Théorie des Jeux

Mohammed Said RADJEF

Unité de Recherche LaMOS
Département de Recherche Opérationnelle
Faculté des Sciences Exactes
Université Abderrahmane Mira de Béjaia

Année universitaire 2016-2017

Jeux bimatriciels

Considérons un jeu fini à deux joueurs à somme non nulle

$$\langle I, \{X_i\}_{i\in I}, \{f_i\}_{i\in I}\rangle, \tag{1}$$

où

- $I = \{1, 2\}$- est l'ensemble des deux joueurs $(P1)$ et $(P2)$
- $X_1 = \{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m}\}$ est l'ensemble des stratégies pures du premier joueur
- $X_2 = \{x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}\}$ est l'ensemble des stratégies pures du second joueur
- la fonction de gain du premier joueur

$$\begin{aligned} f_1 : X_1 \times X_2 &\rightarrow R \\ (x_{1i}, x_{2j}) &\rightarrow f_1(x_{1i}, x_{2j}) = a_{ij} \end{aligned}$$

- la fonction de gain du second joueur

$$\begin{aligned} f_2 : X_1 \times X_2 &\rightarrow R \\ (x_{1i}, x_{2j}) &\rightarrow f_2(x_{1i}, x_{2j}) = b_{ij} \end{aligned}$$

Jeux bimatriciels

Le jeu (1) peut être entièrement caractérisé par les deux matrices des gains

$$\langle A, B \rangle, \tag{2}$$

où $A = (a_{ij})_{i \in M, j \in N}$ est la matrice des gains du premier joueur, $B = (b_{ij})_{i \in M, j \in N}$ est la matrice des gains du second joueur.

Remarque

Parfois, pour alléger les notations, on notera par $i \in X_1$ *la stratégie* $x_{1i} \in X_1$ *du joueur* **(P1)** *et il en serait de même pour le joueur* **(P2)**.

Concepts de solutions

Considérons un jeu bi-matriciel (A, B).

Concepts de solutions

Considérons un jeu bi-matriciel (A, B).
Étant donnée l'hypothèse que les deux joueurs **(P1)** et **(P2)** sont rationnels et doivent prendre leurs décisions simultanément,

- que peut-on prédire qu'ils vont jouer, ou que peut-on prédire qu'ils ne vont pas jouer ?

Concepts de solutions

Considérons un jeu bi-matriciel (A, B).
Étant donnée l'hypothèse que les deux joueurs **(P1)** et **(P2)** sont rationnels et doivent prendre leurs décisions simultanément,

- que peut-on prédire qu'ils vont jouer, ou que peut-on prédire qu'ils ne vont pas jouer ?
- quels choix stratégiques feraient les deux joueurs ?

Concepts de solutions

Considérons un jeu bi-matriciel (A, B).
Étant donnée l'hypothèse que les deux joueurs **(P1)** et **(P2)** sont rationnels et doivent prendre leurs décisions simultanément,

- que peut-on prédire qu'ils vont jouer, ou que peut-on prédire qu'ils ne vont pas jouer ?
- quels choix stratégiques feraient les deux joueurs ?
- La réponse à ces questions fera l'objet de ce chapitre.

Équilibre en stratégies non dominées

Definition

On dit que la stratégie pure $i^* \in X_1$ du joueur **(P1)** (respectivement $j^* \in X_2$ du joueur **(P2)**), domine strictement la stratégie pure $i \in X_1$ pour le joueur **(P1)**, (respectivement $j \in X_2$ du joueur **(P2)**), si,

$$a_{i^*k} > a_{ik}, \quad \forall k \in \{1, \ldots, m\},$$

$$(\text{respectivement}, b_{kj^*} > b_{kj}, \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\}).$$

Équilibre en stratégies non dominées

Definition (Équilibre en stratégies non dominées)

Une situation $(x_{1i^*}, x_{2j^*}) \in X_1 \times X_2$ est appelée équilibre en stratégies non dominées dans le jeu bi-matriciel (2), si la stratégie $x_{1i^*} \in X_1$ (respectivement $x_{2j^*} \in X_2$) est une stratégie non dominée pour le joueur **(P1)** (respectivement pour le joueur **(P2)**).

Dilemme du prisonnier

Exemple (Dilemme du prisonnier)

Le dilemme du prisonnier est l'un des exemples les plus connus dans la littérature de la théorie des jeux. Il caractérise une situation dans laquelle deux individus sont suspectés d'avoir commis un crime. Interrogés séparément, la police leur fait les propositions suivantes :

Dilemme du prisonnier

- S'ils avouent tous les deux, ils seront condamnés à 8 ans de prison chacun.
- S'ils nient tous les deux, ils seront condamnés à 2 ans de prison chacun.
- Si l'un avoue et l'autre nie, alors celui qui aura nié sera condamné à 30 ans de prison, alors que l'autre sera libéré.

Les évaluations des différentes situations du jeu pour chacun des deux joueurs sont données sous forme de deux matrices notées : A pour le joueur **(P1)** et B pour le joueur **(P2)**.

Dilemme du prisonnier

$$\begin{array}{lll} & & \textbf{(P2)} \\ & & \begin{array}{cc} \textit{Avouer} & \textit{Nier} \end{array} \\ \textbf{(P1)} & \begin{array}{r} \textit{Avouer} \\ \textit{Nier} \end{array} & \begin{pmatrix} (-8,-8) & (0,-30) \\ (-30,0) & (-2,-2) \end{pmatrix} \end{array}$$

FIGURE: Jeu du *dilemme du prisonnier*.

Dilemme du prisonnier

$$\begin{array}{cc} & \textbf{(P2)} \\ & \begin{array}{cc} \textit{Avouer} & \textit{Nier} \end{array} \end{array}$$

$$\textbf{(P1)} \quad \begin{array}{c} \textit{Avouer} \\ \textit{Nier} \end{array} \begin{pmatrix} (-8,-8) & (0,-30) \\ (-30,0) & (-2,-2) \end{pmatrix}$$

FIGURE: Jeu du *dilemme du prisonnier*.

L'équilibre en stratégies non dominées dans cette situation est la paire de stratégies pures (x_{11}, x_{21})=(avouer, avouer).

Definition

Une paire de stratégies $(x_{1i^*}, x_{2j^*}) \in X_1 \times X_2$ est une paire de stratégies de sécurité pour les deux joueurs **(P1)** et **(P2)** dans le jeu bimatriciel (2), si

$$\begin{cases} V_1^S = \min\limits_{j=\overline{1,n}} a_{i^*j} = \max\limits_{i=\overline{1,m}} \min\limits_{j=\overline{1,n}} a_{ij}, \\ V_2^S = \min\limits_{i=\overline{1,m}} b_{ij^*} = \max\limits_{j=\overline{1,n}} \min\limits_{i=\overline{1,m}} b_{ij}. \end{cases} \tag{3}$$

Niveaux de sécurité

Les niveaux de sécurité correspondants aux joueurs **(P1)** et **(P2)** respectivement sont V_1^S et V_2^S.

Exemple

$$
\begin{array}{cc}
 & \textbf{(P2)} \\
\textbf{(P1)} & \begin{array}{c|cc} & A & N \\ \hline A & -8 & 0 \\ N & -30 & -2 \end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & N \end{array} \\ \begin{array}{c} {\color{red}A} \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -30 & -2 \end{pmatrix} \end{array}
$$

FIGURE: Jeu du *dilemme du prisonnier*.

La stratégie de sécurité pour le joueur **(P1)** *est :*

$$V_1^S = \min_{j=\overline{1,n}} a_{i^*j} = \max_{i=\overline{1,m}} \min_{j=\overline{1,n}} a_{ij}$$

x_{11}= *Avouer et* $V_1^S = -8.$

Exemple

Exemple

$$\begin{array}{cc} & \textbf{(P2)} \\ \textbf{(P1)} & \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & N \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} -8 & -30 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$

FIGURE: Jeu du *dilemme du prisonnier*.

La stratégie de sécurité pour le joueur :

$$V_2^S = \min_{i=\overline{1,m}} b_{ij^*} = \max_{j=\overline{1,n}} \min_{i=\overline{1,m}} b_{ij}.$$

(P2) *est* x_{21}=*Avouer et* V_2^S=-8.

Rationalité individuelle

Definition (Rationalité individuelle)

Une situation $(x_{1i^*}, x_{2j^*}) \in X_1 \times X_2$ dans le jeu bimatriciel (2) est dite individuellement rationnelle, si

$$\begin{cases} a_{i^*j^*} \geq V_1^S \\ b_{i^*j^*} \geq V_2^S \end{cases}$$

Exemple

La situation (x_{11}, x_{21})=*(avouer, avouer) est individuellement rationnelle dans le jeu du dilemme du prisonnier.*

Équilibre de Nash en stratégies pures

L'équilibre de Nash en stratégies pures dans le cas du jeu bimatriciel (2) est défini comme suit :

Definition (Équilibre de Nash)

Une situation $(x_{1i^*}, x_{2j^*}) \in X_1 \times X_2$ est un équilibre de Nash dans le jeu bimatriciel (2), si

$$\begin{cases} a_{i^*j^*} \geq a_{ij^*}, & \forall i = \overline{1, m}\,; \\ b_{i^*j^*} \geq b_{i^*j}, & \forall j = \overline{1, n}\,; \end{cases}$$

Exemple

$$\begin{array}{ccc} & & \textbf{(P2)} \\ & & \begin{array}{cc} \textit{Avouer} & \textit{Nier} \end{array} \\ \textbf{(P1)} & \begin{array}{c} \textit{Avouer} \\ \textit{Nier} \end{array} & \begin{pmatrix} (-8,-8) & (0,-30) \\ (-30,0) & (-2,-2) \end{pmatrix} \end{array}$$

FIGURE: Jeu du *dilemme du prisonnier*.

La situation (x_{11}, x_{21})=(avouer, avouer) constitue un équilibre de Nash dans le jeu du dilemme du prisonnier.

Remarque

Un jeu bimatriciel peut admettre plus d'une solution équilibre de Nash, avec les gains respectifs différents. Dans ce cas, le choix entre ces équilibres devient problématique.

Exemple

Considérons le jeu bimatriciel suivant :

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x_{21} & x_{22} \end{array} \\ \begin{array}{c} x_{11} \\ x_{12} \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x_{21} & x_{22} \end{array} \\ \begin{array}{c} x_{11} \\ x_{12} \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple

Considérons le jeu bimatriciel suivant :

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x_{21} & x_{22} \end{array} \\ \begin{array}{c} x_{11} \\ x_{12} \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x_{21} & x_{22} \end{array} \\ \begin{array}{c} x_{11} \\ x_{12} \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ce jeu admet deux équilibres de Nash en stratégies pures qui sont (x_{11}, x_{21}) et (x_{12}, x_{22}) avec les résultats correspondants $(4, 2)$ et $(2, 5)$ respectivement.

Exemple

Considérons le jeu bimatriciel suivant :

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x_{21} & x_{22} \end{array} \\ \begin{array}{c} x_{11} \\ x_{12} \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x_{21} & x_{22} \end{array} \\ \begin{array}{c} x_{11} \\ x_{12} \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Mais puisqu'il n'y a pas de coopération entre les joueurs, le joueur **(P1)** peut alors choisir sa stratégie x_{11} et le joueur **(P2)** sa stratégie x_{22}.

Exemple

Considérons le jeu bimatriciel suivant :

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x_{21} & x_{22} \end{array} \\ \begin{array}{c} x_{11} \\ x_{12} \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x_{21} & x_{22} \end{array} \\ \begin{array}{c} x_{11} \\ x_{12} \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Mais puisqu'il n'y a pas de coopération entre les joueurs, le joueur **(P1)** peut alors choisir sa stratégie x_{11} et le joueur **(P2)** sa stratégie x_{22}, qui mènerait vers un résultat du jeu égal à $(0, 0)$ qui n'est pas favorable pour les deux joueurs, en d'autres termes, on obtient une situation qui ne soit même pas un équilibre.

Exemple

Considérons le jeu bimatriciel suivant :

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x_{21} & x_{22} \end{array} \\ \begin{array}{c} x_{11} \\ x_{12} \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x_{21} & x_{22} \end{array} \\ \begin{array}{c} x_{11} \\ x_{12} \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Mais puisqu'il n'y a pas de coopération entre les joueurs, le joueur **(P1)** peut alors choisir sa stratégie x_{11} et le joueur **(P2)** sa stratégie x_{22}, qui mènerait vers un résultat du jeu égal à $(0, 0)$ qui n'est pas favorable pour les deux joueurs, en d'autres termes, on obtient une situation qui ne soit même pas un équilibre.
Ceci est en fait l'un des dilemmes dans la prise de décision dans les jeux non coopératifs lorsque un jeu donné admet plus d'un équilibre de Nash en stratégies pures.

Équivalence stratégique

Definition

Deux jeux bimatriciels avec de matrices de gains (A, B) et (C, D) respectivement sont dits stratégiquement équivalents, s'il existe des constantes positives γ_1, γ_2, δ_1 et δ_2 telles que :

$$
\begin{aligned}
a_{ij} &= \gamma_1 c_{ij} + \delta_1 \\
b_{ij} &= \gamma_2 d_{ij} + \delta_2
\end{aligned}
$$

pour tout $i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$

Équivalence stratégique

Proposition

Tous les jeux bimatriciels stratégiquement équivalents possèdent le même équilibre de Nash.

Équivalence stratégique

Proposition

Les équilibres de Nash dans un jeu bimatriciel (A, B) sont interchangeables, si le jeu (A, B) est stratégiquement équivalent à $(A, -A)$.

Équilibre de Pareto

La question que l'on peut se poser est de savoir s'il est possible d'ordonner les solutions d'équilibre de Nash pour déclarer une seule d'entre elles comme solution équilibre de Nash la plus favorable. Ceci n'est pas toujours possible, puisqu'il n'existe pas d'ordre total entre des paires de nombres. Mais quelques notions de *meilleure* et *admissible* peuvent être introduites à travers un ordre partiel.

Domination au sens de Pareto

Definition

Une paire de stratégies (x_{1i_1}, x_{2j_1}) est dite Pareto-meilleure qu'une autre paire de stratégies (x_{1i_2}, x_{2j_2}), si,

$$\begin{cases} a_{i_2 j_2} \leq a_{i_1 j_1}, \\ b_{i_2 j_2} \leq b_{i_1 j_1}. \end{cases}$$

où, l'une, au moins des inégalités, est stricte.

Equilibre admissible

Definition

Un équilibre de Nash est dit admissible s'il n'existe pas un autre équilibre de Nash qui est Pareto-meilleur.

Exemple

Considérons le jeu bimatriciel suivant :

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x_{21} & x_{22} \end{array} \\ \begin{array}{c} x_{11} \\ x_{12} \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x_{21} & x_{22} \end{array} \\ \begin{array}{c} x_{11} \\ x_{12} \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array};$$

Exemple

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x_{21} & x_{22} \end{array} \\ \begin{array}{c} x_{11} \\ x_{12} \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x_{21} & x_{22} \end{array} \\ \begin{array}{c} x_{11} \\ x_{12} \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array} ;$$

Ce jeu admet deux équilibres de Nash en stratégies pures qui sont (x_{11}, x_{21}) et (x_{12}, x_{22}) avec les résultats correspondant $(3, 3)$ et $(5, 3)$ respectivement, mais un seul équilibre de Nash est admissible qui est (x_{12}, x_{22}), appelé aussi *équilibre de Pareto*.

Calcul de l'équilibre de Nash en stratégies pures

Nous décrivons dans ce qui suit certains algorithmes qui permettent de déterminer l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures dans un jeu bimatriciel (2).

Algorithme basé sur la notion de jeu augmenté

Cet algorithme, dû à S. X. BAI, est basé sur la notion du jeu augmenté correspondant au jeu bimatriciel (2) avec les mêmes espaces de stratégies pures X_1 pour le joueur **(P1)** et X_2 pour le joueur **(P2)** et des matrices de gains $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ qui seront définies d'une manière spécifique.

Jeu augmenté

Definition

Le jeu augmenté correspondant au jeu bimatriciel (2) est défini par :

$$< X_1, X_2, \tilde{A}, \tilde{B} >, \tag{4}$$

où

$$\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}, \quad \tilde{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{si } a_{ij} = \max_k a_{kj}; \\ -M, & \text{sinon}; \end{cases} \tag{5}$$

$$\tilde{B} = \left(\tilde{b}_{ij}\right)_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}, \quad \tilde{b}_{ij} = \begin{cases} b_{ij}, & \text{si } b_{ij} = \max_k b_{ik}; \\ -M, & \text{sinon}; \end{cases} \tag{6}$$

où $M > \max_{i,j}\{|a_{ij}|, |b_{ij}|\}$.

Jeu augmenté

Proposition (S. X. BAI)

Une situation $(x_{1i^*}, x_{2j^*}) \in X_1 \times X_2$ *est un équilibre de Nash en stratégies pures dans le jeu bimatriciel (2), si et seulement si,*

$$\begin{cases} \tilde{a}_{i^*j^*} > -M, \\ \tilde{b}_{i^*j^*} > -M. \end{cases}$$

Algorithme de S. X. BAI

$\rightsquigarrow$ Introduire les deux $m \times n-$matrices A et B.

$\rightsquigarrow$ Déterminer un scalaire M tel que :

$$M = \max_{i,j}(|a_{ij}|, |b_{ij}|) + 1. \tag{7}$$

$\rightsquigarrow$ Construire $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ selon la formule (5).

$\rightsquigarrow$ Rechercher les paires de stratégies (x_{1i^*}, x_{2j^*}) vérifiant

$$\begin{cases} \tilde{a}_{i^*j^*} > -M, \\ \tilde{b}_{i^*j^*} > -M. \end{cases}$$

Si une telle paire de stratégies n'existe pas, terminer, le jeu n'admet pas d'équilibre de Nash en stratégies pures, sinon aller à l'étape 5.

$\rightsquigarrow$ Sélectionner dans l'ensemble des équilibres de Nash, un équilibre de Nash admissible.

$\rightsquigarrow$ Terminer.

Proposition

Proposition

L'algorithme de S. X. BAI montre à la fin de l'exécution que :

- ✓ *soit le jeu bimatriciel (2) admet un équilibre de Nash en stratégies pures,*
- ✓ *soit il n'existe pas de telle solution.*

Exemple

Soit le jeu bimatriciel suivant :

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{array} \\ \begin{array}{c} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 3 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{array} \\ \begin{array}{c} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Exemple

On calcule la valeur de M selon la formule (7) :

$$M = \max_{i,j}(|a_{ij}|, |b_{ij}|) + 1 = 9 + 1 = 10.$$

Construisons les matrices $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ selon la formule (5).

$$\tilde{a} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{array} \\ \begin{array}{c} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & -10 & 6 \\ -10 & -10 & -10 \\ -10 & 9 & -10 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \tilde{b} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{array} \\ \begin{array}{c} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & -10 & -10 \\ -10 & -10 & 6 \\ -10 & -10 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple

$$\tilde{a} = \begin{array}{c} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & -10 & 6 \\ -10 & -10 & -10 \\ -10 & 9 & -10 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \tilde{b} = \begin{array}{c} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & -10 & -10 \\ -10 & -10 & 6 \\ -10 & -10 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

La seule paire de stratégies vérifiant

$$\begin{cases} \tilde{a}_{i^* j^*} > -10, \\ \tilde{b}_{i^* j^*} > -10, \end{cases}$$

est la paire de stratégies pures $(x_{1i^*}, x_{2j^*}) = (x_{11}, x_{21})$ qui constitue un équilibre de Nash en stratégies pures, avec les gains respectifs des joueurs **(P1)** et **(P2)** égaux à 4 et 3.

Comme pour les jeux matriciels, en absence d'un équilibre de Nash en stratégie pures, les joueurs utiliseront leurs stratégies mixtes. Le jeu bimatriciel correspondant au jeu bimatriciel (2) est défini par

$$< \Delta_m, \Delta_n, f_1, f_2 >, \tag{8}$$

où

- $\Delta_m = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m \ / \ \alpha_i \in \{0,1\}, \ \forall i = 1, \ldots, m, \ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1\}$ est l'ensemble des stratégies mixtes du joueur **(P1)**,
- $\Delta_n = \{\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \beta_j \in \{0,1\}, \ \forall j = 1, \ldots, n, \ \sum_{j=1}^{n} \beta_j = 1\}$ est l'ensemble des stratégies mixtes du joueur **(P2)**,

Jeux bimatriciels en stratégies mixtes

- f_1 est la fonction des gains du joueur **(P1)** définie par :

$$f_1 : \Delta_m \times \Delta_n \longrightarrow \mathbb{R} \tag{9}$$
$$(\alpha, \beta) \longmapsto f_1(\alpha, \beta) = \alpha^t A\beta, \tag{10}$$

- f_2 est la fonction des gains du joueur **(P2)** définie par :

$$f^2 : \Delta_m \times \Delta_n \longrightarrow \mathbb{R} \tag{11}$$
$$(\alpha, \beta) \longmapsto f_1(\alpha, \beta) = \alpha^t B\beta, \tag{12}$$

Definition

Un couple de stratégies mixtes $(\alpha^*, \beta^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$ est un équilibre de Nash du jeu (8), si

$$\begin{aligned} \alpha^t A\beta^* &\leq (\alpha^*)^t A\beta^*, \quad \forall \alpha \in \Delta_m, & (13) \\ (\alpha^*)^t B\beta &\leq (\alpha^*)^t B\beta^*, \quad \forall \beta \in \Delta_n & (14) \end{aligned}$$

Programmation bilinéaire

L'une des formulations possibles du problème de la recherche d'un équilibre de Nash en stratégies mixtes dans le jeu bimatriciel (8) est sa transformation en un problème de programmation nonlinéaire (en fait un programme bilinéaire).

Programmation bilinéaire

Proposition

Une situation $(\alpha^*, \beta^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$ *est un équilibre de Nash en stratégies mixtes dans le jeu bimatriciel (8), si et seulement, si* $\alpha^* \in \Delta_m$ *est solution optimale du problème* $P_1(\beta^*)$ *:*

$$P_1(\beta^*) \begin{cases} \max\limits_{\alpha \in \Delta_m} & \alpha^t A \beta^*, \\ & I_m^t \alpha = 1, \\ & \alpha \geq 0, \end{cases} \tag{15a}$$

et $\beta^* \in \Delta_n$ *est solution optimale du problème* $P_2(\alpha^*)$ *:*

$$P_2(\alpha^*) \begin{cases} \max\limits_{\beta} & (\alpha^*)^t B \beta, \\ & I_n^t \beta = 1, \\ & \beta \geq 0. \end{cases} \tag{15b}$$

où $I_m = (1, 1, \ldots, 1)^t \in \mathbb{R}^m$ *et* $I_n = (1, 1, \ldots, 1)^t \in \mathbb{R}^n$.

Théorème

Théorème

Une paire de stratégies $(\alpha^*, \beta^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$ *est un équilibre de Nash en stratégies mixtes dans le jeu bimatriciel (8) si et seulement si,* $(\alpha^*, \beta^*, p^*, q^*)$ *est une solution du problème de programmation bilinéaire suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max\limits_{\alpha,\beta,p,q} & \{\alpha^t A\beta + \alpha^t B\beta + p + q\}, \\ & A\beta \leq -pI_m, \\ & B^t\alpha \leq -qI_n, \\ & \alpha^t I_m = \ 1, \\ & \beta^t I_n = \ 1, \\ & \alpha \geq 0, \\ & \beta \geq 0, \end{array} \right. \tag{16}$$

où $I_m = (1, 1, \ldots, 1)^t \in \mathbb{R}^m$ et $I_n = (1, 1, \ldots, 1)^t \in \mathbb{R}^n$.

Preuve

Soit $(\alpha^*, \beta^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$ un équilibre de Nash en stratégies mixtes dans le jeu (8). Dans ce cas, α^* est solution optimale du problème suivant :

$$P_1(\beta^*) \begin{cases} \max\limits_{\alpha \in \Delta_m} & \alpha^t A \beta^*, \\ & I_m^t \alpha = 1, \\ & \alpha_i \geq 0, \ \forall i = 1, \dots, m, \end{cases} \tag{17a}$$

et β^* solution optimale du problème suivant :

$$P_2(\alpha^*) \begin{cases} \max\limits_{\beta \in \Delta_n} & \alpha^{*t} B \beta, \\ & I_n^t v = 1, \\ & \beta_j \geq 0, \ \forall j = 1, \dots, n. \end{cases} \tag{17b}$$

Preuve

Posons

$$\alpha^{*t} A \beta^* = -p^* \text{ et } \alpha^{*t} B \beta^* = -q^*, \tag{18}$$

Des relations (17a) et (17b) on aura :

$$\alpha^t A \beta^* \leq -p^*, \ \forall \alpha \in \Delta_m, \tag{19}$$

$$\alpha^{*t} B \beta \leq -q^*, \ \forall \beta \in \Delta_n, \tag{20}$$

Soient $\alpha \in \Delta_m$ et $\beta \in \Delta_n$. Des relations (19) et (20) on aura :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \beta_j^* \leq -p^*, \ \forall i = 1, \ldots, m, \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} \alpha_i^* \leq -q^*, \ \forall j = 1, \ldots, n. \tag{22}$$

D'où

$$A\beta^* \leq -p^* I_m, \tag{23}$$

$$B^t \alpha^* \leq -q^* I_n. \tag{24}$$

Preuve

Des relations (17a), (17b), (23) et (24), on déduit que

$$(\alpha^*, \beta^*, p^*, q^*) \tag{25}$$

est une solution réalisable du problème (16) et de la relation (18) on déduit que :

$$\alpha^{*t} A \beta^* + \alpha^{*t} B \beta^* + p^* + q^* = 0. \tag{26}$$

Preuve

Par ailleurs toute solution réalisable (α, β, p, q) du problème (16) vérifie :

$$A\beta \leq -pI_m, \tag{27}$$
$$B^t\alpha \leq -qI_n. \tag{28}$$

En multipliant les membres de l'inégalité (27) par α^t et les membres de l'inégalité (28) par β on obtient :

$$\alpha^t A\beta \leq -p\alpha^t I_m = -p,$$
$$\alpha^t B\beta \leq -qI_n^t\beta = -q.$$

Ainsi, pour toute solution réalisable (α, β, p, q), la fonction objectif du problème (16) satisfait

$$\alpha^t A\beta + \alpha^t B\beta + p + q \leq 0, \tag{29}$$

et de la relation (26), on déduit que $(\alpha^*, \beta^*, p^*, q^*)$ est la solution optimale du problème (16).

Preuve

Inversement, soit $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{p}, \bar{q})$ une solution optimale du problème (16). L'existence d'une solution réalisable du problème (16) a été prouvée par (25). Plus précisément chaque jeu bimatriciel (A, B) admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes (α^*, β^*) et donc (25) est une solution réalisable de (16). De plus, de (25), on déduit la valeur maximale de la fonction objectif de (16) est non positive, qui, d'après (29), implique

$$\bar{\alpha} A \bar{\beta} + \bar{\alpha} B \bar{\beta} + \bar{p} + \bar{q} = 0 \tag{30}$$

et

$$A\bar{\beta} \leq -\bar{p} I_m \tag{31}$$
$$B^t \bar{\alpha} \leq -\bar{q} I_n \tag{32}$$
$$\bar{\alpha}^t I_m = 1 \tag{33}$$
$$\bar{\beta}^t I_n = 1 \tag{34}$$
$$\bar{\alpha} \geq 0, \;\; \bar{\beta} \geq 0 \tag{35}$$

Preuve

De la relation (31), on aura :

$$\forall \alpha \geq 0/ \ I_m^t \alpha = 1, \ \alpha^t A \bar{\beta} \leq -\bar{p} \alpha^t I_m = -\bar{p} \tag{36}$$

et de la relation (32) on aura :

$$\forall \beta \geq 0/ \ I_n^t \beta = 1, \ \bar{\alpha}^t B \beta \leq -\bar{q} I_n^t \beta = -\bar{q} \tag{37}$$

Preuve

Des relations (30), (36) et (37), on déduit que :

$$\alpha^t A\bar{\beta} + \bar{\alpha} B \beta \leq -\bar{p} - \bar{q} = \bar{\alpha}^t A\bar{\beta} + \bar{\alpha} B\bar{\beta} \tag{38}$$

En particulier, des relations (31) et (32), on aura :

$$\begin{cases} \bar{\alpha}^t A\bar{\beta} \leq -\bar{p}, \\ \bar{\alpha}^t B\bar{\beta} \leq -\bar{q}. \end{cases} \tag{39}$$

Preuve

Des relations (38) et (39), on déduit que :

$$\begin{cases} \bar{\alpha}^t A \bar{\beta} = -\bar{p}, \\ \bar{\alpha}^t B \bar{\beta} = -\bar{q}. \end{cases} \tag{40}$$

Des relations (36) et (37), on déduit que :

$$\alpha^t A \bar{\beta} \leq \bar{\alpha}^t A \bar{\beta}, \tag{41}$$

$$\bar{\alpha}^t B \beta \leq \bar{\alpha}^t B \bar{\beta}, \tag{42}$$

Preuve

c'est-à-dire : $\bar{\alpha}$ est une solution du problème

$$\begin{cases} \max\limits_{\alpha} & \alpha^t A \bar{\beta}, \\ & I_m^t \alpha = 1, \\ & \alpha \geq 0, \end{cases}$$

et $\bar{\beta}$ est une solution du problème

$$\begin{cases} \max\limits_{\beta} & \bar{\alpha}^t B \beta, \\ & I_n^1 \beta = 1, \\ & \beta \geq 0, \end{cases}$$

■

Calcul d'un équilibre en stratégies pures - Programmation linéaire bivalente

L'une des formulations possibles du problème de la recherche d'un équilibre de Nash en stratégies pures dans le jeu bi-matriciel (2) est la programmation bivalente.

Calcul d'un équilibre en stratégies pures - Programmation linéaire bivalente

Considérons le jeu suivant à deux joueurs :

$$\langle U, V, f^1, f^2 \rangle, \tag{43}$$

où

- $U = \{u = (u_1, u_2, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m \ / \ u_i \in \{0, 1\}, \ \forall i = 1, \ldots, m, \ \sum_{i=1}^{m} u_i = 1\}$ est l'ensemble des stratégies du joueur **(P1)**,
- $V = \{v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ v_j \in \{0, 1\}, \ \forall j = 1, \ldots, n, \ \sum_{j=1}^{n} v_j = 1\}$ est l'ensemble des stratégies du joueur **(P2)**,

Calcul d'un équilibre en stratégies pures - Programmation linéaire bivalente

- f^1 est la fonction des gains du joueur **(P1)** définie par :

$$\begin{aligned} f^1 : U \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto f^1(u, v) = u^t A v, \end{aligned}$$

- f^2 est la fonction des gains du joueur **(P2)** définie par :

$$\begin{aligned} f^2 : U \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto f^2(u, v) = u^t B v. \end{aligned}$$

Calcul d'un équilibre en stratégies pures - Programmation linéaire bivalente

Proposition

1. *Une situation* $(x_{1i^*}, x_{2j^*}) \in X_1 \times X_2$ *est un équilibre de Nash en stratégies pures dans le jeu bimatriciel (2), si et seulement si il existe une situation* $(u^*, v^*) \in U \times V$ *qui est un équilibre de Nash en stratégies pures dans le jeu (43),*
   où

$$u^* = (u_1^*, u_2^*, \ldots, u_{i^*}^*, \ldots, u_m^*) \in \mathbb{R}^m \text{ avec } u_k^* = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i^*; \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (44)$$

   et

$$v^* = (v_1^*, v_2^*, \ldots, v_{j^*}^*, \ldots, v_n^*) \in \mathbb{R}^n \text{ avec } v_l^* = \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq j^*; \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (45)$$

Calcul d'un équilibre en stratégies pures - Programmation linéaire bivalente

Proposition

1. *Une situation* $(u^*, v^*) \in U \times V$ *est un équilibre de Nash en stratégies pures dans le jeu bi-matriciel (43), si et seulement, si* u^* *est solution optimale du problème*

$$\begin{cases} \max\limits_{u} & u^t A v^*, \\ & e_m^t u = 1, \\ & u \in \{0,1\}^m, \end{cases} \tag{46a}$$

et v^* *est solution optimale du problème*

$$\begin{cases} \max\limits_{v} & {u^*}^T B v, \\ & e_n^t v = 1, \\ & v \in \{0,1\}^n. \end{cases} \tag{46b}$$

Programmation linéaire bivalente

Théorème

Une paire de stratégies $(x_{1i^*}, x_{2j^*}) \in X_1 \times X_2$ *est un équilibre de Nash en stratégies pures dans le jeu bimatriciel (2), si et seulement si,* (u^*, v^*, p^*, q^*) *est une solution du problème de programmation bi-linéaire suivant :*

$$\begin{cases} \max\limits_{u,v,p,q} & \{u^t A v + u^t B v + p + q\}, \\ & Av \leq -pl_m, \\ & B^t u \leq -ql_n, \\ & u^t l_m = \; 1, \\ & v^t l_n = \; 1, \\ & u \in \{0,1\}^m, \\ & v \in \{0,1\}^n, \end{cases} \tag{47}$$

Programmation linéaire bivalente

Dans les conditions du théorème précédent, on aura

$$x_{1i^*} \iff u_k^* = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i^*; \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$x_{2j^*} \iff v_l^* = \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq j^*; \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$u^{*t} A v^* = -p^* \text{ et } u^{*t} B v^* = -q^*$$