السطح.

مثال (2.4):

يبين الشكل التالي خمسة سطوح مغلقة، يحتوي بعضها شحنات كهربائية. عين التدفق عبر كل سطح من هذه السطوح.



الشكل (5.4)

الجواب:

$$\Phi_{S_1} = \frac{1}{\epsilon_0} (+Q - 3Q) = -\frac{2Q}{\epsilon_0} \quad \Phi_{S_i} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$$

$$\Phi_{S_2} = \frac{1}{\epsilon_0} (-3Q + Q + 2Q) = 0$$

$$\Phi_{S_4} = \frac{1}{\epsilon_0} (0) = 0$$

$$\Phi_{S_3} = \frac{1}{\epsilon_0} (-3Q + 2Q) = -\frac{Q}{\epsilon_0}$$

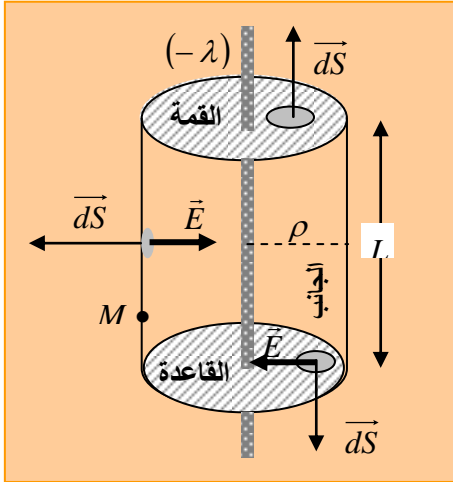
$$\Phi_{S_5} = \frac{1}{\epsilon_0} (+2Q) = \frac{2Q}{\epsilon_0}$$

3.4 - أمثلة تطبيقية:

سيغطي تطبيق النظرية عددا محدودا من المسائل ذات الطابع التناظري، كالتناظر الأسطواني أو التناظر الكروي. وسيقتضي الأمر إلماما مسبقا بسلوك الحقل للتوزيع المدروس، وهو ما نستوحيه من طبيعة خطوط القوة التي تجلي مواطن ثبوت شدة الحقل فضلا عن اتجاهه.

تطبيق (1.4): التوزيع الخطي المنتظم لشحنة سالبة على مستقيم طويل.

في هذه الحالة تتجه خطوط الحقل جميعا نحو المستقيم بشكل



الشكل (6.4)

عمودي عليه من جميع جهاته. من هنا يغدو اختيار سطح غوص أمرا بسيطا؛ لأن السطح الأسطواني الذي محوره خط الشحنات هو السطح الوحيد الذي تتعامد عليه خطوط القوة في كل نقطة الجانبية وتثبت شدة الحقل عندها؛ أي: $(\vec{E}, \vec{dS}) = \pi$ ، بينما

تكون الخطوط مماسية لنقاط القاعدتين؛ أي: $(\vec{E}, \vec{dS}) = \pi/2$.

وعلى ضوء ذلك نكتب التدفق عبر الأسطوانة المغلقة على الصورة:

$$\Phi_s(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

الجانب القاعدة القمة

$$\Phi_s(\vec{E}) = \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cos \pi \int_{S_1} dS = -E 2\pi \rho L$$

ولدينا من جهة أخرى:

$$\Phi_s = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\text{داخل الأسطوانة}} q_i = \frac{-\lambda L}{\epsilon_0}$$

ومنها نجد:

$$E(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \quad (8.4)$$

تطبيق (2.4): التوزيع السطحي المنتظم لشحنة موجبة على مستو لا نهائي.
السطح الاختياري المناسب هنا هو أسطوانة مغلقة (أو أي مؤشر قائم) قاعدتها A وطولها $2L$ ، يقطعها المستوي عموديا في منتصفها. ذلك أن خطوط الحقل ناظمية على المستوي وخارجة منه، وهو ما يجعل التدفق معدوما على السطح الجانبي [أنظر الشكل (7.4)]; أي:

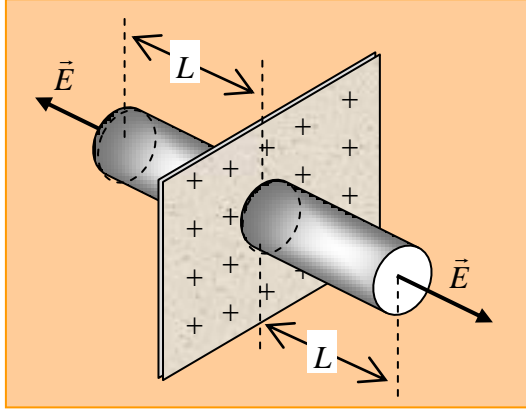
$$\Phi_s(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2E \int_A dS = 2EA$$

ومن جهة أخرى نجد:

$$\Phi_s = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\text{داخل الأسطوانة}} q_i = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

ومنها نحصل على:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (9.4)$$



الشكل (7.4)

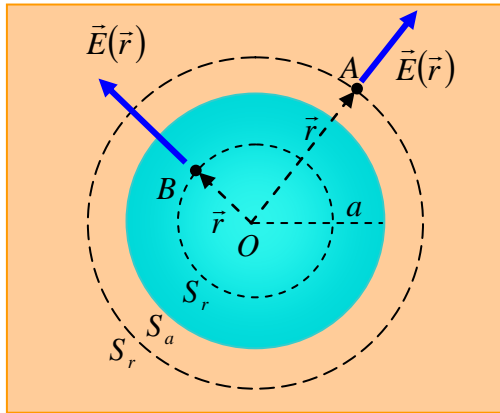
وهو كما ترى حقل منتظم لا يتعلق سوى بسماحية الوسط وكثافة الشحنات.

لا يوجد عمليا مستوي لا نهائي طبعا، لكن تبقى النتيجة مكافئة لتوزيع على مستو محدود أبعاده كبيرة أمام المسافة التي تفصله عن نقطة المراقبة.

تطبيق (3.4): التوزيع الكروي.

لنعتبر شحنة موجبة Q موزعة بانتظام على كرة نصف قطرها a .
بناء على التناظر الكروي يكون شعاع الحقل $\vec{E}(\vec{r})$ موازيا لشعاع موضع المراقب \vec{r} بالنسبة إلى مركز الكرة كما يوضح الشكل (8.4)؛ ذلك أن خطوط الحقل مركزية (متقاطرة). وليست تتعلق شدة الحقل سوى بالبعد r عن المركز؛ فهي ثابتة على نفس السطح الكروي S_r . وعلى ضوء ذلك نكتب:

$$\Phi_s(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r)S_r = 4\pi r^2 E(r)$$



الشكل (8.4)

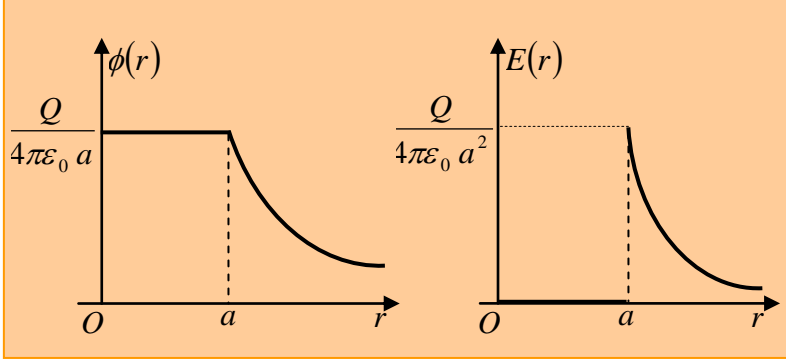
ونعلم من جهة أخرى أن: $\Phi_s = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{S_r \text{ داخل}} q_i$. وهنا نميز أربع

حالات ممكنة:

(1) التوزيع سطحي، والمراقب خارج التوزيع في الموضع $A (r > a)$ ؛

$$\sum_{S_r \text{ داخل}} q_i = Q \quad . \quad \text{إذن:}$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad ; \quad \phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (10.4)$$



الشكل (9.4)

ملاحظة: لاحظ أن عبارتي الحقل والكمون في هذا التوزيع السطحي تكافئان نظيرتيهما في حالة الشحنة النقطية Q التي تحتل مركز الكرة.

(2) التوزيع سطحي، والمراقب داخل التوزيع في الموضع $B (r < a)$ ؛

$$\sum_{S_r \text{ داخل}} q_i = 0 \quad . \quad \text{إذن:}$$

$$E(r) = 0 \quad ; \quad \phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \quad (11.4)$$

ملاحظة: إذا كان التوزيع على السطح بكثافة منتظمة σ ، أي:

$$\sigma = \frac{Q}{S_a} = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

الشكل:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{a}{r} \right)^2$$

وبالجوار القريب من السطح $(r \rightarrow a)$:

$$E(r) \approx \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (12.4)$$

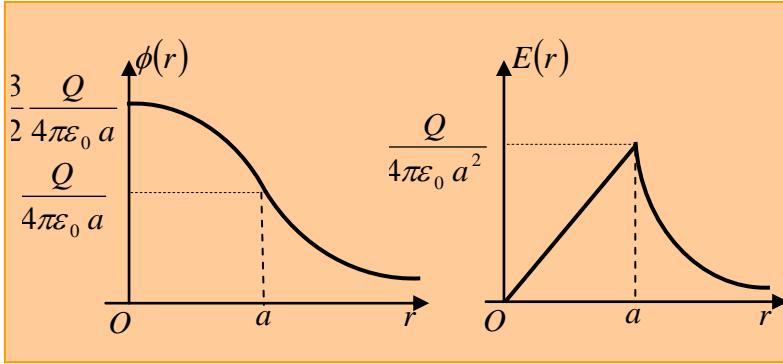
مما يدل على أن دالة الحقل $E(r)$ غير مستمرة.

(3) التوزيع حجمي، والمراقب خارج التوزيع في الموضع $A (r > a)$ ؛

$$\sum_{S_r \text{ داخل}} q_i = Q \quad \text{. إذن:}$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad ; \quad \phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (13.4)$$

وهي نفس النتيجة (1).



الشكل (10.4)

(4) التوزيع حجمي، والمراقب داخل التوزيع في الموضع $B (r < a)$ ؛

$$\sum_{S_r \text{ داخل}} q_i = Q' = Q_r \quad \text{، حيث } Q_r \text{ هي الشحنة التي يحصرها الحجم } V_r \text{،}$$

$$\text{بحيث أن: } \rho = \frac{Q}{V_a} = \frac{Q_r}{V_r} \quad \text{. ومنه:}$$

$$Q_r = \frac{V_r}{V_a} Q = \frac{(4/3)\pi r^3}{(4/3)\pi a^3} Q = \frac{r^3}{a^3} Q$$

إذن:

$$E(r) = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \right) r \quad ; \quad \phi(r) = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} (r^2 - 3a^2) \quad (14.4)$$