Logique des prédicats

(Logique du premier ordre avec égalité)

Langage

K. Akli et S. Mazouz
Département Informatique-FEI-USTHB

2017-2018
Campusvirtuel.usthb.dz

Plan

Introduction

Limite de la logique des propositions :

Exemple

Si **x** est père de y et si y est père de **z**

alors **x** est grand-père de **z**

En logique des propositions, on considère les variables propositionnelles :

A : x est père de y

B : y est père de z

C : x est grand-père de z

Modélisation : $A \wedge B \rightarrow C$

La modélisation par $A \wedge B \rightarrow C$, en logique des propositions, ne met pas en évidence **les relations entre les individus x, y et z**.

Introduction

Notion de prédicats :

permet d'exprimer une **relation entre individus**.

On aura pour l'exemple précédent les prédicats:

- **Père(x, y) :** x est père de y

  Cette relation est **vraie ou fausse** selon les valeurs de x et de y.

  C'est une **généralisation** de la notion de variable propositionnelle.

- **GrandPère(x, y)** **:** x est grand-père de y

Si **x** est père de y et si y est père de **z** alors **x** est grand-père de **z**

Ce qui donne la modélisation :

$$\text{Père}(x, y) \wedge \text{Père}(y, z) \rightarrow \text{GrandPère}(x, z)$$

Introduction

« S'il pleut alors Ali prend son parapluie »

« Si Ali prend son parapluie alors il ne sera pas mouillé »

S'il ne pleut pas alors Ali ne sera pas mouillé »

En langage des propositions :

$\alpha_1 = P \rightarrow R$,

$\alpha_2 = R \rightarrow \neg M$

et $\alpha_3 = \neg P \rightarrow \neg M$.

P: « Il pleut »
M : «Ali est mouillé »
R : « Ali prend son parapluie»

Introduction

Ce qui est vrai pour Ali, peut être aussi vrai pour d'autres personnes (Samia, Omar, …) :

« S'il pleut alors Ali prend son parapluie »
« Si Ali prend son parapluie alors il ne sera pas mouillé »
S'il ne pleut pas alors Ali ne sera pas mouillé »

« S'il pleut alors Samia prend son parapluie »
« Si Samia prend son parapluie alors elle ne sera pas mouillé e»
S'il ne pleut pas alors Samia ne sera pas mouillée »

« S'il pleut alors Omar prend son parapluie »
« Si Omar prend son parapluie alors elle ne sera pas mouillé e»
S'il ne pleut pas alors Omar ne sera pas mouillée »

Introduction

Pour Ali

M_{Ali} : Ali est mouillé R_{Ali} : Ali prend son parapluie	$P \rightarrow R_{Ali}$, $R_{Ali} \rightarrow \neg M_{Ali}$ et $\neg P \rightarrow \neg M_{ali}$

Pour Omar

M_{Omar}: Omar prend est mouillé R_{Omar} : Omar prend son parapluie	$P \rightarrow R_{Omar}$, $R_{Omar} \rightarrow \neg M_{Omar}$ et $\neg P \rightarrow \neg M_{omar}$

Pour une personne donnée X :

M_X : X est mouillé R_X : X prend son parapluie	$P \rightarrow R_X$, $R_X \rightarrow \neg M_X$ et $\neg P \rightarrow \neg M_X$.

Introduction

En Logique des prédicats, nous définissons les symboles M et R comme **prédicats** prenant comme **argument X**, tels que :

M(X) : « X est mouillé » et R(X) : « X prend son parapluie ».

Une formalisation pour une personne quelconque X est donc :

« S'il pleut alors X prend son parapluie » :

$$P \rightarrow R(X)$$

« Si X prend son parapluie alors X ne sera pas mouillé » :

$$R(X) \rightarrow \neg M(X)$$

«S'il ne pleut pas alors X ne sera pas mouillé » :

$$\neg P \rightarrow \neg M(X)$$

Introduction

Exprimer en calcul propositionnel le fait

« s'il pleut alors **tout le monde** prend son parapluie »,

une solution pourrait être alors la formule

$R \rightarrow M(Ali) \wedge M(Omar) \wedge M(Samia) \wedge \ldots.$

Mais cette formule est **infinie** et **n'appartient** donc pas au **langage propositionnel**.

L'introduction d'un **quantifieur universel $\forall$** permet une représentation plus compacte : $P \rightarrow \forall x\ M(X)$

Introduction

Exprimer le fait

« s'il pleut alors quelqu'un est mouillé »,

L'introduction du quantifieur existentiel $\exists$ permet aussi une représentation plus compacte :

$$P \rightarrow \exists x, M(X).$$

Langage

Un langage du calcul du premier ordre avec égalité est défini par la donnée de :

- Ensemble symboles (Alphabet du langage)
- Ensemble termes,
- Ensemble formules

Symboles (Alphabet)

1. Symboles **de variables** (infini dénombrable) x, y, z, x_1, x_2,…
2. Symboles **de constantes** (fini ou infini) a, b, c,..
3. Symboles **de fonctions** (fini ou infini) f, g, h,…

A chaque symbole de fonction est associé un **paramètre entier appelé arité** (nombre d'argument)

4. Symboles **de prédicats** (fini ou infini) P, Q, R, …

A chaque prédicat est associé un **paramètre entier appelé arité**.

5. Symbole **d'égalité '=' d'arité 2**
6. Symboles **logiques : $\neg$, $\wedge$, $\forall$**
7. Symboles **impropres : '(', ')', ','**

Termes

1. **Toute variable** est un terme
2. **Toute constante** est un terme
3. Si **f** est un **symbole de fonction** d'arité n
   et $\mathbf{t_1,\ldots t_n}$ sont des termes
   alors $\mathbf{f(t_1,\ldots t_n)}$ est un terme.

Formules

1. Si P est un symbole de **prédicat d'arité n**
   et $t_1, \ldots t_n$ sont des **termes**
   alors **$P(t_1, \ldots t_n)$** est une **formule atomique**
2. Toute formule atomique est une formule
3. Si α et β sont des formules
   et x est une variable
   alors **$\neg\alpha$,** **$\alpha \wedge \beta$**, et **$\forall x\ \alpha$** sont **des formules, appelées formules composées.**

Langage

On définit le quantificeur d'abréviation existentiel

$\exists x\, \alpha =_{def} \neg (\forall x \neg \alpha)$.

La Priorité suivante est adoptée (décroissante):

$(\;)$

$\neg$

$\wedge \quad \vee$

$\forall \quad \exists$

$\rightarrow \quad \leftrightarrow$

Langage(Exemple)

Exemple de langage :

Soit L_N un mini langage de l'arithmétique dont l'alphabet se compose de :

Symboles de variables : $x_1, x_2, \ldots$

Symbole de constante : **a**

Symboles de fonctions : **f** d'arité 1, **g et h** d'arité 2

Symbole de prédicat : '**=** ' d'arité 2

Symboles logiques : ¬ , ^ et ∀

Symboles impropres, notés : '**(**' , '**)**' et '**,**'

Langage(Exemple)

Exemples de termes :

x_1,
a,
$f(x_1)$,
$g(x_1, a)$,
$h(f(x_1), x_2)$, etc.

Rappel

1. **Toute variable** est un terme
2. **Toute constante** est un terme
3. Si **f** est un **symbole de fonction** d'arité n
   et $t_1,\ldots t_n$ sont des termes alors $f(t_1,\ldots t_n)$ est un terme.

D'une manière générale :

1. Toute variable x_i est un terme.
2. La constante a est un terme.
3. Si t_1 et t_2 sont 2 termes alors :
   $f(t_1)$, $g(t_1, t_2)$ et $h(t_1, t_2)$ sont des termes.

Exemples de formules :

Formules atomiques.

- ✓ $x_1 = a$,
- ✓ $x_1 = x_2$,
- ✓ $g(a, x_1) = x_3$,
- ✓ $f(x_4) = h(f(x_1), g(x_2,x_3))$

Rappel

Si P est un symbole de **prédicat d'arité n** et $t_1,\ldots t_n$ sont des **termes** alors **$P(t_1,\ldots t_n)$** est une **formule atomique**

Formules composées

- ✓ $\neg(x_1 = a)$,
- ✓ $(x_1=f(a))\wedge\neg(x_1 = a)$,
- ✓ $\forall x_1\ (x_1 = f(x_2))$,
- ✓ $\neg(a = g(a, x_1)\ \wedge\ (\forall x_2\ x_2=f(x_1))$

Rappel

Si α et β sont des formules et x est une variable

alors **$\neg\alpha$, $\alpha\wedge\beta$**, et **$\forall x\ \alpha$** sont **des formules, appelées formules composées.**

D'une manière générale :

Si t_1 et t_2 sont 2 termes

alors $t_1 = t_2$ est une formule **atomique**.

Si x_i est une variable et α , β sont 2 formules alors

$\forall x_i\ \alpha(x_i)$, $\neg\alpha$ et $\alpha\wedge\beta$ sont des formules **composées**.

Langage

Dites si les expressions suivantes sont bien formées :

$\neg(f(x_1)= a)$,

$\neg(g(x_1, a))$,

$\forall x \neg(g(x, a)=a)$,

$a \wedge \exists x\, f(x)=g(x,a)$

$x=g(\exists y\, f(y),a)$

Formalisation

Considérons le syllogisme suivant :

Tous les hommes sont mortels
Socrate est un homme
Alors Socrate est mortel

On définit les prédicats :

H(x) : **'x est un Homme'** et M(x) : **'x est Mortel'**

On utilisera aussi une **constante S pour Socrate**.

La phrase « Tous les hommes sont mortels » peut s'énoncée :
Pour tout x, si x est un homme alors x est mortel

Attention, c'est différent de l'énoncé : pour tout x, x est un homme et x est mortel

La formulation est alors :

$$((\forall x\ (H(x) \rightarrow M(x))) \wedge H(S) \rightarrow M\ (S)$$

Formalisation

Les oiseaux n'ont pas tous des ailes

Soient les prédicats suivants :

O(x) : « x est un oiseau »

A(x) : « x a des ailes »

On peut d'abord modéliser l'énoncé sans la négation

$$\forall x\ (O(x) \rightarrow A(x))$$

Puis on introduit la négation :

$$\neg\ \forall x\ (O(x) \rightarrow A(x))$$

On peut reformuler l'énoncé comme suit :

Il existe des oiseaux sans ailes

$$\exists x\ \ (O(x) \wedge \neg A(x))$$

Formalisation

Aucun menteur n'est honnête

- M(x) : 'x est un menteur'
- H(x) : 'x est honnête'

On peut reformuler la phrase comme suit :

Il n'existe pas de menteur honnête

On a $\neg (\exists x\, (M(x) \wedge H(x)))$

On peut aussi la reformuler par :

Tous les menteurs ne sont pas honnêtes

On a $\forall x\, (M(x) \rightarrow \neg H(x))$

Définition(Champ d'une variable)

- Dans une formule de la forme $\forall x\ \alpha$,

  α est appelé le **champ de x.**
- Toute occurrence d'une variable dans son champ est dite **liée.**
- Toute occurrence non liée d'une variable sera dite **libre.**
- Une variable dont au moins une **occurrence est libre** est dite **libre.**
- Une variable dont au moins une **occurrence est liée** est dite **liée.**

Définition(Champ d'une variable)

Exemples

1. $\alpha = (\forall x \;\; x = y)$

- L'occurrences de y est libre. Donc la variable y est libre.

- L'occurrence de x est liée. Donc la variable x liée,

2. $\beta = (\forall x \;\; x = y) \wedge (x=y)$

- Les deux occurrences de y sont libres**.** Donc la variable y est libre

- La 1$^{\text{ère}}$ occurrence de x est liée mais la 2$^{\text{ème}}$ est liée. La variable x est libre et liée.

Cette formule est bien formée (syntaxiquement correcte), mais il est déconseillé de l'écrire ainsi.

Il est recommandé de faire un renommage comme suit :

$$(\forall z \;\; z = y) \wedge (x=y) \quad \textbf{/renommage des occurrences liées de x}$$

Définition(Formule fermée)

Notations

- Si x est une variable libre dans une formule α, on note α(x).

$$\alpha\ (y) :\ (\forall x\ \ x = y)$$

- Si x_1, …x_n sont des variables libres dans une formule α, on note α(x_1, …x_n).

$$\alpha\ (x, y) :\ (\forall z\ \ z = y) \wedge (x=y)$$

- Si **toutes les occurrences** des variables d'une formule α **sont liées** alors la formule est dite **fermée**.

Exemples

- $\forall x\ \ \exists y\ x<y$

  est une formule **fermée**.

Exemples (Formule fermée)

- $\exists x\ x<y$

  est une formule non fermée

  car la variable y est libre.

- $\forall x \exists y\ ((x = y) \wedge (x = y))$

  est une formule fermée

- $(\forall x,\ x<10) \wedge x>2$

  est une formule non fermée

  car la seconde occurrence de x est libre.

  Nous remarquons que la variable x est libre et liée.

Fermeture d'une formule

Si α est une formule contenant les variables **libres $x_1, \ldots x_n$**,

on appelle la **fermeture de α** la formule

$$\forall x_1, \ldots \forall x_n \ \alpha(x_1, \ldots x_n).$$

Exemple

La fermeture de la formule $\forall \mathbf{x} \quad \mathbf{x} = \mathbf{y}$ est

$$\forall \mathbf{y} \ (\forall \ \mathbf{x} \quad \mathbf{x} = \mathbf{y})$$

Substitution

Soient x une variable et $\alpha(x)$ une formule, t un terme.
Substitution: Peut-on remplacer les **occurrences libres de x** dans α **par t** ?

Exemple
Soit le prédicat $P(x, y)$: y est le père de x et la formule $\beta(x) : \exists y\, P(x, y)$.
Cette formule exprime le fait que **«x a un père»**

1. Si on remplace x par une nouvelle variable z,
   on obtient $\beta[z/x]= \exists y\, P(z, y)$

L'interprétation reste la même que celle de $\beta(x)$:
« z a un père »

1. Si on remplace x par y, on obtient :
   $\beta[y/x]= \exists y\, P(y, y)$

L'interprétation est radicalement différente :
Il existe quelqu'un qui est son propre père

Substitution

Soient x une variable et $\alpha(x)$ une formule, t un terme.

Substitution: Peut-on remplacer les occurrences libres de x dans α **par t** ?

Définition(Substitution)

On dira que t est libre d'être substitué pour x dans α,

et on note $\alpha[t/x]$,

si **aucune** variable de t **ne devient liée** après **substitution de x par t** dans $\alpha(x)$.

(la nature des occurrences est préservée).

Remarque

on écrit « t libre pour x dans α » **au lieu**

« t est libre d'être substitué pour x dans α »

Cas particuliers et conventions

- Toute variable est libre pour elle-même dans n'importe quelle formule.
- Toute constante est libre pour x dans n'importe quelle formule.
- Si une formule α ne contient aucune occurrence libre de x, alors quelque soit le terme t, t est libre pour x dans α.
- Si le terme t ne contient pas de variables alors t est libre pour n'importe quelle variable dans n'importe quelle formule.

Exemples

1. $\alpha = (\exists x,\ x<y)$;

- le terme $t_1=z$ est-il libre pour y dans α?

  oui t_1 est libre pour y dans α.

- le terme $t_2=x$ est-il libre pour y dans α?

  non t_2 est non libre pour y dans α. En effet $\alpha[t_2/x] = (\exists x,\ x<x)$ et donc la variable x qui est libre dans t_2 devient liée dans $\alpha[t_2/x]$.

Substitution

En utilisant la définition, il faut :

- Remplacer les occurrences libres de x dans α par t
- Vérifier qu'aucune variable de t ne devient liée

On peut le vérifier directement sur α comme suit:

Vérifier si **aucune occurrence libre** de x dans α **n'apparaît** dans le **champ d'un $\forall$z** (ou $\exists$z) où **z** est une **variable de t**.

Exemples

2. $\beta = \exists y\, P(x, y)$;

$t=f(x, y)$ est-il libre pour x dans β ?

L'occurrence libre de x apparait dans le champ de $\exists y$ et y est une variable de t.

Donc t n'est pas libre pour x dans β.

On a bien $\beta[t/x] = \exists y\, P(f(x,y), y)$

et l'occurrence y libre dans t devient liée dans $\beta[t/x]$.

Exemples(Substitution)

3. $\delta = P(x, y) \rightarrow \forall z\, R(x)$;

   t = f(a, z) est-il libre pour x ?

   non t n'est pas libre pour x dans δ.

4. $\gamma = R(x) \vee \forall z\, P(x, z, y)$;

   t= y est-il libre pour x ?

   oui t est libre pour x dans γ.

Exemples(Substitution)

5. $\phi = \forall y\, R(y) \wedge P(x,y)$;

   $t = f(x,y)$ est-il libre pour x ?

   non t n'est pas libre pour x dans ϕ.

6. $\theta = \forall y\, R(y) \rightarrow P(x, y)$;

   $t = f(x,y)$ est-il libre pour x ?

   oui t est libre pour x dans θ