Logique des Prédicats
Système déductif

K.Akli & S. Mazouz
Département d'Informatique USTHB
2016-2017
Campusvirtuel.usthb.dz

Système Déductif

1. Axiome du système

Les axiomes affirment que certaines propositions sont des théorèmes.

Les axiomes sont en général vus comme des règles sans prémisses.

Le système déductif du calcul des prédicats comporte l'axiome suivant : Soit x une variable,

la formule $\forall x, x=x$ est appelée axiome

Système Déductif

2. Règles de déductions :

- les règles du calcul propositionnel

  ($E\neg$, $I\neg$, $E\wedge$, $I\wedge$)

- en plus de trois règles spécifiques au calcul des prédicats :
  - **Règle de particularisation ($\forall$E)**
  - **Règle de généralisation ($\forall$I)**
  - **Règle de remplacement (R)**

Système déductif

Règle de particularisation (E∀)

$$\frac{\forall x \quad \alpha(x)}{\alpha(t)} \; (E\forall) \quad \text{(t libre pour x dans } \alpha)$$

Cas particulier

$$\frac{\forall x \quad \alpha(x)}{\alpha(x)} \; (E\forall)$$

Système déductif

Règle de généralisation (I$\forall$)

$$\frac{\alpha(x)}{\forall x \ \ \alpha(x)} \ (\mathrm{I}\forall)$$

(x n'apparait pas libre dans les prémisses non éliminées au dessus de $\alpha(x)$)

Règle de remplacement (R)

$$\frac{t_1 = t_2 \qquad\qquad \alpha(t_1)}{\alpha(t_2)} \ (\mathrm{R})$$

t_1 et t_2 libres pour x dans $\alpha(x)$

Définition (Déduction)

Soit Γ un ensemble de formules et α une formule. On dira que Γ implique α, noté $\Gamma \vdash \alpha$, s'il existe une déduction utilisant éventuellement l'axiome telle que :

1. α est la conclusion
2. les seules prémisses non éliminées à part l'axiome sont dans Γ
3. les règles utilisées sont parmi : (I$\wedge$), (E$\wedge$), (I$\neg$), (E$\neg$), (I$\forall$), (E$\forall$) et (R).

Exemples (Déduction)

$\forall x\, \alpha(x) \vdash \exists x\, \alpha(x)$

Or $\exists x\, \alpha(x) =_{def} \neg(\forall x \neg\, \alpha x))$

Montrons la déduction $\forall x\, \alpha(x) \vdash \neg(\forall x \neg\, \alpha x))$

$$\dfrac{\dfrac{\forall x\, \alpha(x)}{\alpha(x)}\ \text{(E}\forall\text{) x libre pour x} \qquad \dfrac{[\forall x \neg\alpha(x)]}{\neg\alpha(x)}\ \text{(E}\forall\text{) x libre pour x}}{\neg(\forall x \neg\alpha(x))}\ (\mathrm{I}\,\neg)$$

Exemples de déduction

Montrer les déductions suivantes :

1. $\vdash \forall x\, \alpha(x) \rightarrow \forall x\, (\alpha(x) \vee \beta(x))$
2. $\Gamma, \alpha(x) \vdash \beta \;\Rightarrow\; \Gamma, \exists x\, \alpha(x) \vdash \beta$ (x non libre dans Γ et β)
3. $\alpha(t) \vdash \exists x\; \alpha(x)$ avec t libre pour x dans $\alpha(x)$
4. $(\forall x\; (H(x) \rightarrow M(x))) \wedge H(S) \vdash M(S)$ où S est une constante