الحقل والكمون الكهربائي

1.2 ـ الحقل الكهربائي

تعدّ القوى بين الشحنات الكهربائية من بين التأثيرات التي تتم عن بعد، دون الحاجة إلى وسط مادي بينها، فالتأثير فيما بينها يتم عبر ما يسمى "الحقل الكهربائي".

فكما أن حقل الجاذبية $\vec{g}(\vec{r})$ الذي يميز الأرض، يعتبر الأداة التي تنقل تأثير الأرض (الجاذبية) على أية كتلة m واقعة في الموضع $M\left(\overrightarrow{OM}=\vec{r}\right)$ من المجال الأرضي، بحيث أن:

$$\vec{F}(\vec{r})=m\,\vec{g}(\vec{r})$$

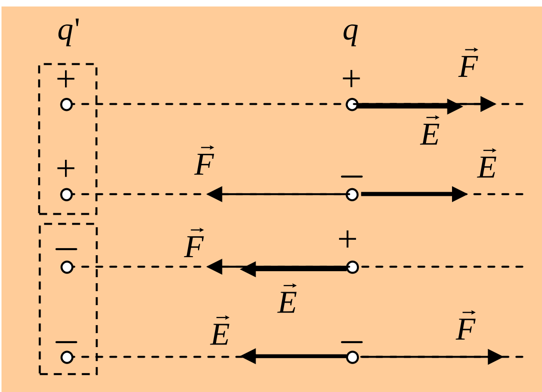
فكذلك الحقل الكهربائي $\vec{E}(\vec{r})$ الذي يميز حيزا من الفضاء المحيط بالشحنة الساكنة q'، يعدّ الأداة التي تنقل تأثير q' (التي تحتل الموضع $M'\left(\overrightarrow{OM}'=\vec{r}'\right)$) على أية شحنة اختبار q واقعة في الموضع $\vec{r}$ من الفضاء، بحيث أن:

$$\vec{F}(\vec{r})=q\,\vec{E}(\vec{r}) \qquad (1.2)$$

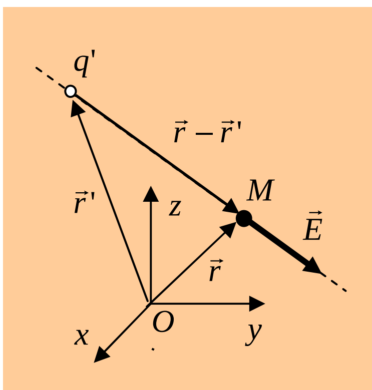
ومن هنا نعرف الحقل الكهربائي للشحنة q'، بناء على عبارة القوة(كولوم)، بالعلاقة:

$$\vec{E}(\vec{r})=\lim_{q\to 0}\frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}=\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} \qquad (2.2)$$

وهو حقل مستقل عن q، ويتعلق بالمنبع q' وبالموضع $\vec{r}$ [أنظر الشكل(1.2)، غير أن q هي شحنة



الشكل(2.2) ـ اتجاه الحقل



الشكل(1.2) ـ حقل الشحنة النقطية

اعتبارية (تجريبية) نستكشف بها الحقل دون أن يكون لها دور في إنشاء هذا الحقل، لذلك ينبغي أن تتناهى في الصغر لدرجة لا يلغي تأثيرها تأثير المنبع q' ولا يطغى عليه، فعبرنا عن ذلك رياضيا بكونها تؤول إلى الصفر في العلاقة(2.2).

تقدر شدة الحقل الكهربائي في المنظومة الدولية بوحدة$\left(N.C^{-1}\right)$ كما يتضح من التعريف، أو بوحدة$\left(V.m^{-1}\right)$ كما سنبين لاحقا. ويمكن أن نتأكد بسهولة بأن شعاع الحقل يتجه دائما نحو الشحنات السالبة، وخارجا من الشحنات الموجبة، [أنظر الشكل(2.2)]

ملاحظة: يتبين من العلاقة(1.2) أنه كلما طبقنا حقلا كهربائيا على منطقة بها شوارد أو جسيمات سالبة أو موجبة، فإن الحقل سيعمل على تحريك الجسيمات الموجبة في نفس اتجاه الحقل والسالبة في عكس اتجاه الحقل، محدثا بينهما مفاصلة تدعى أحيانا "الاستقطاب الكهربائي".

مثال(1.2):

عين التسارع الذي يكتسبه إلكترون ساكن عندما يتأثر بحقل كهربائي.

تطبيق عددي: أحسب المسافة التي يقطعها الإلكترون عندما تبلغ طاقته الحركية $E_c = 20\ eV$ ، علما أن الحقل منتظم (ثابت طولا واتجاها) شدته $E = 20\ kN.c^{-1}$.

الجواب: يتأثر الإلكترون في هذه الحالة بالقوة الكهربائية $\left[\vec{F} = -e\vec{E}\right]$ وبثقله $\left[\vec{P} = m_e\vec{g}\right]$ الذي يهمل أمام $\vec{F}$ كما أوضحنا في المثال(3.2)؛ لذلك يمكن أن نكتب مبدأ التحريك على الصورة:

$$m_e\vec{a} = -e\vec{E} + m_e\vec{g} \approx -e\vec{E}$$

ومنه:

$$\vec{a} = -\left(\frac{e}{m_e}\right)\vec{E}$$

ت.ع: من أجل حقل منتظم يبقى التسارع ثابتا (حركة متغيرة بانتظام). وباعتبار الإلكترون ساكنا عند مبدأ الإحداثيات في اللحظة الابتدائية، يمكن أن نكتب:

$$v^2 - v_0^2 = v^2 = 2ax$$

حيث x هي المسافة المقطوعة، و v السرعة المقابلة لها. بضرب طرفي العلاقة السابقة في نصف الكتلة نحصل على:

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = E_c = m_e a x$$

أو أيضا:

$$E_c = eEx$$

ومنه:

$$x = \frac{E_c}{eE} = \frac{20\left(1.6\,10^{-19}\right)J}{\left(1.6\,10^{-19}\,C\right)\left(20\,10^3\,N.C^{-1}\right)} = 1mm$$

تمرين(1.2):

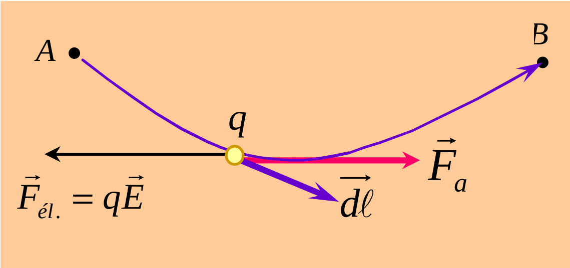
إذا دخل إلكترون منطقة يعمها حقل كهربائي شاقولي منتظم $\vec{E}$ ، بسرعة أفقية $\vec{v}_0$ ، فما هو مساره؟

تطبيق: هب أن $\vec{E}$ هو الحقل بين لبوسي المكثف الأفقي لكاشف التذبذب، طول لبوسه 1.6 سم. افرض أن الإلكترون يلج بين اللبوسين بطاقة حركية قدرها $2000\ eV$ ، فما هو مقدار انحرافه عند نهاية اللبوسين؟

[الجواب: قطع مكافئ . الانحراف= 0.32 سم]

2.2 ـ الكمون الكهربائي :

لتحريك شحنة اعتبارية q داخل حقل كهربائي $\vec{E}$ من موضع ابتدائي A إلى موضع نهائي B، ينبغي على المعتبر (عامل خارجي) أن يبذل عملا للتغلب على الحقل؛ بتطبيق قوة $\vec{F}_a$ تعاكس القوة الكهربائية



الشكل(3.3) ـ التكامل المنحني

$\left(\vec{F}_a = -\vec{F} = -q\vec{E}\right)$. وهذا العمل يساوي:

$$W_{AB}^{ext} = \int_A^B \vec{F}_a \cdot d\vec{r} = -q\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \qquad (3.2)$$

نعرف فرق الكمون الكهربائي (أو التوتر) V_{BA} بين الموضعين A و B من الحقل الكهربائي، على منوال العلاقة(2.3)، بالعبارة:

$$V_{BA} = \frac{W_{AB}^{ext}}{q} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \qquad (4.2)$$

أي أن فرق الكمون الكهربائي بين نقطتين من الحقل الكهربائي يساوي تجول هذا الحقل بينهما بإشارة سالبة. تدعى هذه العبارة "علاقة التجول".

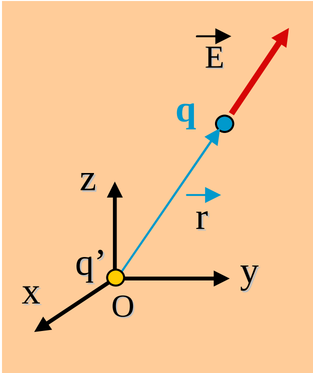
يقدر الكمون في المنظومة الدولية بوحدة "الفولط" $\left(V = J.C^{-1}\right)$.

ملاحظة: التكامل الخطي في العلاقة(4.2) يعرف في الرياضيات بالتكامل المنحني، وهو مستقل عن المسار المتبع بين البداية A و النهاية B. من هنا فإن تجول هذا الحقل على مسار مغلق معدوم؛

$$V = -\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \qquad (5.2)$$

مثال(2.2):

ما هو العمل الذي ينجزه الحقل الكهربائي $\vec{E}$ الناشئ عن الشحنة $q'=20\ \mu C$، من أجل إزاحة الشحنة الساكنة $q=3\ \mu C$ من مكان بعيد $(r_A=\infty)$ إلى موضع B يبعد مسافة 50 سم عن المنبع q'؟



الشكل(4.2)

الجواب: نختار شحنة المنبع عند مبدأ الإحداثيات للاختصار؛ فنضع $\vec{r}'=\vec{0}$ في عبارة الحقل(2.3) لتصبح:

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}'}{r^3}$$

كما تصبح عبارة القوة الكهربائية:

$$\vec{F}(\vec{r})=q\vec{E}(\vec{r})=\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}'}{r^3}$$

فيكون عمل هذه القوة:

$$W_{AB}=\int_A^B \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^r \frac{\vec{r}'}{r^3}\cdot d\vec{r}=\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^r \frac{dr}{r^2}$$

وبعد التكامل نجد:

$$W_{AB}=\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{r}\right)=-\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r}=-1.08\ J$$

وهو عمل مقاوم لأنه سالب.

من الملائم أحيانا أن نتكلم عن الكمون المطلق $\phi(r)$ لنقطة ما M، بدلا عن فرق الكمون V_{AB} بين نقطتين. لكن ذلك يعني فقط أننا نتفق على قياس كل فرق في الكمون بالنسبة إلى مرجع إسناد معين يعتبر فيه الكمون صفرا. أكثر هذه المراجع شيوعا في القياسات المخبرية هو "الأرض" وفي الحسابات النظرية هو "ما لانهاية".

دعنا نفترض لأجل ذلك بأن فرق الكمون بين موضعين من الحقل، يكون في غاية الصغر متى كانت الإزاحة كذلك؛ فنكتب اعتمادا على العلاقة(4.2):

$$V=d\phi=\frac{dW}{q}=-\vec{E}\cdot d\vec{r} \qquad (6.2)$$

وباستعمال خواص الجداء السلمي، يمكن أن نكتب العبارة السابقة على الصورة:

$$d\phi=-\vec{E}\cdot d\vec{r}=-|\vec{E}||d\vec{r}|\cos(\vec{E},d\vec{r})=-[E\cos\theta]dr$$

أو:

$$d\phi=-E_r\,dr \qquad (7.2)$$

حيث E_r هو مسقط (أو مركبة) الشعاع $\vec{E}$ على حامل الإزاحة $d\vec{r}$. ومن هنا يمكن أن نضع:

$$E_r=-\frac{d\phi}{dr} \qquad (\vec{E}_r // d\vec{r}) \qquad (8.2)$$

وهكذا فإن مركبة الحقل في أي اتجاه تساوي معدل تناقص الكمون في هذا الاتجاه.

تدعى النسبة $\left(\frac{d\phi}{dr}\right)$ "تدرج الكمون" في اتجاه معين. وعندما لا يحدد الاتجاه بعينه فإن التدرج يدل على

الاتجاه الذي يتغير فيه الكمون بأسرع ما يمكن، ويتفق هذا الاتجاه مع اتجاه الحقل في هذا الموضع.

عندما يسند شعاع الحقل إلى جملة الإحداثيات الكارتيزية، فإن العلاقة(8.3) تتخذ الصورة:

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad ; \quad E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad ; \quad E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad (9.2)$$

حيث يمثل $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ مثلا، المشتق الجزئي للدالة $\phi(x,y,z)$ بالنسبة إلى x، باعتبار y و z ثابتين. وهكذا...

العلاقة(8.3) هي صورة صريحة للعبارة الشعاعية التالية:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(r) \qquad (10.2)$$

حيث يمثل $\vec{\nabla}$ مؤثرا اشتقاقيا موجها يدعى "نابلا"، ويعرف في الإحداثيات المربعة بالعلاقة:

$$\vec{\nabla} \equiv \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \qquad (11.3)$$

تدل العلاقة(10.2) على أن الحقل يشتق من الكمون، كما تدل إشارة$(-)$ على أن شعاع الحقل يتجه من منطقة الكمون الأعلى إلى منطقة الكمون المنخفض، بينما يتجه الشعاع$(\vec{\nabla}\phi)$ حسب التعريف وفق اتجاه تزايد الكمون.

وهكذا يمكن حساب الحقل إذا علم الكمون باستخدام "علاقة التدرج"(10.2)، أو حساب الكمون إذا علم الحقل باستخدام "علاقة التجول"(4.2).

للحصول على كمون الشحنة النقطيةq'، نعوض عبارة الحقل(2.2) في علاقة التجول(4.2)، ونفرض q' عند مبدأ الإحداثيات للتبسيط$(\vec{r}'=\vec{0})$، فنجد:

$$V_{BA} = \int_A^B d\phi = -\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B \frac{dr}{r^2}$$

أو:

$$\phi_B = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) + \phi_A \qquad (12.2)$$

فإذا تراجعت النقطةA إلى ما لانهاية، حيث الكمون هناك معدوم $[\phi(\infty)=0]$، واحتل المراقب M الموضع$(r_B = r)$ B، فإن تأثير q' يتلاشى عند A، وتغدو عبارة الكمون من الشكل:

$$\phi(r) = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (13.2)$$

وفي الحالة العامة عندما يكون المنبعq' خارج المبدأO في الموضع$\vec{r}'$، نحصل أخيرا على:

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \qquad (14.2)$$

يقودنا الكلام عن الكمون إلى التطرق إلى الطاقة الكامنة الكهربائية وعلاقتها بالحقل والكمون؛ فالعمل الذي ينجزه الحقل على الشحنة الاعتبارية يتحول إلى طاقة كامنة للشحنة داخل الحقل:

$$W_{AB}^{ext} = -W_{AB}(\vec{E}) = \Delta E_p = -q\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \qquad (2\ .15)$$

حيث أن ΔE_p هو التغير في الطاقة الكامنة الكهربائية للشحنة داخل الحقل (ويساوي . حسب قانون حفظ الطاقة لجملة معزولة . عكس التغير في الطاقة الحركية؛$W_{AB} = \Delta E_c = -\Delta E_p$). وبناء على التعريف(4.3)

نكتب:

$$q(\phi_B - \phi_A) = E_{p,B} - E_{p,A} \qquad (16.2)$$

وهذا يفضي إلى العلاقة العامة بين الكمون والطاقة الكامنة الكهربائية:

$$E_p(r) = q\phi(r) \qquad (17.2)$$

وكذلك باستعمال العبارة(10.2) نحصل على العلاقة العامة بين القوة والطاقة الكامنة الكهربائية:

$$q\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}[q\phi(r)] \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}E_p(r) \qquad (18.2)$$

وهو ما يعني أن القوة الكهربائية تشتق من الطاقة الكامنة الكهربائية.

تقدر الطاقة الكامنة الكهربائية في المنظومة الدولية بوحدة الجول (J) أو بوحدة الإلكترون فولط (eV) [$1\ eV = 1.6\ 10^{-19}\ J$].

3.2 ـ تعميم (التوزيعات):

بوسعنا الآن أن نصف منطقة من الفضاء الذي تنتشر فيه الشحنات الكهربائية (أو الظاهرة الكهربائية) بأحد الحقلين: الحقل الشعاعي $\vec{E}(\vec{r})$ أو الحقل السلمي $\phi(r)$. من أجل ذلك سنلتزم من الآن فصاعدا بالرموز التالية:

- $\vec{r}\,'$: شعاع موضع المنبع q' (الذي هو مصدر الحقل أو الكمون).
- $\vec{r}$: شعاع موضع نقطة المراقبة M (أي مراقبة ما يحدثه المنبع q').
- $(\vec{r} - \vec{r}\,')$: شعاع موضع المراقب M بالنسبة إلى المنبع q'.

لدراسة الظاهرة الكهربائية في الموضع $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ من الفضاء، والناشئة عن شحنة (أو شحنات) ساكنة q'، يكفي معرفة سلوك الحقل $\vec{E}(\vec{r})$ أو الكمون $\phi(r)$ عند ذلك الموضع، ولا حاجة لوجود شحنة اعتبارية (تجريبية) q في ذلك الموضع.

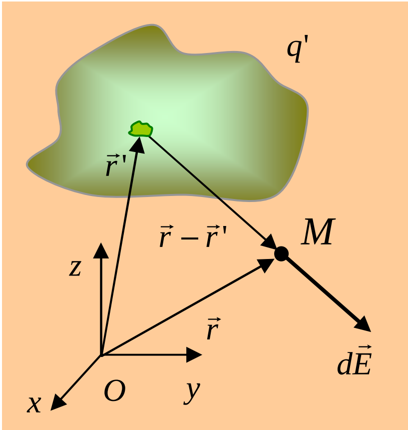
قد تظهر شحنة المنبع ـ بصفة عامة ـ موزعة بشكل منقطع (توزيع نقطي) تمثل جملة n من الشحنات النقطية q_i ، بحيث:

$$q' = q_1 + q_2 + \cdots + q_i + \cdots + q_n = \sum_{i=1}^{n} q_i \qquad (18.2)$$

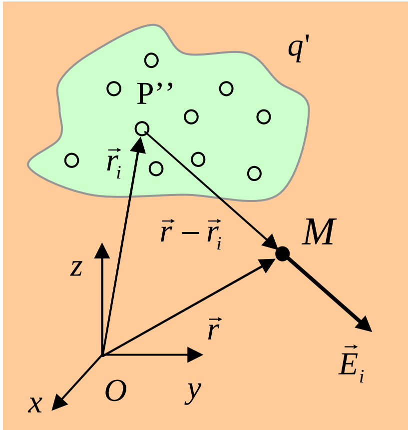
في هذه الحالة تكتب عبارتا الحقل والكمون على الصورة [أنظر الشكل(5.3)]:

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} \qquad (20.2)$$

$$\phi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \qquad (21.2)$$



الشكل(6.2) - التوزيع المستمر



الشكل(5.2) - التوزيع المنقطع

كما وقد تظهر q' موزعة بشكل ملتئم (توزيع مستمر) عندما $(n\to\infty)$. وحينئذ نضطر إلى تجزئة q' إلى عناصر تفاضلية dq' (نقطية) [أنظر الشكل(6.2)] ثم نجمع (أو نكامل) تأثيراتها، فنحصل على العبارتين:

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{q'}\frac{dq'(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \qquad (22.2)$$

$$\phi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{q'}\frac{dq'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad (23.2)$$

لإنجاز هذه التكاملات ينبغي التعبير عن عنصر الشحنة dq' بدلالة الطول r'؛ وذلك ممكن بالاستعانة بوسيط هو كثافة التوزيع، فنضع:

$$dq'=\begin{cases}\rho(r')dV(r') & \text{توزيع حجمي}\\ \sigma(r')dS(r') & \text{توزيع سطحي}\\ \lambda(r')d\ell(r') & \text{توزيع خطي}\end{cases} \qquad (24.2)$$

حيث dV' عنصر الحجم الذي تتوزع فيه dq' بالكثافة ρ' عند الموضع r'. وبالمثل dS' عنصر السطح و $d\ell'$ عنصر الطول.

مثال(3.2):

تتوزع سحابة من الشحنات الكهربائية q' على هيئة أسطوانة ارتفاعها h ونصف قطرها R، بكثافة حجمية ρ' .

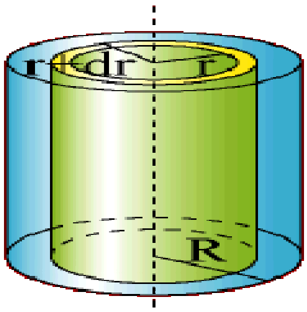
أ) ما هي العبارة الرمزية لهذه الشحنة إذا كانت ρ' منتظمة؟

ب) ما هي العبارة الرمزية لهذه الشحنة إذا كانت $\rho'=\frac{k}{r'}$ ؟

الجواب:

أ) استنادا على العلاقة (24.2)، نكتب:

$$q' = \int_{V'} \rho' dV' = \rho' \int_{V'} dV' = \rho' V' = \rho'\left(\pi R^2 h\right)$$



الشكل(7.3)

ب) بالاستعانة بالشكل(7.3)، يمكن أن نمثل عنصر الحجم بشريحة أسطوانية نصف قطرها r' وسمكها dr'، فنضع: $dV' = (2\pi r')(dr')(h)$، ليصبح التكامل:

$$q' = \int_{V'} \rho' dV' = \int_0^R \left(\frac{k}{r'}\right) 2\pi h r' dr' = 2\pi k h \int_0^R dr' = 2\pi k h R$$

4.2 ـ حساب الحقل و الكمون :

تتوفر لدينا إلى حد الآن طريقتان لحساب الحقل أو الكمون:

أ) الحساب المباشر: ويعتمد مباشرة على العلاقتين (20.2) و(21.2) في التوزيعات المنقطعة أو (22.2) و(23.2) في التوزيعات المستمرة.

ب) استنتاج أحدهما متى عرف الآخر بعلاقة التجول(4.2) أو بعلاقة التدرج (10.2).

توجد إلى جانب هاتين الطريقتين طرق أخرى لحساب الحقل والكمون، نستعرضها لاحقا في أوانها، منها:

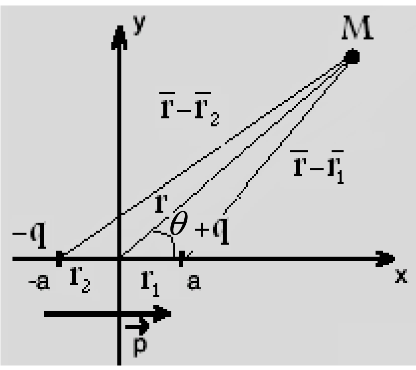
ج) الطريقة البيانية: وهي طريقة تقريبية تعتمد على سويات الكمون وخطوط الحقل.

د) الطريقة التي تعتمد على الكثافة الحجمية ρ' للشحنات في الفضاء.

ه) وأخيرا نظرية التدفق (غوص) التي يختص بها الحقل الكهربائي في حالة التوزيعات المتناظرة.

مثال(4.2): ثنائي القطب الكهربائي

يبين الشكل الجانبي زوجا من الشحنات $(-q,+q)$ تفصل بينهما المسافة $2a$ (توزيع منقطع).



أ) عين كمون التوزيع عند نقطة المراقبة M، ثم ناقش الحالة الخاصة التي يكون فيها المراقب بعيدا عن التوزيع، بحيث أن: $r >> a$.

ب) استنتج عبارة الحقل.

ج) ناقش توازن ثنائي القطب داخل حقل منتظم.

الجواب:

أ) إذا اصطلحنا في عبارة الكمون(21.2) على أن:

$$\vec{r}_2 = -\vec{a} \text{ و } \vec{r}_1 = \vec{a} \text{ و } q_2 = -q \text{ و } q_1 = +q$$

فإننا نحصل على:

$$\phi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}+\frac{q_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}\right]$$
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|}-\frac{1}{|\vec{r}+\vec{a}|}\right]$$

لكننا نجد بناء على الشكل(5.3) أن:

$$\frac{1}{|\vec{r}\pm\vec{a}|}=\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2\pm 2ar\cos\theta}}=\frac{1}{r}\left[1+\left(\frac{a}{r}\right)^2\pm 2\left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta\right]^{-1/2}$$

مما يسمح بوضع عبارة الكمون على الصورة:

$$\phi(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\left(1+\frac{a^2}{r^2}-2\frac{a}{r}\cos\theta\right)^{-1/2}-\left(1+\frac{a^2}{r^2}+2\frac{a}{r}\cos\theta\right)^{-1/2}\right]$$

في حالة المراقب البعيد ($r>>a$)، يكتسي هذا التوزيع أهمية خاصة، ويدعى حينئذ " ثنائي القطب الكهربائي "؛ إذ نصادف الإلكترونات في الكثير من الجزيئات المتعادلة تمكث بجوار ذرة أكثر من مكوثها بجوار أخرى، مما يؤدي إلى ظهور قطبين داخل الجزيء: موجب وسالب. بل وأكثر من ذلك نجد المادة في بعض الحالات تسلك سلوك متعدد الأقطاب. من هنا فإن بعض الظواهر الفيزيائية ستفسر بواسطة ثنائي القطب

نعود إلى عبارة الكمون السابقة فنهمل فيها الحد $\left(\frac{a}{r}\right)^2$ أمام الحدود الأخرى، لنجد:

$$\phi(r)\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\left(1-2\frac{a}{r}\cos\theta\right)^{-1/2}-\left(1+2\frac{a}{r}\cos\theta\right)^{-1/2}\right]$$

وباستعمال النشر من الشكل: $(1\pm\varepsilon)^n\approx 1\pm n\varepsilon$ ، حيث: $\varepsilon=2\frac{a}{r}\cos\theta<<1$ ، نجد:

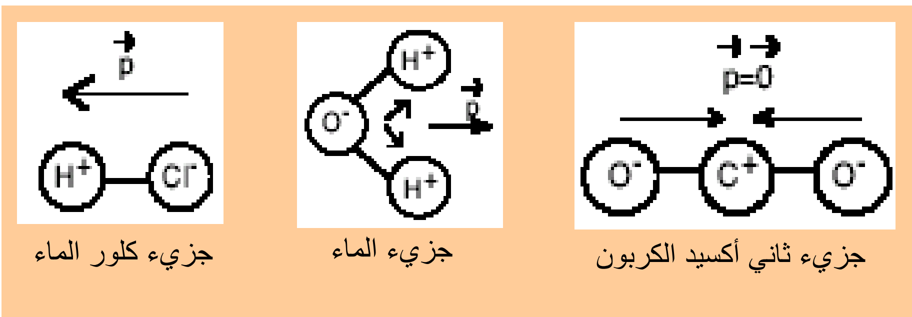
$$\phi(r,\theta)\approx\frac{(q2a)\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \textbf{(25.2)}$$

أو أيضا:

$$\phi(r,\theta)\approx\frac{(q\overrightarrow{2a})\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad \textbf{(26.2)}$$

حيث$\left(\vec{P}=q\,\overrightarrow{2a}\right)$ هو عزم ثنائي القطب، وهو شعاع يتجه من الشحنة السالبة$(-q)$ إلى الشحنة الموجبة$(+q)$، ويقدر بوحدة الكولوم.متر$(C.m)$.

فيما يلي بعض الأمثلة عن ثنائيات الأقطاب في المادة:



الشكل(8.2)

ب) يمكن استنتاج الحقل من عبارة الكمون (26.3) باستعمال علاقة التدرج(10.3).

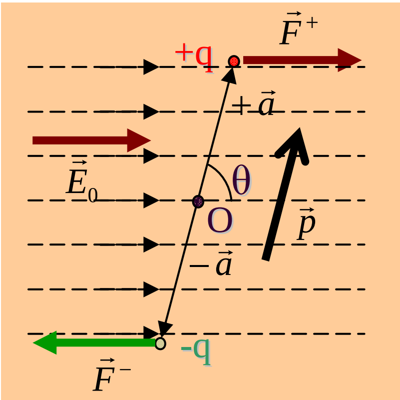
بما أن الكمون دالة للمتغيرين ، فمن الأنسب استعمال الإحداثيات القطبية في تعريف المؤثر نابلا؛

$$\vec{E}(r,\theta)=-\vec{\nabla}\phi(r,\theta)=-\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta\right) \qquad (27.2)$$

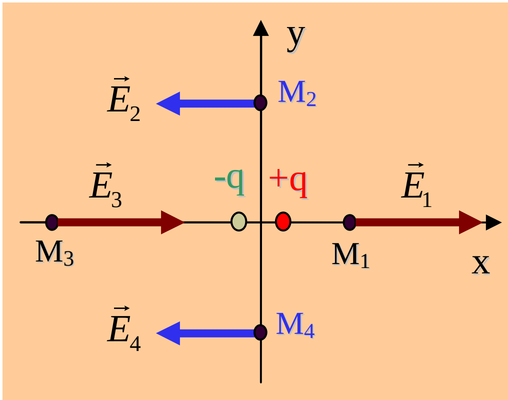
وبعد الاشتقاق والترتيب نحصل على:

$$\vec{E}(r,\theta)=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\vec{e}_r+\sin\theta\,\vec{e}_\theta\right) \qquad (28.2)$$

يتضح من هذه العبارة أن الحقل في المواضع الأربعة الخاصة (التي تعرف بمواضع غوص)، والتي تظهر في الشكل(9.2)، يوازي دائما المحور Ox ويتفق مع اتجاه $\vec{P}$ إن كان المراقب على Ox (الذي يمثل محور ثنائي القطب)، ويعاكس اتجاه $\vec{P}$ إن كان المراقب على Oy (الذي يمثل العمود المنصف لثنائي القطب).



الشكل(10.2) - ثنائي قطب داخل حقل



الشكل(9.2) - مواضع غوص

ج) في وجود حقل خارجي $\vec{E}_0$ ، تتأثر شحنتا ثنائي القطب بمزدوجة $\left(\vec{F}^-,\vec{F}^+\right)$ ، تسعى لتدويره حول مركزه إلى أن يشغل موضع توازن، كما يوضح الشكل(10.2).

عزم هذه المزدوجة حول المركز O هو:

$$\vec{\tau}_O=\vec{\tau}_O^+ +\vec{\tau}_O^- =\vec{a}\times\vec{F}^+ -\vec{a}\times\vec{F}^- =\vec{a}\times\left(q\vec{E}_0+q\vec{E}_0\right)$$

أو بعد الاختصار والترتيب:

$$\vec{\tau}_O=\left(q\,\overrightarrow{2a}\right)\times\vec{E}_0=\vec{P}\times\vec{E}_0 \qquad (29.2)$$

ومنه فإن ثنائي القطب يتوازن من أجل $\vec{\tau}_O=\vec{0}$ ؛ أي: $\vec{P}\,//\,\vec{E}_0$.

يتطلب تغيير وضعية ثنائي القطب θ من θ_1 إلى θ_2 عملا W ينجزه الحقل الخارجي $\vec{E}_0$ ؛

$$W=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left|\vec{\tau}_O\right|d\theta=PE_0\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\,d\theta=PE_0\left(\cos\theta_1-\cos\theta_2\right)$$

هذا العمل يتحول إلى طاقة كامنة E_p لثنائي القطب داخل الحقل الخارجي. فإذا اصطلحنا على أن الوضع $\theta_1=\pi/2$ يمثل مبدأ الطاقات الكامنة $\left[E_p(\pi/2)=0\right]$ ، فإن الطاقة الكامنة في أي وضع آخر $\theta_2=\theta$ تساوي:

$$E_p(\theta)=-\left|\vec{P}\right|\left|\vec{E}_0\right|\cos\theta=-\vec{P}\cdot\vec{E}_0 \qquad (30.2)$$

مثال(5.2): تطبيق عددي

في الكثير من المركبات العضوية نجد الرابطة الثنائية $C = O$ [أنظر الشكل(8.2)] تمثل عزم ثنائي قطب يساوي تقريبا: $P = 8.0\,10^{-30}\,C.m$ ، وتفصل بين الذرتين مسافة $2a = 1.2\,\overset{o}{A}$.

أ) أحسب الشحنة الفائضة في كل من الذرتين $C(+)$ و $O(-)$.

ب) أحسب الكمون على محور ثنائي القطب في نقطة تبعد عنه مسافة، وتقع موالية لذرة الأكسجين.

الجواب:

أ) فائض الشحنة على كل ذرة يساوي:

$$|q| = \frac{P}{2a} = \frac{8.0\,10^{-30}}{9\,10^{-10}} = 6.6\,10^{-20}\,C$$

ب) نضع $\theta = \pi$ في عبارة الكمون(25.3)، فنحصل على:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P\cos\theta}{r^2} = \left(9\,10^{9}\right)\frac{-\left(8\,10^{-30}\right)}{\left(9\,10^{-10}\right)^2} = -8.8\,mV$$

تمرين(2.2):

يمثل جزيء كلور الماء HCl ثنائي قطب كهربائي عزمه: $P = 3.4\,10^{-30}\,C.m$ ، وتفصل بين شحنتيه مسافة $2a = 1\,\overset{o}{A}$ تقريبا [الشكل(8.2)].

أ) عين الشحنة الصرفة على كل ذرة.

ب) ما هو عزم القوة الأعظمي τ_{Max} الذي يمارسه الحقل الخارجي $E_0 = 2.5\,N.C^{-1}$ ، على ثنائي القطب؟

ج) ما هي الطاقة الكامنة المكتسبة E_p عندما يدور الجزيء بزاوية بالنسبة إلى موضع توازنه الذي تفترض فيه الطاقة الكامنة أصغرية؟

مثال(6.2): التوزيع الحلقي

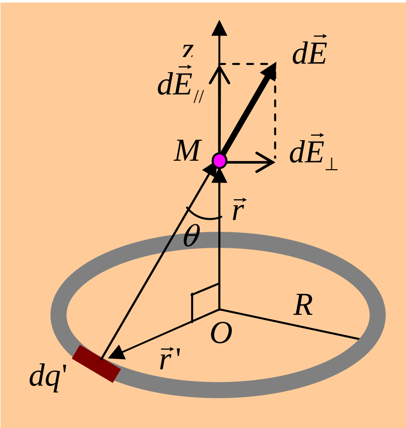
يبين الشكل(11.3) توزيعا مستمرا بكثافة منتظمة λ على محيط الحلقة $C(O,R)$ التي محورها Oz.

أ) عين الحقل الكهربائي $\vec{E}(\vec{r})$ في نقطة M من المحور Oz.

ب) استنتج عبارة الكمون $\phi(r)$ في نفس الموضع.

ج) استنتج من (أ) عبارة الحقل في المركز O، عندما تتوزع الشحنة بكثافة منتظمة σ على محيط نصف كرة (قبة) دائرتها العظمى نفس الحلقة السابقة $C(O,R)$، وتقعيرها في جهة Oz.

الجواب: في مثل هذه الحالات نستعمل العبارة(22.2)، ونضع فيها: $dq'=\lambda\, d\ell'$، حيث $d\ell'$ عنصر الطول الذي تتوزع عليه الشحنة dq'؛



الشكل(11.2)

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{(C)}\frac{d\ell'(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

($\oint$ رمز التكامل على خط مغلق)

لكن قبل الخوض في تفاصيل الحساب، يجدر بك دائما أن تنظر في طبيعة توزيع الشحنات، هل يتسم بتناظر ما؟ إذ أن التناظر من شأنه أن يلغي بعض خطوات الحساب ويعفيك منها مسبقا. وبالفعل فإن التوزيع الحلقي يتسم بالتناظر الأسطواني (تناظر حول المحور Oz) كما يوضح الشكل؛ إذ نجد لكل عنصر شحنة dq' عنصرا نظيرا dq'' بالنسبة إلى المركز O، وهو ما يجعل المركبات العمودية $d\vec{E}_{\perp}$ على هذا المحور تفنى بالجمع (أو بالتكامل) مثنى مثنى، وليس يبقى سوى المركبات $d\vec{E}_{//}$ الموازية للمحور، بحيث أن:

$$dE_{//}=dE_z=|d\vec{E}(\vec{r})|\cos\theta \quad ; \quad E_x=E_y=0$$

ومن هنا تؤول عبارة الحقل الكلي إلى:

$$E_z=\int dE_{//}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{(C)}\frac{d\ell'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}$$

وبالاستعانة بالشكل(11.2) نلاحظ أن:

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2=r^2+r'^2=z^2+R^2 \quad ; \quad \cos\theta=\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

وبالتعويض في عبارة الحقل:

$$E_z=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}}\oint_{(C)}d\ell'=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}}(2\pi R)$$

ومنه: **(31.2)**

$$E_z(z)=\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}} \qquad (31.2)$$

ب) نعتمد هنا على علاقة التجول:

$$V_{BA}=\phi_B-\phi_A=-\int_A^B\vec{E}\bullet d\vec{r}=-\int_A^B E_z\,dz$$

إلتماسا للتبسيط، نفترض الموضع A في غاية البعد، بحيث أن: $\phi_A = \phi(\infty) = 0$. وفي نفس الوقت نفترض النقطة B منطبقة على المراقب M؛ فنحصل بذلك على:

$$\phi_B = \phi(z) = -\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\int_{\infty}^{z}\frac{z\,dz}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}$$

وهو ما يفضي بعد التكامل إلى العبارة:

$$\phi(z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}} \qquad (32.2)$$

حالات خاصة:

☜ الحقل في المركز معدوم، بينما الكمون ثابت؛

$$E(0) = 0 \qquad ; \qquad \phi(0) = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}$$

☜ في حالة المراقب البعيد $(z >> R)$ نجد:

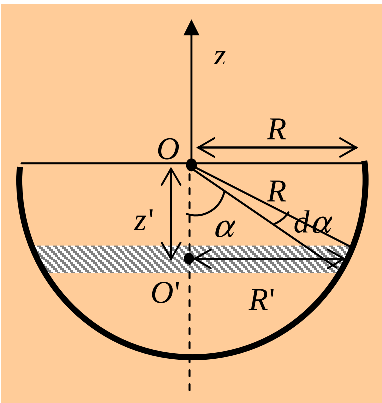
$$E(z) \approx \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0 z^2} \qquad ; \qquad \phi(z) \approx \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0 z}$$

أو أيضا، باعتبار: $\lambda = \frac{q'}{2\pi R}$ و $z = r$؛

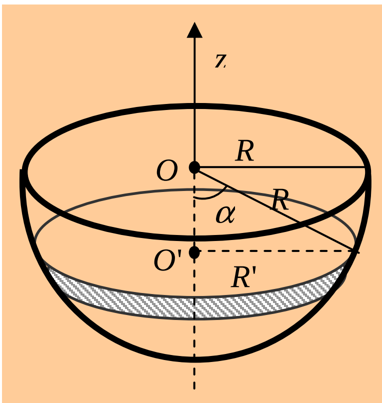
$$E(z) \approx \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad ; \qquad \phi(z) \approx \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

وهما نفس عبارتي الحقل والكمون لشحنة نقطية q' متجمعة في المركز O على بعد r من المراقب M.

ج) إذا توهما نصف الكرة كحلقات متراكمة ومتمحورة حول Oz كما هو مبين على الشكل(12.3)، سمك الواحدة منها $(R\,d\alpha)$، ونصف قطرها $(R' = R\sin\alpha)$، وسطحها $\left[dS = (2\pi R')(R\,d\alpha)\right]$



الشكل(13.2)



الشكل(12.2)

وشحنتها $\left[dq' = \sigma\,dS = \sigma\left(2\pi R^2\sin\alpha\,d\alpha\right)\right]$، فإن حقل الحلقة الواحدة $C'(O', R')$ الواقعة على بعد $(z' = O'O = R\cos\alpha)$ من المراقب O يتخذ نفس الصورة(31.2)؛

$$dE_z(z) = \frac{\lambda R'}{2\varepsilon_0}\frac{z'}{\left(z'^2+R'^2\right)^{3/2}}$$

لكن بناء على الشكل(13.2):

$$\lambda = \frac{dq'}{\ell'} = \frac{\sigma(2\pi R')(R\,d\alpha)}{2\pi R} = \sigma\,R\,d\alpha$$

ومنه نخلص إلىالعبارة:

$$dE_z(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sin\alpha\,\cos\alpha\,d\alpha = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\sin 2\alpha\,d\alpha$$

ولحساب الحقل الكلي للقبة، نكامل من أجل قيم α بحيث نمسح جميع الحلقات:

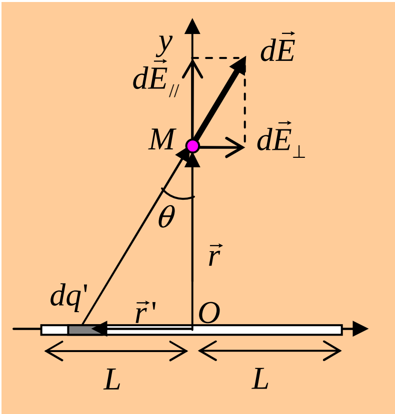
$$E_z = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\sin 2\alpha\,d\alpha = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

تمرين(3.2): التوزيع الخطي الطويل

يبين الشكل الجانبي(14.2) توزيعا مستمرا بكثافة منتظمة λ على خط مستقيم طوله $2L$. عالج المسألة على غرار المثال السابق(6.3) لتثبت أن:

أ) الحقل $\vec{E}$ عند نقطة M من العمود المنصف للقطعة $2L$ يساوي:

$$\vec{E}(y) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\frac{2L}{\sqrt{y^2+L^2}}\vec{e}_y \qquad \textbf{(32.2)}$$



الشكل(14.3)

ب) الحقل بالنسبة إلى المراقب القريب جدا من المستقيم يساوي:

$$E(y) \approx \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y} \qquad \textbf{(33.2)}$$

ج) الحقل الناشئ عن مستو لا نهائي يساوي:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_N \qquad \textbf{(34.2)}$$

حيث σ كثافة الشحنات على المستوي، و $\vec{e}_N$ شعاع الوحدة الناظمي عليه.

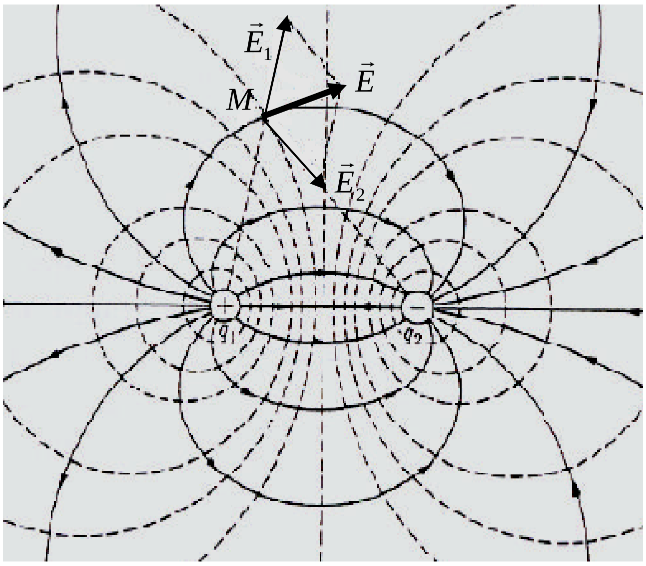
(تلميح: يمكنك هنا توهم هذا المستوي على أنه مستقيمات طويلة متراصة).

د) استنتج من (ب) الحقل بين لبوسي مكثف مستو تفصلهما المسافة d، وكذلك الحقل خارجهما، ثم أحسب فرق الكمون V بين اللبوسين.

5.2 ـ خطوط الحقل وسويات الكمون :

تعتبر خطوط الحقل (أو خطوط القوة) وسويات الكمون (أو سطوح تساوي الكمون) طريقة مثلى لوصف الظاهرة الكهربائية بطريقة بيانية. وهي في نفس الوقت طريقة تقريبية لحساب الحقل والكمون لاسيما في الحالات النظرية المعقدة.

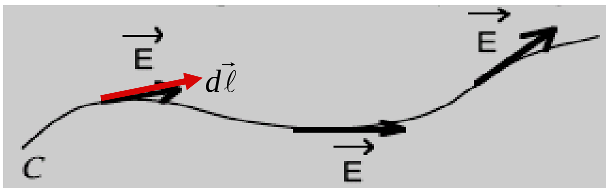
نعرف خط الحقل بأنه المنحنى (C) الذي يكون مماسيا في أية نقطة من نقاطه لحامل الحقل في تلك النقطة. من خواص هذه الخطوط أنها مستمرة لا تلتقي أبدا، وأنها عمودية على سويات الكمون، وتخرج من الشحنات الموجبة لتنتهي إلى الشحنات السالبة. ويتناسب عددها طردا مع شدة الحقل؛ فكلما زادت شدة الحقل تراصت الخطوط أكثر [أنظر الشكل(2 3)].



الشكل(15.2) . خطوط الحقل وسويات الكمون

نعرف سوية الكمون بأنها السطح الذي يتساوى الكمون في جميع نقاطه، ويمتاز هذا السطح بكونه عموديا على خطوط القوة. تظهر السويات في الشكل(15.3) ممثلة في المستوي بخط منقطع، بينما تظهر خطوط الحقل بخط مستمر.

يمكن الحصول على المعادلة التحليلية لخطوط القوة أو لسويات الكمون على ضوء التعريف؛ ذلك



اشكل(16. 2) . خط القوة

أن عنصر الطول $\overrightarrow{d\ell}$ من خط القوة(C) يكون محمولا على المماس، ويوازي بالتالي شعاع الحقل كما يوضح الشكل(16.2). لذلك يمكن أن نكتب:

$$\vec{E}(\vec{r})\times\overrightarrow{d\ell}=\vec{0} \qquad (35.2)$$

وفي الإحداثيات المربعة نجد أن هذا الجداء يفضي إلى العلاقة التالية:

$$\frac{dx}{E_x}=\frac{dy}{E_y}=\frac{dz}{E_z} \qquad (36.2)$$

أما معادلة سوية الكمون فنحصل عليها من العلاقة:

$$\phi(r)=\phi(x,y,z)=\text{ثابت} \qquad (37.3)$$

مثال(7.2):

ناقش سويات الكمون وخطوط القوة لشحنة نقطية سالبة. أدعم ذلك بالرسم.

الجواب: عرفنا بأن كمون الشحنة النقطية q' يعطى عموما بالعلاقة:

$$\phi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

وعندما يكون الكمون ثابتا يغدو مقام الكسر ثابتا؛ أي:

$$|\vec{r}-\vec{r}'|=\text{ثابت} \qquad \Rightarrow \quad |\vec{r}-\vec{r}'|^2=R^2=\text{ثابت}$$

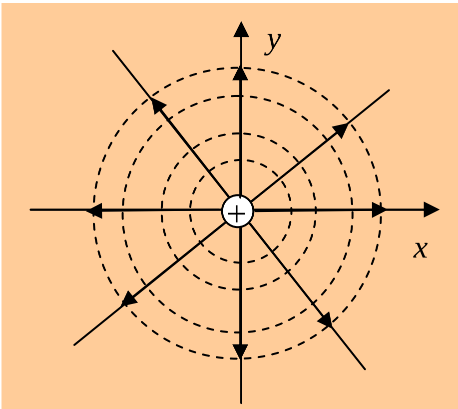
وهذا ما نعبر عنه تحليليا:

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=R^2$$

وهي معادلة سطوح كروية مركزها $q'(x',y',z')$ ، ونصف قطرها R .

أما خطوط القوة فإنها تكون مركزية نظرا لتماثل التوزيع؛ لأنه لو قربت شحنة موجبة من المنبع السالب q' لانجذبت نحو المركز.

والحقل هنا ليس ثابتا، بل تتناقص شدته كلما ابتعدنا عن المركز، ويدل على ذلك انفراج الخطوط عن بعضها البعض كلما ابتعدنا عن المركز. ومع ذلك تظل شدة الحقل ثابتة على أبعاد متساوية من المركز (أي على نفس سوية الكمون) [أنظر الشكل(17.2)].



الشكل(17.2)

مثال(8.2):

ما هي معادلة الخط المار بالنقطة $M_0(3,\pi/3)$ ، لحقل ثنائي القطب المعروف في الإحداثيات القطبية بالعلاقة(28.3)؟

الجواب: يعطى عنصر الطول في الإحداثيات القطبية بالعلاقة:

$$\overrightarrow{d\ell}=dr\,\vec{e}_r+rd\theta\,\vec{e}_\theta$$

وبناء على الشرط(35.2) نجد:

$$\vec{E}(\vec{r})\times\overrightarrow{d\ell}=\begin{bmatrix}\vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z\\ E_r & E_\theta & 0\\ dr & rd\theta & 0\end{bmatrix}=\vec{0}$$

وهو ما يؤدي بعد فكه إلى:

$$\frac{dr}{rE_r}=\frac{d\theta}{E_\theta}$$

لكن: $$E_r=\frac{2P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \quad ; \quad E_\theta=\frac{P\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

وبالتعويض والاختصار نحصل على:

$$\frac{dr}{r}=2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=2\frac{d(\sin\theta)}{\sin\theta}$$

وبالتكامل نجد:

$$\ln r = 2\ln|\sin\theta| + \ln r_0 = \ln\left(r_0 \sin^2\theta\right)$$

ومنه: $$r(\theta)=r_0\sin^2\theta$$

حيث r_0 (أو $\ln r_0$) هو ثابت التكامل، ويتعين من الشروط الابتدائية. فالخط المار من النقطة $M_0(3,\pi/3)$ يحقق الشرط:

$$3=r_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad r_0=4$$

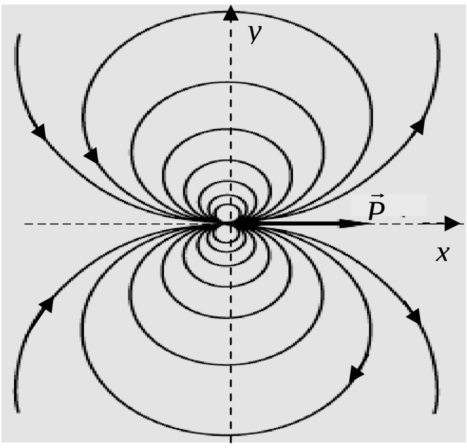
ومن هنا فإن المعادلة القطبية لخط القوة المار من M_0 تعطى بالعلاقة:

$$r(\theta)=4\sin^2\theta$$

لتمثيل هذا الخط بيانيا، يكفي أن نضع جدولا بحسب القيم الشهيرة للزاوية θ ؛

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
r	0	1	2	3	4

ويمراعاة أن الدالة الجيبية متناظرة بالنسبة إلى المحور Oy، وأن مربعها متناظر بالنسبة إلى المحور Ox في الدائرة المثلثية، يمكن أن نحصل على البيان الموضح بالشكل(18.2).



الشكل(18.2) ـ خطوط الحقل لثنائي القطب

تمرين(4.2):

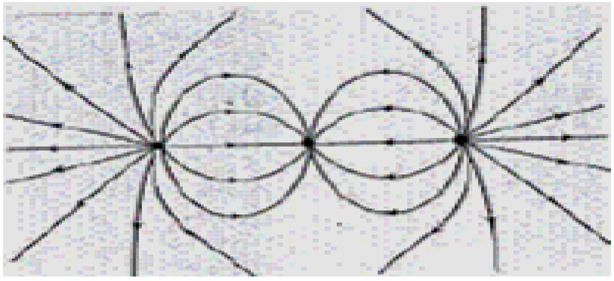
حدد الصورة العامة لمعادلة خطوط القوة وسويات الكمون للحقل الكهربائي:

$$\vec{E}(x,y)=(10xy)\,\vec{e}_x+(5x^2)\,\vec{e}_y$$

ثم عين اتجاه الحقل عند الموضع $M_1(2,3,-5)$ بواسطة شعاع الوحدة، ومثل خط القوة وسوية الكمون المارين من النقطة $M_2(1,3,6)$.

تمرين(5.2):

يبين الشكل التالي خطوط الحقل لتوزيع يتشكل من ثلاث شحنات نقطية.



أ) حدد إشارة كل شحنة.

ب) عين المواضع التي تنعدم فيها محصلة الحقل تقريبا. كيف هو حقل كل شحنة على حدة في هذه المواضع؟

مثال(9.2): معادلة سوية الكمون

لدينا دالة الكمون $\phi(x,y)=ax^2+by^2$

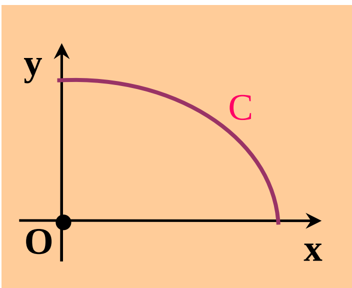
أ) ما هو شكل سويات الكمون؟

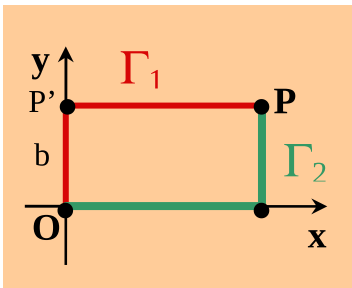
ب) أحسب تدرج الكمون.

ج) تأكد من أن $\vec{\nabla}\phi(x,y)$ ناظمي على هذه السويات.

د) أحسب التكامل $\int_0^P \vec{\nabla}\phi\cdot\vec{d\ell}$ على المسارين Γ_1 و Γ_2.

ه) أحسب التكامل $\int_0^P \vec{\nabla}\phi\cdot\vec{d\ell}$ على طول القوس الدائري (C) في الحالة الخاصة $a=b$.





الجواب:

أ) معادلة كل سوية هي:

$$ax^2+by^2=C$$

حيث C ثابت، فالسويات عبارة عن قطوع ناقصة.

ب) تدرج الكمون:

$$\vec{\nabla}\phi(x,y)=\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{e}_y=2\left[ax\,\vec{e}_x+ay\,\vec{e}_y\right]$$

ج) شرط التعامد:

$$\vec{\nabla}\phi\cdot\overrightarrow{d\ell}=0$$

لكن عنصر الإزاحة في الإحداثيات المربعة يساوي: $\overrightarrow{d\ell}=dx\,\vec{e}_x+dy\,\vec{e}_y+dz\,\vec{e}_z$. وبناء على النتيجة (ب) فإن الجداء السلمي يؤدي إلى:

$$\vec{\nabla}\phi\cdot\overrightarrow{d\ell}=\left[2ax\,dx+2by\,dy\right]$$

وقد يكتب على الصورة:

$$\vec{\nabla}\phi\cdot\overrightarrow{d\ell}=d\left[ax^2+by^2\right]=d[C]=0$$

فشرط التعامد محقق.

د) التكامل على المسار Γ_1 (أي مرورا بالنقطة’P):

$$\int_0^P\vec{\nabla}\phi\cdot\overrightarrow{d\ell}=\int_0^{P'}\vec{\nabla}\phi\cdot\overrightarrow{d\ell}+\int_{P'}^P\vec{\nabla}\phi\cdot\overrightarrow{d\ell}$$

فعلى الخط المستقيم ’OP، نلاحظ أن $x=0$ وبالتالي $dx=0$، بينما يتغير y من0 إلىb:

$$\int_0^{P'}\vec{\nabla}\phi\cdot\overrightarrow{d\ell}=2b\int_0^b y\,dy=b^3$$

وعلى الخط المستقيم P’P، نلاحظ أن $y=b$ وبالتالي $dy=0$، بينما يتغيرx من0 إلىa:

$$\int_{P'}^P\vec{\nabla}\phi\cdot\overrightarrow{d\ell}=2a\int_0^a x\,dx=a^3$$

وبهذا يصبح التكامل على المسار Γ_1 :

$$\int_0^{P'}\vec{\nabla}\phi\cdot\overrightarrow{d\ell}=a^3+b^3$$

وبالمثل نجد نفس النتيجة إذا ما كاملنا على المسار Γ_2 (أي مرورا بالنقطة’’P)، مما يدل على أن التكامل $\int_0^P\vec{\nabla}\phi\cdot\overrightarrow{d\ell}$ مستقل عن المسار المتبع بين النقطتينO وP.

ه) معادلة المسار الدائري من الشكل: $x^2+y^2=a^2$ ، وتفاضل الطرفين يؤدي إلى العلاقة بينx وy: $\left[x\,dx=-y\,dy\right]$. لذا ستكون نتيجة التكامل صفرا.

6.2 ـ الطاقة الكامنة الكهربائية :

يشمل قانون كولوم أساسا كل الكهرباء الساكنة، مثلما تتضمن قوانين نيوتن كل علم الحركة. فإذا توفرت شحنات كهربائية في مواضع معلومة أمكن إيجاد كل القوى الكهربائية، وإذا توفرت شحنات حرة الحركة تحت تأثير أنواع أخرى من القوى أمكن بالمثل إيجاد حالة التوازن التي تظل فيها الشحنات ساكنة.
غير أنه من الملائم في الكهرطية . مثلما هو الحال في الميكانيك . أن نسوق مفاهيم أخرى أشمل

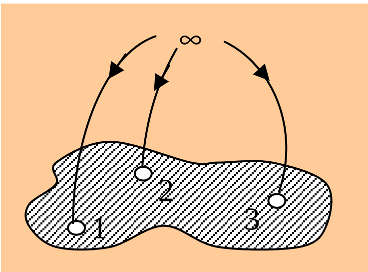
من مفهوم القوى، وعلى الخصوص "مفهوم الطاقة". فالطاقة هنا هي مفهوم واسع الاستعمال يحكم أن القوى الكهرطية هي قوى حافظة.

لنعتبر مبدئيا العمل الذي يبذله المعتبر من أجل وضع أجسام مشحونة في تشكيلة خاصة (أو توزيع معين من الشحنات). لقد سبق أن قدمنا في الفقرة(2.2) مفهوم فرق الكمون على أنه العمل المبذول أو الطاقة المستنفدة من قبل المعتبر لتحريك واحدة الشحنات الموجبة داخل حقل كهربائي [العلاقة(6.2)]؛ أي:

$$dW = q\,d\phi$$

إن إحضار شحنة أولى موجبة مثلا من ما لانهاية، مع وجود حقل شحنة أخرى موجبة وساكنة، يتطلب عملا يبذله عامل خارجي (المعتبر). فإذا توهمنا بأن المعتبر يحمل الشحنة إلى غاية موضع قريب من الشحنة الساكنة، ثم يمسكها هناك، فإن الطاقة يجب أن تحفظ، والطاقة المستنفدة في جلب الشحنة الأولى إلى موضعها الحالي تمثل الآن طاقة كامنة؛ لأن المعتبر لو رفع قبضته عنها لتسارعت تلقائيا مبتعدة عن الشحنة الساكنة (تنافر)، مكتسبة بذلك طاقة حركية لذاتها وقدرة على إنجاز عمل. وعلى ضوء ذلك يمكن أن نعين الطاقة الكامنة التي تتوفر في توزيع ما من الشحنات النقطية، بحساب العمل اللازم لتجميع هذه الشحنات ثم تثبيتها في أماكنها الحالية من التوزيع، الواحدة تلو الأخرى.

دعنا نبدأ بتصور فضاء خلو من الشحنات$(\vec{E}=\vec{0})$، نستقدم إليه ثلاث شحنات على التوالي من مكان بعيد (ما لانهاية) إلى المواضع 1 و2 و3 كما يوضح الشكل(19.2). فطاقاتها الكامنة على الترتيب حسب العلاقة(17.3) هي:



الشكل(19.2)

$$\begin{cases} E_{p_1} = q_1.0 = 0 \\ E_{p_2} = q_2\,\phi_{21} \\ E_{p_3} = q_3\,\phi_{31} + q_3\,\phi_{32} \end{cases}$$

والطاقة الكلية لهذا التوزيع هي:

$$E_p = \sum_{i=1}^{3} E_{p_i} = q_2\phi_{21} + q_3\phi_{31} + q_3\phi_{32} \qquad (38.2)$$

حيث ϕ_{ij} هو الكمون الناشئ عن الشحنة q_i في الموضع M_j.

نلاحظ أن لكل حد في العلاقة(38.3) حدا مكافئا، نحصل عليه بالتبديل بين الدليلين i و j؛ فنكتب مثلا:

$$q_2\phi_{21} = q_2\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}} = q_1\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} = q_1\phi_{12}$$

وبناء على ذلك نكتب العبارة السابقة للطاقة بصورة ثانية مكافئة:

$$E_p = \sum_{i=1}^{3} E_{p_i} = q_1\phi_{12} + q_1\phi_{13} + q_2\phi_{23}$$

وبضم الطاقتين إلى بعضهما البعض نحصل على:

$$2E_p = q_1(\phi_{12}+\phi_{13})+q_2(\phi_{21}+\phi_{23})+q_3(\phi_{31}+\phi_{32})$$

حيث يمثل ما بين كل قوسين الكمون الكلي ϕ_i الذي تعيش فيه الشحنة q_i ، والناشئ عن باقي الشحنات.

إذا عممنا المسألة على توزيع نقطي عدد شحناته n، أمكن كتابة الطاقة الكامنة حسب العبارة:

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\phi_i \quad ; \quad \phi_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\phi_{ij} \qquad (39.2)$$

في حالة التوزيع المستمر $(n\to\infty)$ تغدو عبارة الطاقة(39.2) من الشكل:

$$E_p = \frac{1}{2}\int_{q'} dq'\phi(r') \qquad (40.2)$$

وفي الحالة الخاصة التي تتوزع فيه الشحنات على سوية كمون واحدة، تصبح عبارة الطاقة السابقة من الشكل:

$$E_p = \frac{1}{2}q'\phi(r') \qquad (41.2)$$

وكما عبرنا عن الطاقة الكامنة بدلالة الكمون، يمكن أن نعبر عنها بدلالة الحقل كالتالي:

$$E_p = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\text{كل الفضاء}} dV' E^2(r') \qquad (42.2)$$

حيث dV' عنصر الحجم الذي يشغله كل عنصر شحنة dq' عند الموضع r'. البرهان على هذه العلاقة لا يخلو من تعقيد، ويحتاج إلى مهارة رياضية تفوق مستوى هذا المقرر. ومع ذلك سنتعرض لهذا البرهان بعد الاطلاع على نظرية التدفق في الفصل الرابع.

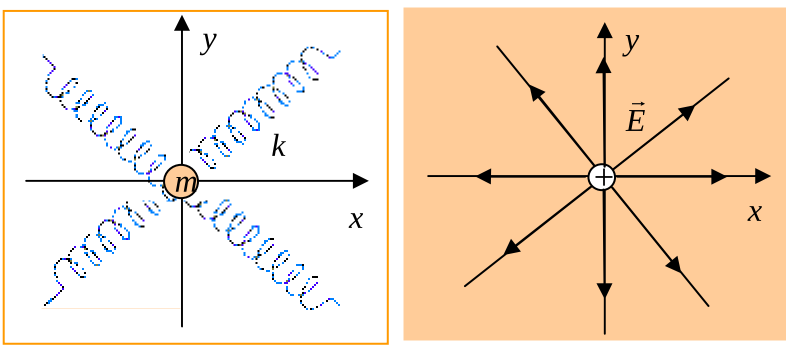
ملاحظات:

1. بمعاينة العلاقتين(40.2) و(42.2) يتبين بأن الأولى مناسبة للاستعمال إذا كان الكمون ثابتا معلوما، وأن الثانية مناسبة إذا كان الحقل ثابتا أو معلوما.
2. تدل العلاقة(42.2) على أن الكمية التالية تمثل الكثافة الحجمية للطاقة الكامنة:

$$\mathcal{E}_p(r') = \frac{dE_p}{dV'} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(r') \qquad (43.2)$$

وهي شبيهة بالطاقة الكامنة لنابض ثابت مرونته k، عندما يستطيل بمقدار x؛ حيث تكتب عبارتها على الصورة:

$$E_p(x) = \frac{1}{2}k\,x^2$$



الشكل(20.2) ـ تشابه خطوط الحقل مع نوابض مشدودة إلى كتلة

هذا التشابه يدعو إلى الحكم بأن خط الحقل الكهربائي يكافئ نابضا استطالته $|\vec{E}|$ وثابت مرونته ε_0 [أنظر الشكل(20.2)].

مثال(9.2):

ما هي الطاقة الكامنة لأربع شحنات متماثلة $Q = 4\,nC$، موزعة على أركان مربع طول ضلعه $a = 1m$ ؟

الجواب: نطبق مباشرة العلاقة(39.3):

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} q_i\phi_i \quad ; \quad \phi_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{4}\phi_{ij} \quad ; \quad \phi_{ij} = \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

مع ملاحظة أن:

$$q_i = q_j = Q \quad ; \quad r_{ij} = a \text{ أو } a\sqrt{2} \quad ; \quad \phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4$$

وبالتعويض والاختصار نجد:

$$E_p = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a\sqrt{2}} + \frac{1}{a}\right)\right] = \frac{\left(4+\sqrt{2}\right)Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = 780\ nJ$$

مثال(10.2):

تعطى دالة الكمون في الفراغ بالعلاقة:

$$\phi(x,y) = 2x + 4y \quad (V)$$

ما هي الطاقة الكامنة المختزنة في متر مكعب واحد من الحجم المتمركز حول مبدأ الإحداثيات؟

الجواب: دالة الكمون متغيرة، لهذا يفضل استعمال عبارة الطاقة الكامنة(42.3) بدلالة الحقل؛ حيث يشتق الحقل من الكمون حسب علاقة التدرج()؛

$$\vec{E}(x,y) = -\vec{\nabla}\phi(x,y) = -\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{e}_y = -2\vec{e}_x - 4\vec{e}_x$$

وهو حقل منتظم (ثابت طولا واتجاها)، وبذلك تكون الطاقة المختزنة في هذا الحقل لا نهائية. في مثل هذه الحالات يمكن الحديث عن كثافة الطاقة الكهربائية؛ التي هي الطاقة في واحدة الحجم:

$$\mathcal{E}_p(r') = \frac{dE_p}{dV'} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

$$\mathcal{E}_p(r') = 10\,\varepsilon_0 = 8.84\,10^{-11}\ J.m^{-3}$$

فكل متر مكعب من الفضاء يختزن طاقة كامنة كهربائية قدرها: $8.84\,10^{-11}\ J$.

تمرين(5.2):

البعد بين لبوسي مكثف مستو يساوي $d = 2\ cm$ **، وفرق الكمون بينهما** $V = 10\,V$ **، وأبعاد الواحد منهما0.5 م x 1 م.**

ما هي الطاقة المختزنة في هذا المكثف إذا افترضنا ثابت عازليته $\varepsilon \approx \varepsilon_0$**؟**

[الجواب: $E_p = 11\,nJ$**]**

تمرين(6.2): أسئلة للمراجعة

تهدف الأسئلة التالية إلى اختبار المفاهيم والمبادئ المحصل عليها في هذا الفصل.

أ) أكتب عبارة القوة بين شحنتين. اشرح الحالات المختلفة الممكنة. بين أن مبدأ الفعل ورد الفعل محقق.

ب) أكتب عبارة القوة المؤثرة على شحنة q **(واقعة عند مبدأ الإحداثيات) والتي تمارسها الشحنتان** q_1 **و** q_2 **الواقعتان على الترتيب عند النقطتين** $M_1(1,1)$ **و** $M_2(0,3)$.

ج) جد العلاقة بين القوة والحقل.

د) أعط أبعاد σ **(الكثافة السطحية للشحنات)، وقارنها مع أبعاد الحقل الكهربائي.**

ه) هل يمكن الحديث عن قوة الشحنة؟ وعن حقل الشحنة؟

و) هل يمكن لكثافة شحنات ثابتة أن تولد حقلا كهربائيا متغيرا في الفضاء؟

ز) أحسب عمل القوة الكهربائية اللازم لتقريب شحنتين تفصلهما في البداية مسافة $r = 1$ **، حتى تصبح في النهاية** $r = r_{12}$.

ح) عرف تجول الحقل الشعاعي.

ط) أذكر تحت أي شروط ينعدم تجول الحقل الشعاعي على مسار مغلق، ونص على الخواص المترتبة عن ذلك.

ي) أكتب عبارة الكمون الناشئ: (1) عن شحنة، (2) عن توزيع حجمي مستمر.

ك) جد طاقة التفاعل بين شحنتين نقطيتين (الطاقة الكامنة الكهربائية).

ل) جد أبعاد الجداء: $q\phi$.

م) هل يمكن تثبيت شحنة الناقل وكمونه؟