MODULE DE MÉCANIQUE

Plan du cours

- Rappels Vectoriels
- Cinématique du point
- Dynamique du point
- Travail et énergie

Chapitre 1

Cinématique du point

Cinématique du point

Définition:

La cinématique est une branche de la mécanique qui étudie les mouvements des corps dans l'espace en fonction du temps indépendamment des causes qui les provoquent.

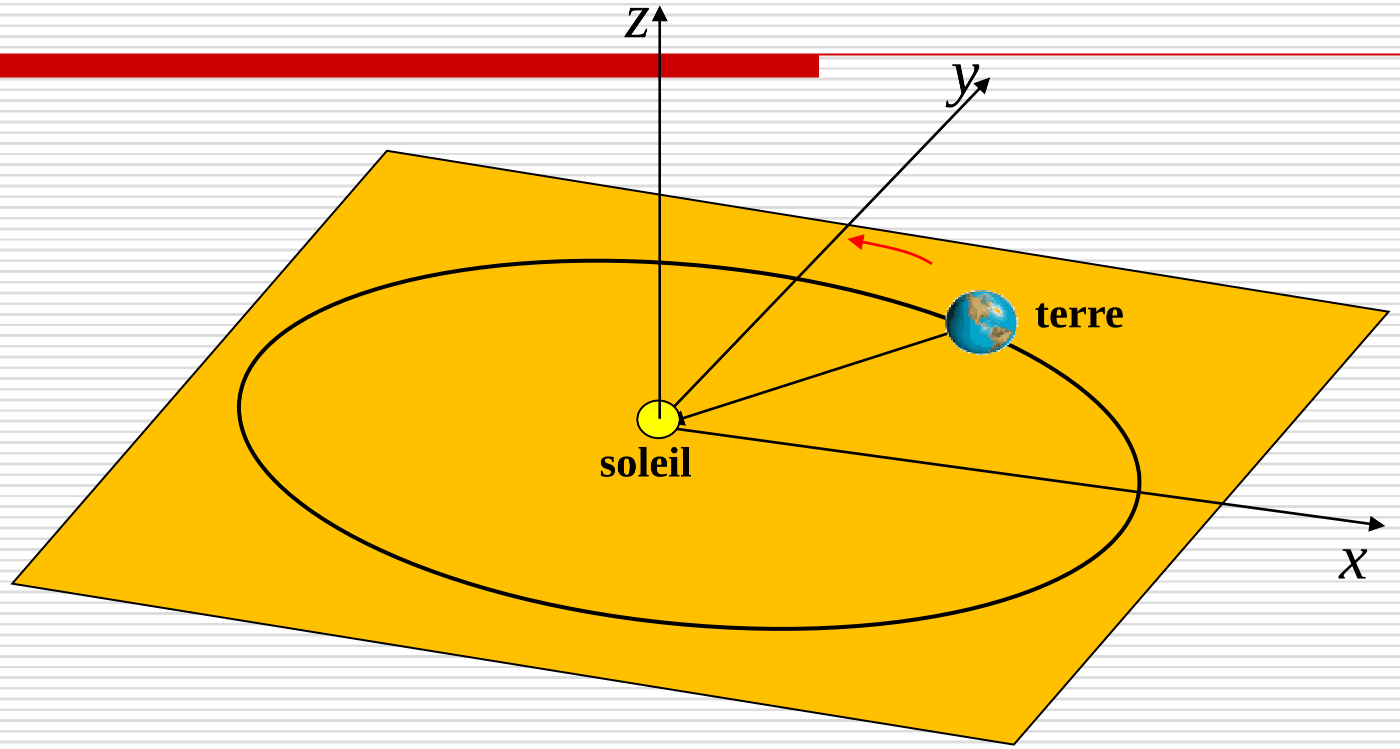
NOTION DE REPÈRE

Point matériel

Un point matériel est un objet infiniment petit devant les distances caractéristiques du mouvement pour être considéré comme ponctuel

Soit une voiture de longueur ℓ qui se déplace sur une route rectiligne. La distance parcourue D étant grande devant ℓ, on peut assimiler la voiture à un point matériel.

NOTION DE REPÈRE



L'étude du mouvement orbital de la terre autour du soleil le rayon terrestre R = 6400 km est très inférieur à la distance moyenne terre – soleil : d = 150 000 000 km. On peut alors considérer la terre comme un point matériel dont la masse est concentrée en son centre.

NOTION DE REPÈRE

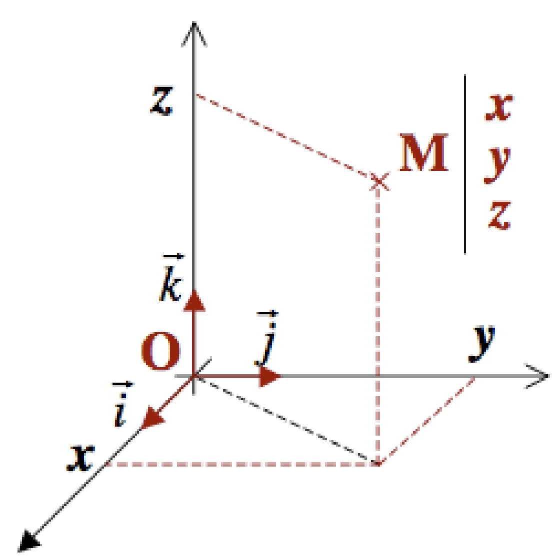
Pour repérer la position d'un point matériel dans l'espace, on se donne un repère d'espace, c'est-à-dire:

- un point O origine des coordonnées
- trois axes de coordonnées orientés et munis d'une unité de mesure (par exemple le mètre)

Pour des raisons de commodité, on choisit un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ **direct**

Un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées x, y et z tel que:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



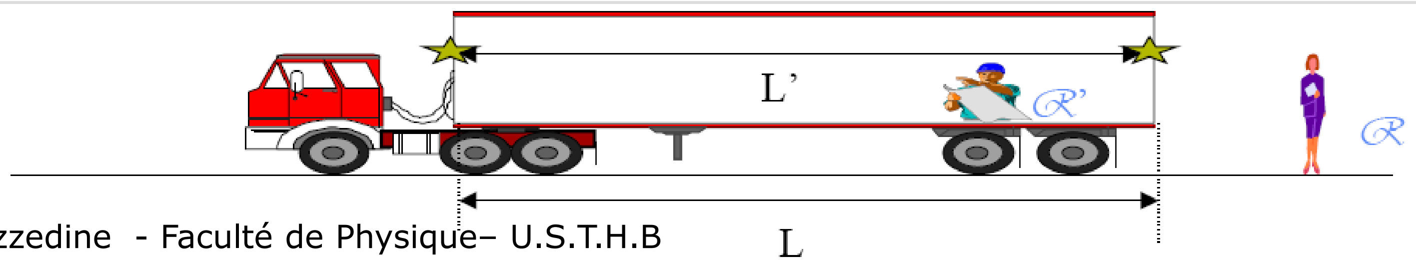
NOTION DE MOUVEMENT

Un objet est mouvement par rapport à un autre si sa position change au cours du temps

Un point M est dit fixe par rapport au repère R(O, x, y, z) si ses coordonnées ne changent pas.

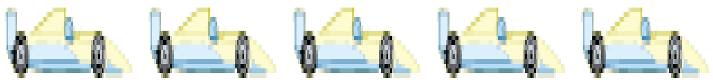
Le point M est en mouvement si au moins une de ses coordonnées change dans le temps.

La notion de mouvement est relative.
En effet un point peut être en mouvement par rapport à un repère $\mathscr{R}$
Et au repos par rapport à un second repère $\mathscr{R}'$

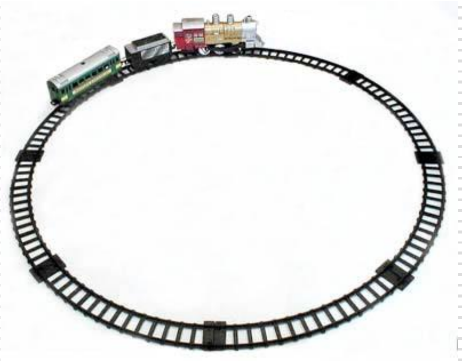


NOTION DE MOUVEMENT

On distingue essentiellement trois type de mouvements :



Translation



Rotation

Vibration

Ou une combinaison de deux de ces mouvements

NOTION DE TRAJECTOIRE

Définition :

C’est le lieu géométrique des positions successives occupées par le point matériel au cours du temps

Exemple :

un mobile est repéré par les coordonnées suivantes :

X (t) = A cos wt

Y (t) = A sin wt

En supprimant le temps, on obtient : $x^2 + y^2 = A^2$

La trajectoire est donc un cercle de centre O et de rayon A

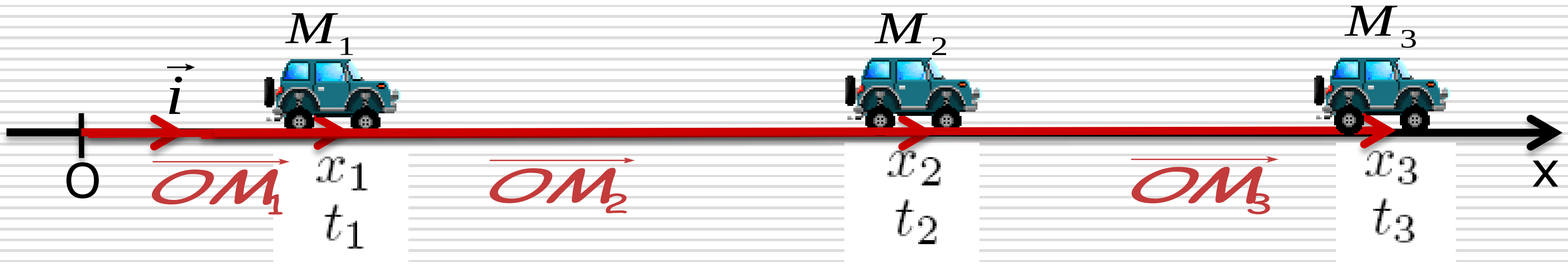
L’équation de la trajectoire est une relation qui lie les coordonnées du point entre elles

MOUVEMENT RECTILIGNE

La trajectoire d'un mouvement rectiligne est une droite.

Vecteur position

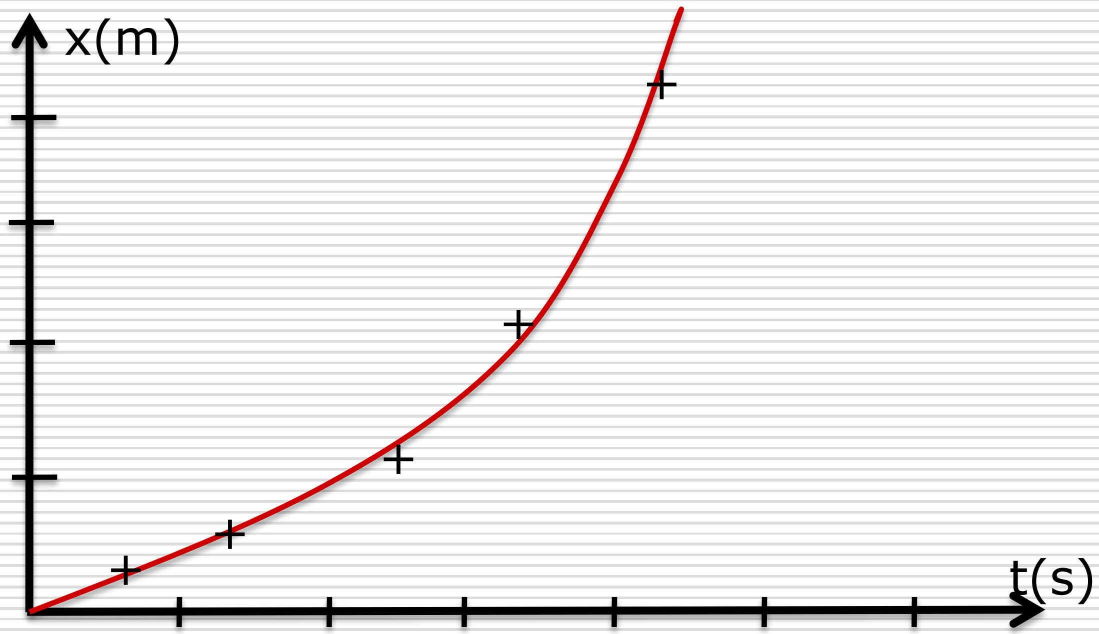
C'est le vecteur $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i}$ qui désigne la distance qui sépare le mobile M du point O pris comme origine.



x(t) est appelée équation horaire du mouvement

Notion de diagramme des espaces

Si on reporte les positions successives du mobile en fonction du temps, on obtient une courbe appelée : Diagramme des espaces



Remarque:

Il ne faut pas confondre trajectoire et diagramme des espaces

Vecteur déplacement (m):

Le vecteur déplacement est la distance parcourue entre deux instants

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{\Delta OM} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2 - x_1)\vec{i}$$

Vecteur vitesse (m/s):

Vecteur vitesse moyenne:

Si $\Delta t = t_2 - t_1$ est le temps mis entre M_1 et M_2 , la vitesse moyenne est :

$$\vec{v}_m = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{\Delta OM}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1} \text{ ou encore } \quad \vec{v}_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\vec{i} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i}$$

Vecteur vitesse instantanée:

Si on diminue l'intervalle de temps, on obtient la vitesse instantanée :

$$\vec{v} = \vec{v}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \quad ou \quad \vec{v} = \vec{v}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} = \frac{dx}{dt}\vec{i}$$

Le terme $v = \dfrac{dx}{dt}$ possède deux significations :

1- Si on a l'expression de x(t), alors $\dfrac{dx}{dt}$ désigne la dérivée de x(t):

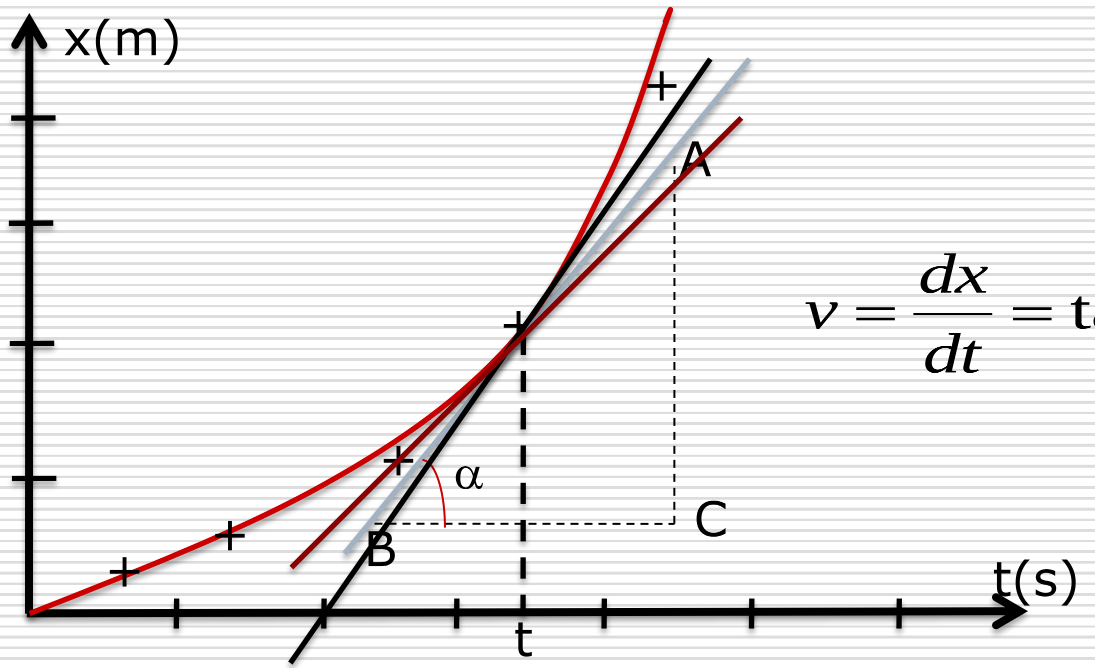
Exemple: $x(t) = 3x^3 + 2x^2 + 5$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 9x^2 + 4x$$

2- Si on a le graphe de x(t), alors $\frac{dx}{dt}$ désigne la pente de la tangente à la courbe x(t)

Exemple:

Problème !!!

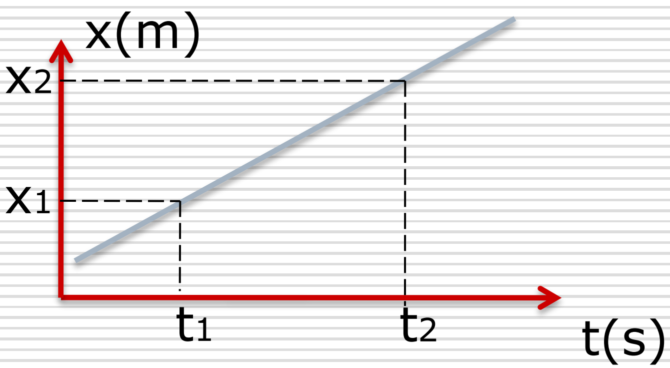


$$v = \frac{dx}{dt} = \tan\alpha = \frac{AC}{BC}$$

On va donc calculer la vitesse instantanée à partir de la vitesse moyenne

Il y a deux cas ou la vitesse moyenne est confondue avec la vitesse moyenne

1er cas: Mouvement rectiligne uniforme:

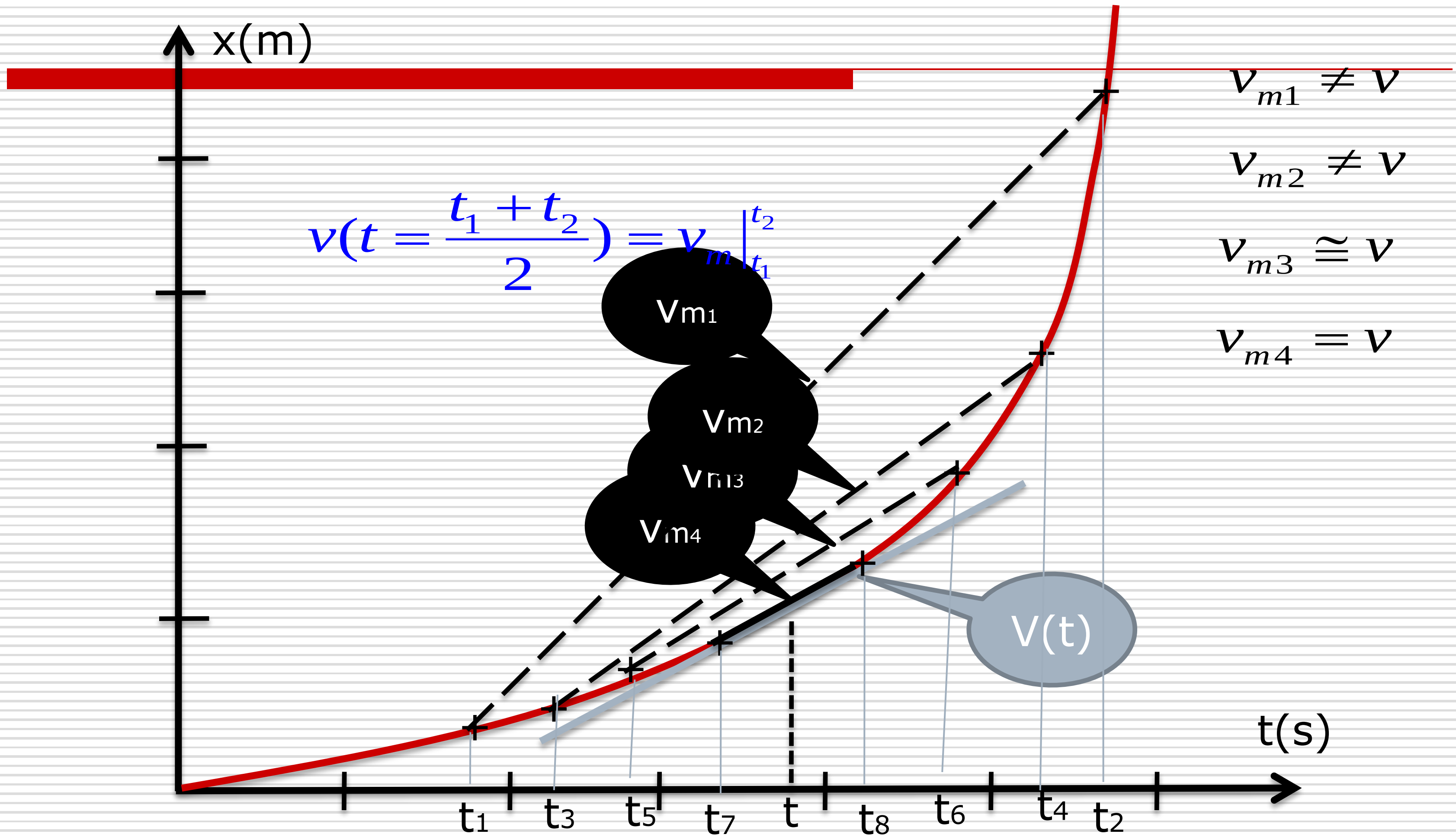


$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$$\Rightarrow v_m = v$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \tan\alpha = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

2ème cas: mouvement rectiligne quelconque:

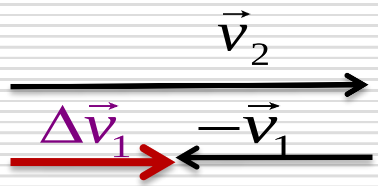


Conclusion :
La vitesse instantanée à l'instant t est assimilée à la vitesse moyenne entre deux instants t_1 et t_2 tel que t est milieu de t_1 et t_2 avec $\Delta t \ll$

Vecteur accélération (m/s2):

Vecteur accélération moyenne:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$



$\vec{a}_m$ et $\Delta\vec{v}$ Sont dans le même sens et direction

Vecteur accélération instantanée:

$$\vec{a} = \vec{a}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Comme pour la vitesse le terme $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ possède deux significations :

1- Si a l'expression de v(t), alors $\frac{dv}{dt}$ désigne la dérivée de v(t):

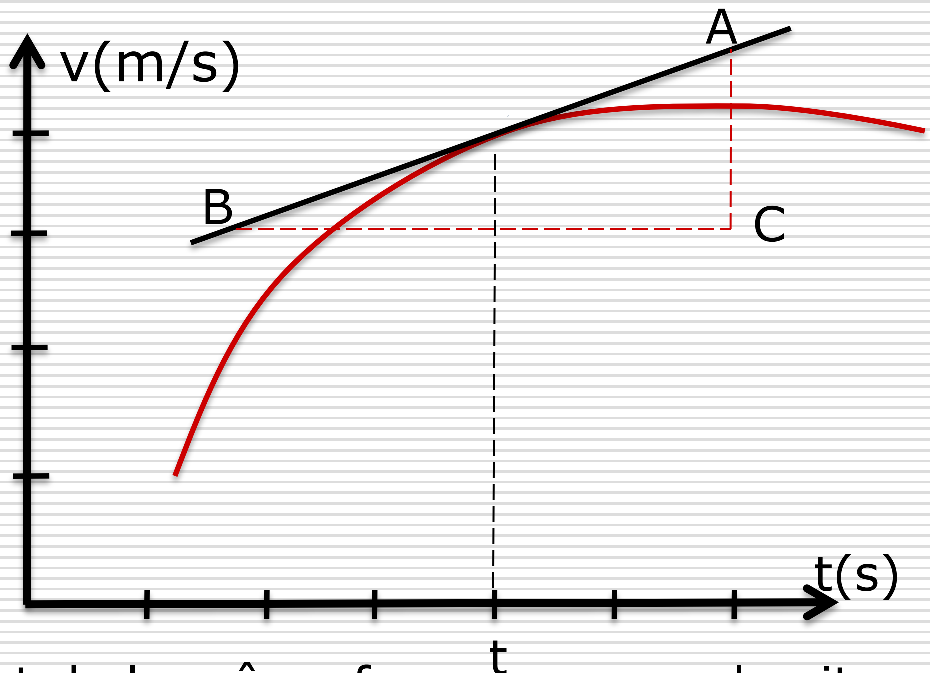
Exemple:

$$x(t) = 3x^3 + 2x^2 + 5$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 9x^2 + 4x$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 18x + 4$$

2- Si a le graphe de v(t), alors $\frac{dv}{dt}$ désigne la pente de la tangente à la courbe v(t)

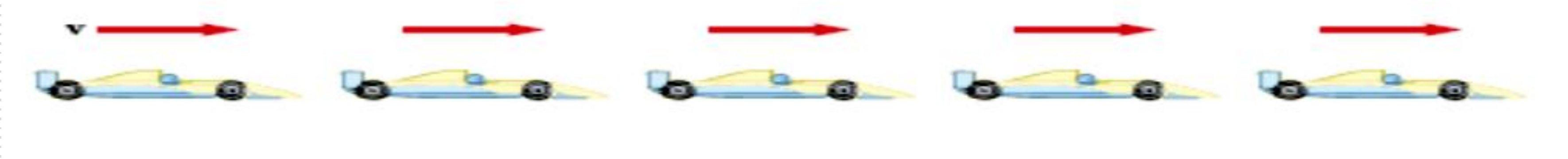


En procédant de la même façon que pour la vitesse on en déduit que:

Conclusion :
L'accélération instantanée à l'instant t est assimilée à l'accélération moyenne entre deux instants t_1 et t_2 tel que t est milieu de t_1 et t_2 avec $\Delta t \ll$

Mouvement rectiligne uniforme :

$$\vec{v} = constante \quad et \quad \vec{a} = \vec{0}$$



Mouvement rectiligne uniformément accéléré :

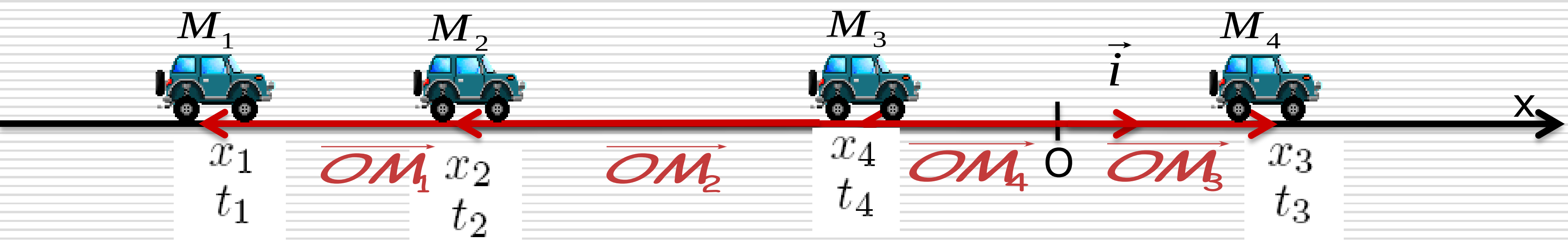
$$\vec{a} = constante \quad et \quad \vec{a}.\vec{v} \rangle 0$$

Mouvement rectiligne uniformément retardé ou décéléré :

$$\vec{a} = constante \quad et \quad \vec{a}.\vec{v} \langle 0$$

Exemple :

Soit une voiture se déplaçant sur une route rectiligne repérée par les positions M_1, M_2, M_3 et M_4 aux instants $t_1 = 0s$, $t_2=2s$, $t_3 = 4s$ et $t_4 = 5s$ respectivement tel que : $\overrightarrow{OM_1} = -12\vec{i}$, $\overrightarrow{OM_2} = -10\vec{i}$, $\overrightarrow{OM_3} = 2\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM_4} = -2\vec{i}$



1- Calculer les vecteurs déplacements : $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_2M_3}$ et $\overrightarrow{M_3M_4}$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2 - x_1)\vec{i} = (-10-(-12))\vec{i} = 2\vec{i}$$

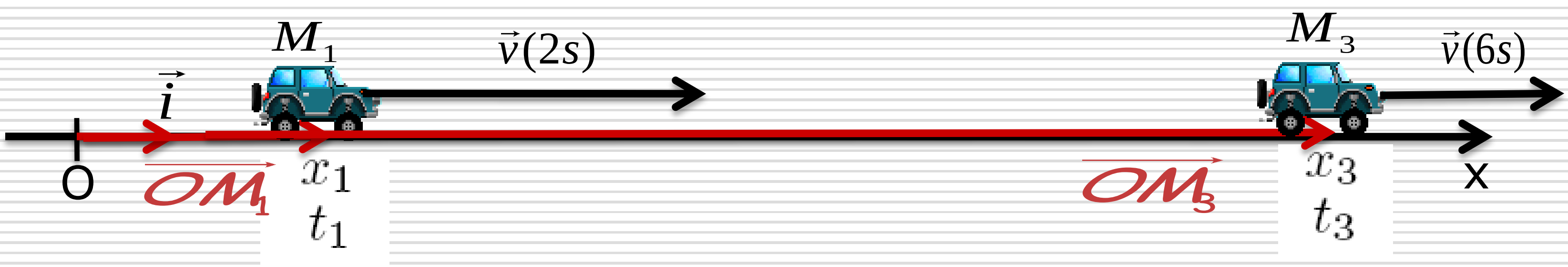
$$\overrightarrow{M_2M_3} = \overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_2} = (x_3 - x_2)\vec{i} = (2-(-10))\vec{i} = 12\vec{i}$$

$$\overrightarrow{M_3M_4} = \overrightarrow{OM_4} - \overrightarrow{OM_3} = (x_4 - x_3)\vec{i} = (-2-(2))\vec{i} = -4\vec{i}$$

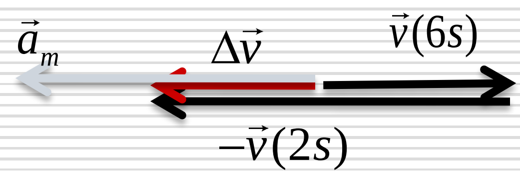
2- Déterminer les vecteurs vitesses moyennes entre M_1 et M_2 et entre M_3 et M_4

$$\vec{v}_m = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \frac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)}\vec{i} = \frac{2}{(2-0)}\vec{i} = \vec{i} \quad (m/s) \qquad \vec{v}_{m2} = \frac{\overrightarrow{M_3M_4}}{\Delta t} = \frac{(x_4 - x_3)}{(t_4 - t_3)}\vec{i} = \frac{-4}{(5-4)}\vec{i} = -4\vec{i} \quad (m/s)$$

3- Déterminer le vecteur accélération moyenne entre 2 et 6 s, v(2s) = 4m/s et v(6s) = 2 m/s



$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2(6s) - \vec{v}_1(2s) = \vec{v}_2(6s) + (-\vec{v}_1(2s))$$



$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{(\vec{v}_2(6s) - \vec{v}_1(2s))}{(t_2 - t_1)} = \frac{(2-4)}{(6-2)}\vec{i} = -0.5\vec{i} \quad (m/s^2)$$

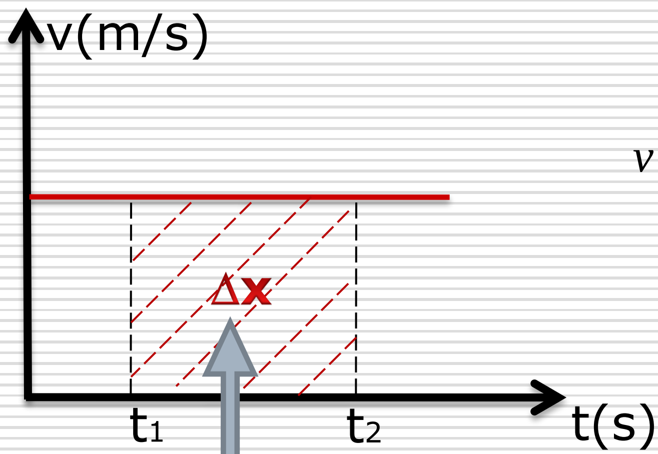
Calcul Intégral:

Jusqu'à présent on a vu comment passer de la position x(t) à la vitesse v(t) puis à l'accélération a(t)

Nous maintenant étudier le problème inverse pour passer de l'accélération à la vitesse puis à la position

Passage de la vitesse à la position:

1er Cas: Mouvement uniforme



Dans ce cas:

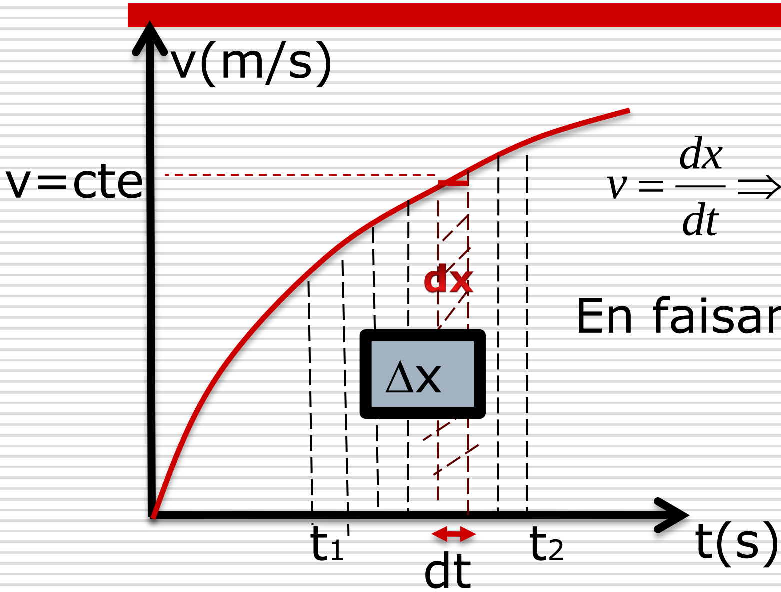
$$v = v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1)$$

Et donc: $x_2 = v(t_2 - t_1) + x_1$

$\Delta x = v(t_2 - t_1)$ correspond à l'aire sous la courbe v(t)

$2^{ème}$ Cas général :

On partage l'intervalle entre t_1 et t_2 en plusieurs petits dt



$v = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow dx = vdt$ = aire sous la courbe v(t) sur l'intervalle dt

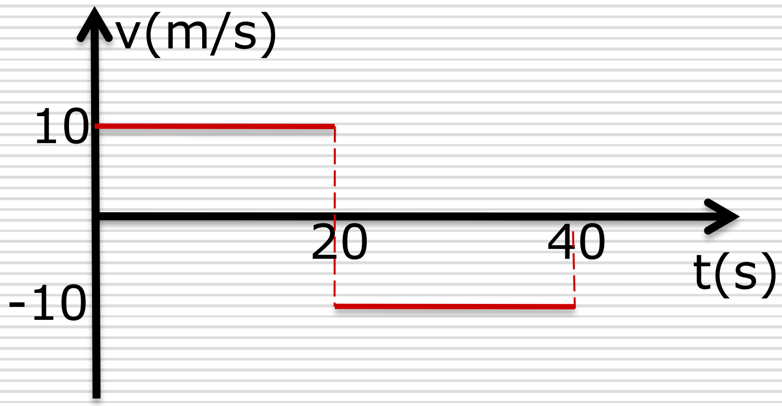
En faisant la somme des petits intervalles entre t_1 et t_2 :

$\Delta x = \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} vdt$ alors: $x_2 = \int_{t_1}^{t_2} vdt + x_1$

Δx est donc l'aire sous la courbe v(t) entre t_1 et t_2.

Remarque : Il ne faut pas confondre entre position et distance parcourue
-La position est l'aire sous v(t) en valeur algébrique
-La distance parcourue est l'aire sous v(t) en valeur absolue

Exemple:



1-position du mobile à t = 40 s
2-distance parcourue entre 0 et 40 s
t=0 s, x = 0 m

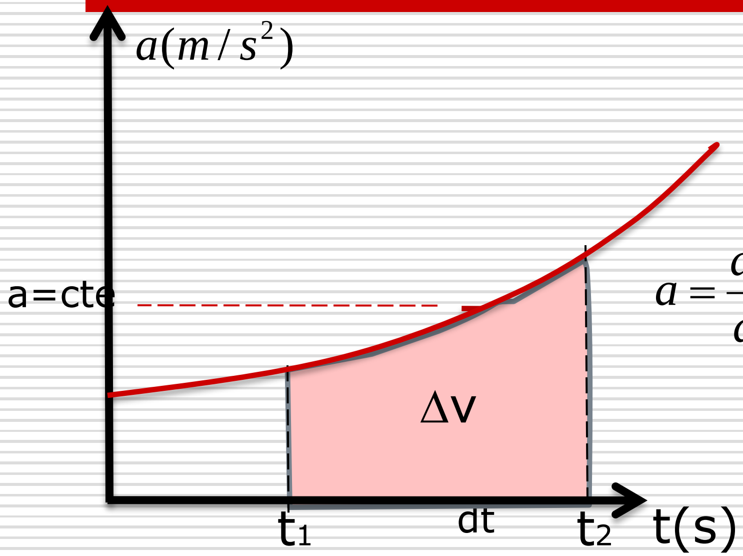
1- position du mobile:

$$\Delta x = \int_0^x dx = \int_0^{40} v dt = 10(20-0) - 10(40-20) = 0m \Rightarrow x(40s) = 0m$$

2- distance parcourue par le mobile:

$$D = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 10(20-0) + 10(40-20) = 40m$$

Passage de l'accélération à la vitesse:



On partage en plusieurs intervalle dt

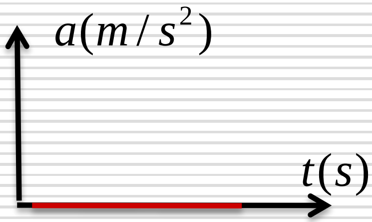
$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt$$

$$\Delta v = \int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} adt$$

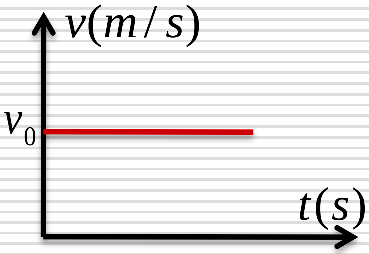
Δv est donc l'aire sous la courbe a(t) entre t_1 et t_2.

Étude de quelques mouvements particuliers

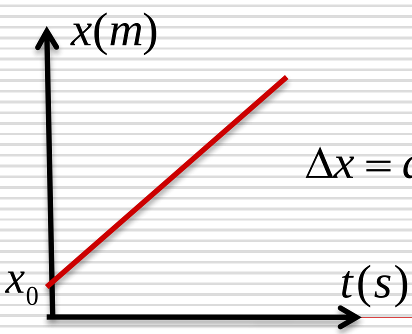
Mouvement rectiligne uniforme:



$$\Delta v = aire\ sous\ a(t) = 0 \Rightarrow v = v_0$$



$$v = v_0 = constante$$



$$\Delta x = aire\ sous\ v(t) = v_0 t \Rightarrow x = v_0 t + x_0$$

$x(t)$ est une droite

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow v(t) = \int a dt$$

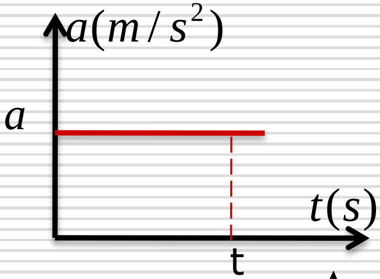
$$a = 0 \Rightarrow v(t) = \int a dt = constante = v_0$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt \Rightarrow \int dx = \int v dt = v \int dt$$

$$x(t) - x_0 = v_0 t \Rightarrow x(t) = v_0 t + x_0$$

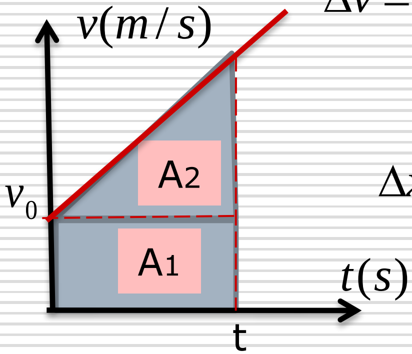
Mouvement rectiligne uniformément varié:

a=cte, t = 0s, v_0 et x_0



$$a = constante$$

$$\Delta v = aire\ sous\ a(t) = at \Rightarrow v = at + v_0$$

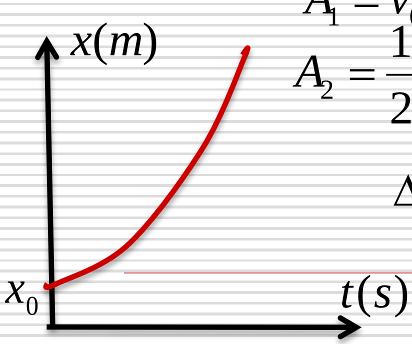


$$v(t) \quad est\ une\ droite$$

$$\Delta x = aire\ sous\ v(t) = A_1 + A_2$$

$$A_1 = v_0 t$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(v - v_0)t = \frac{1}{2}((at + v_0) - v_0)t = \frac{1}{2}at^2$$



$$\Delta x = x - x_0 = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt$$

$$\Rightarrow \Delta v = v(t) - v_0 = \int_0^t at = a\int_0^t t$$

$$\Rightarrow v = at + v_0$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = vdt$$

$$\Rightarrow \Delta x = x(t) - x_0 = \int_0^t vdt = \int_0^t (at + v_0)dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

Relation entre a, v et x:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt$$

On multiplie chaque membre par v

$$vdv = avdt \Rightarrow vdv = adx$$

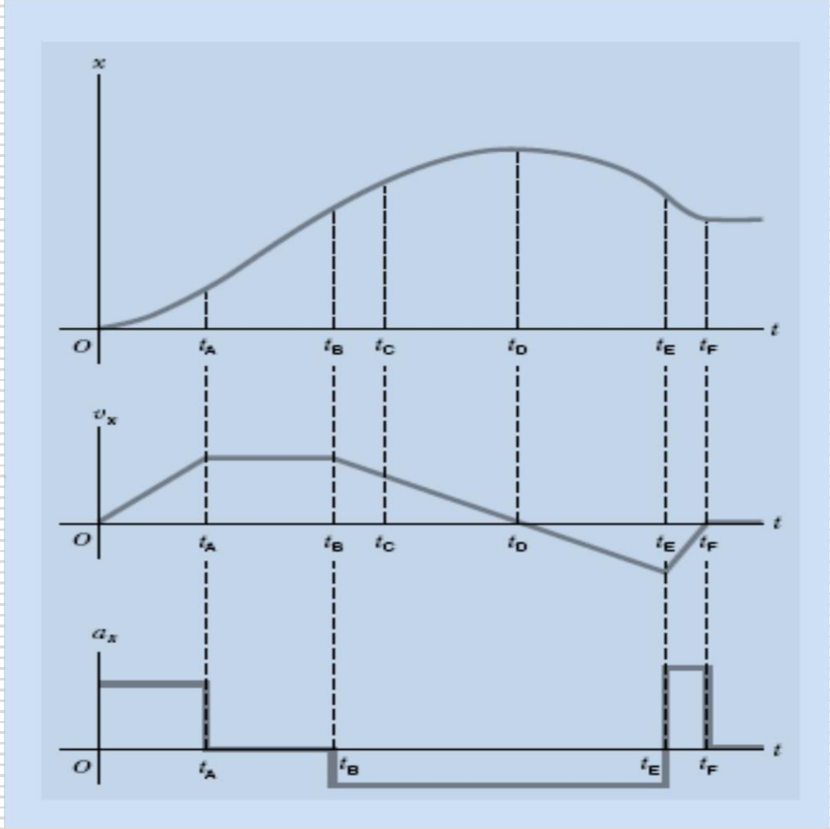
On intègre de chaque côté

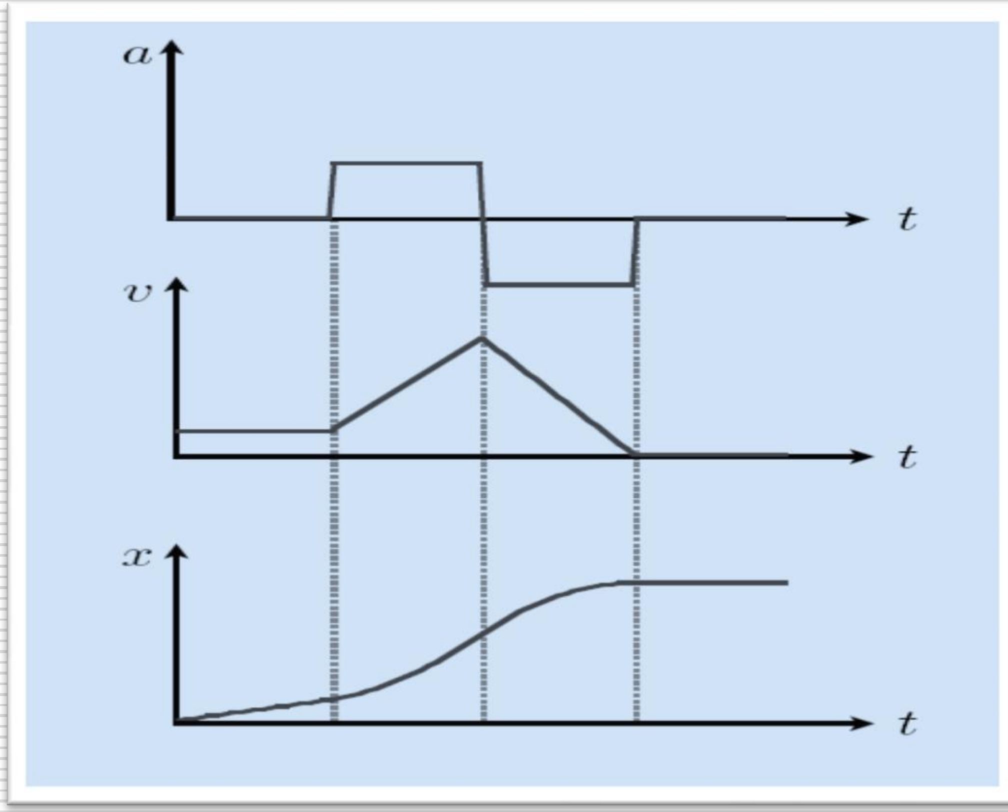
$$\int_{v_0}^{v} vdv = \int_{x_0}^{x} adx = a\int_{x_0}^{x} dx$$

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = a(x - x_0)$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

Exemples d'étude de mouvement



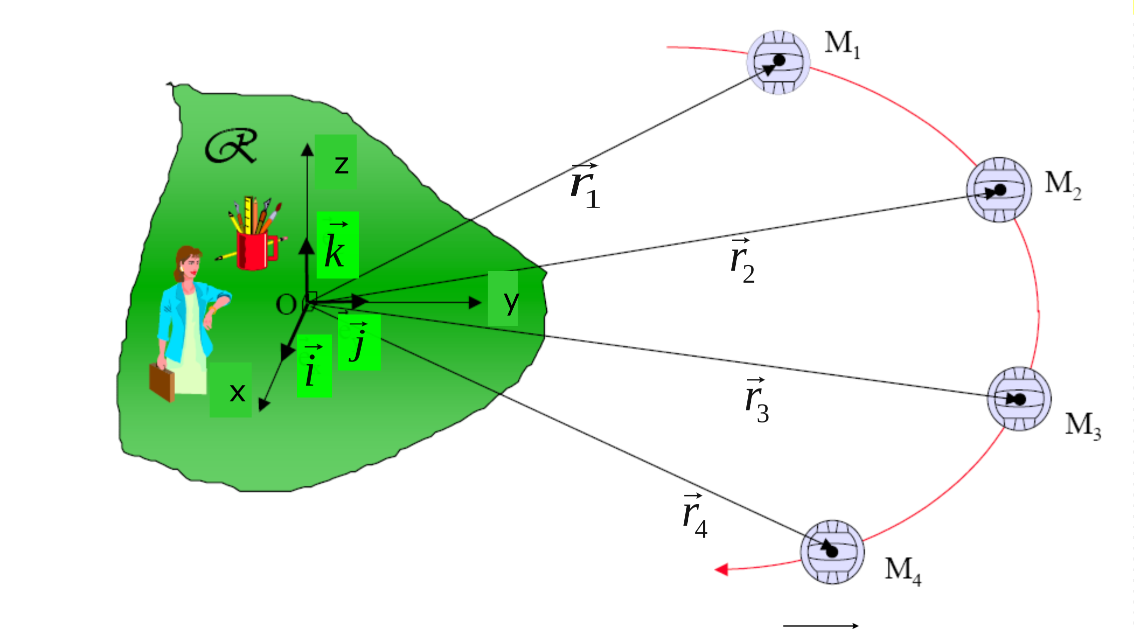


Mouvement dans l'espace ou curviligne :

Position d'un point :

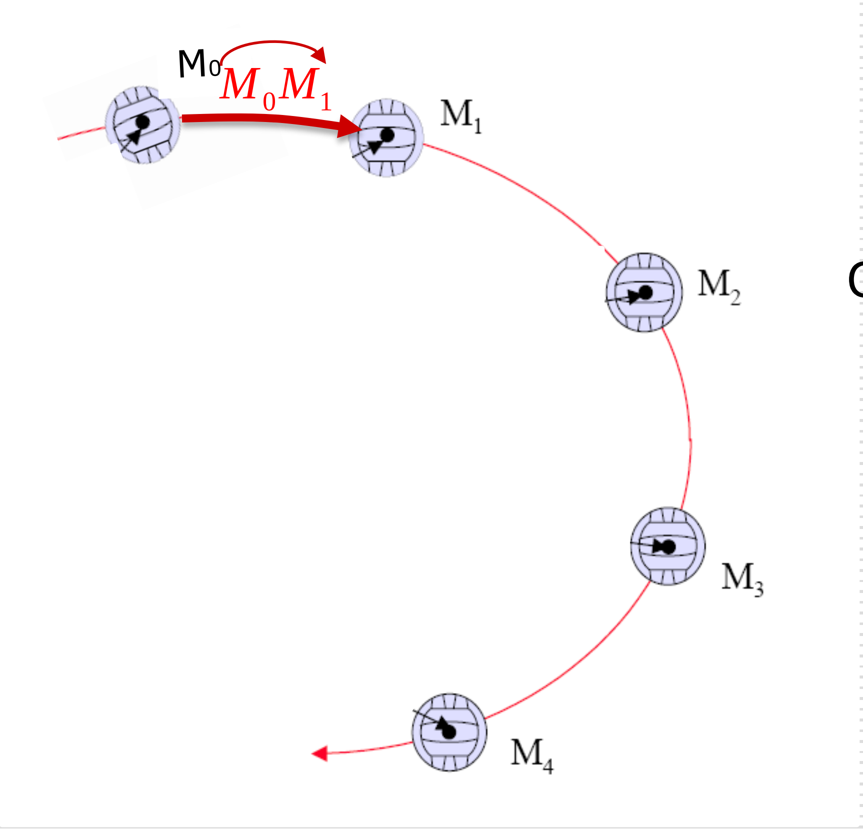
On peut définir la position d'un point dans l'espace de deux manières

- A : En repérant le point par rapport à un repère orthonormé



Le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t)$

- B : En considérant un point sur la trajectoire pris comme origine

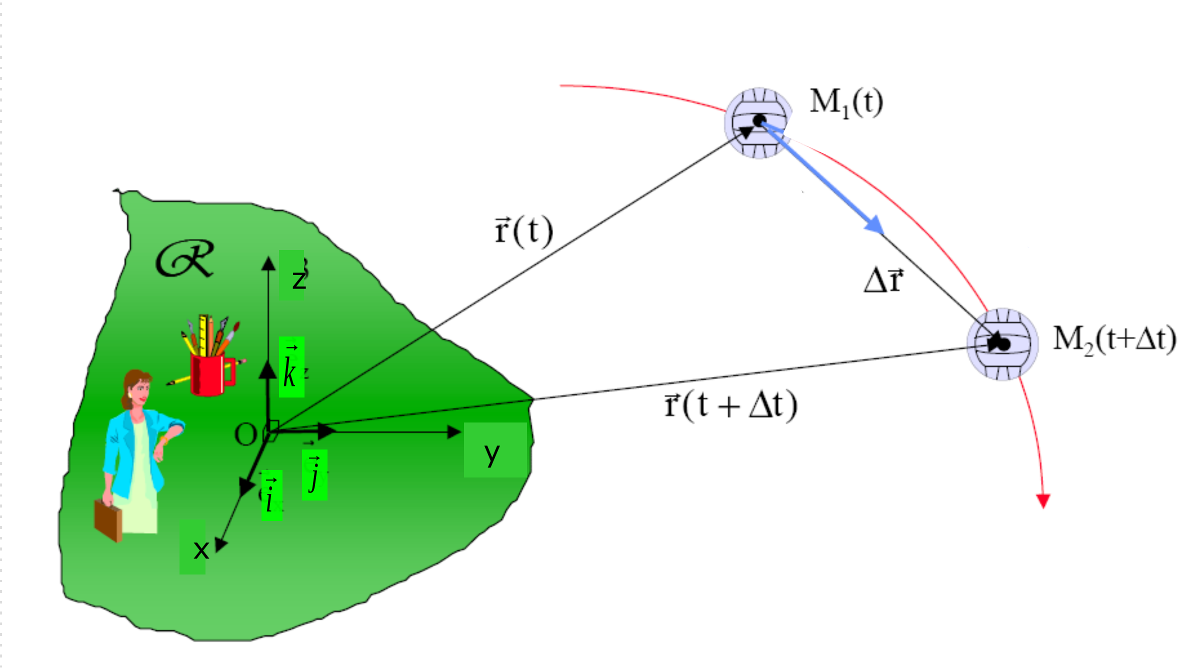


On parle d'abscisse curviligne notée :

$$s(t) = \overset{\frown}{M_0M_1}$$

La loi décrivant s(t) en fonction du temps est appelée équation horaire

Vecteur déplacement :

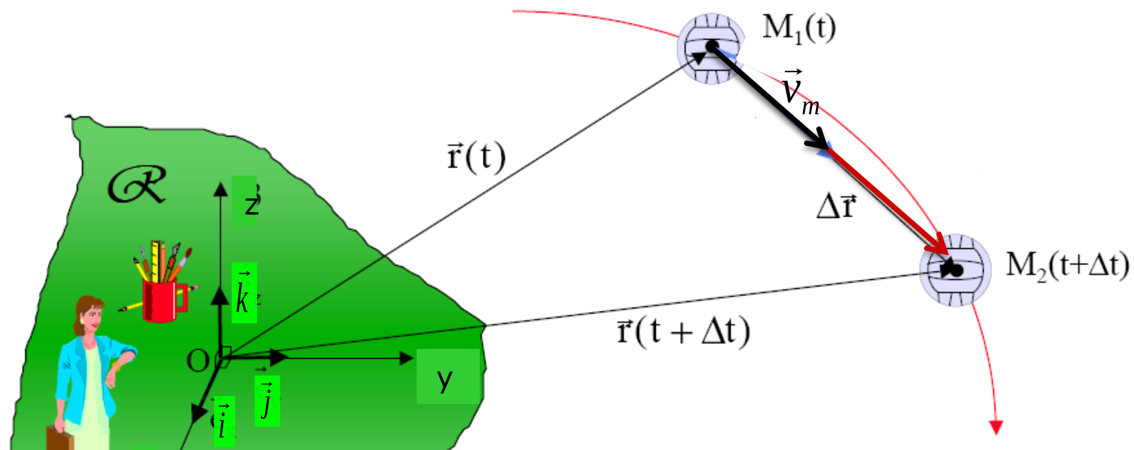


C’est la distance pour aller du point M_1 au point M_2.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \Delta\overrightarrow{OM}(t) = \Delta\vec{r}(t)$$

Vecteur vitesse d'un point :

Vecteur vitesse moyenne :



$$\vec{v}_m = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{\Delta OM}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$$

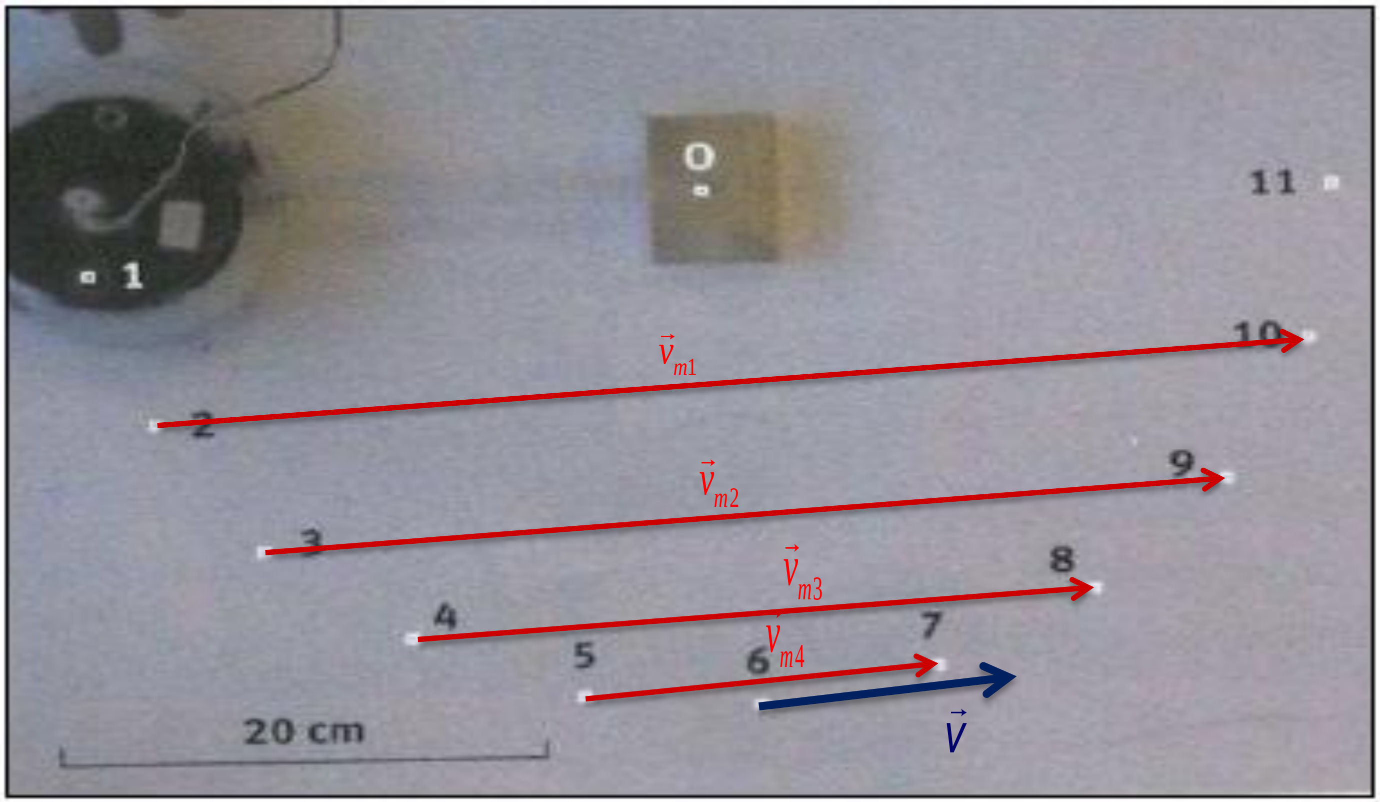
Le vecteur vitesse moyenne est parallèle au vecteur déplacement

Vecteur vitesse instantanée :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta OM}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Construction géométrique de $\vec{v}$ et $\vec{v}_m$:

On calcule la vitesse instantanée à partir de la vitesse moyenne



$$\vec{v}_{m1} = \frac{\overrightarrow{M_2M_{10}}}{\Delta t} \neq \vec{v}$$

$$\vec{v}_{m2} = \frac{\overrightarrow{M_3M_9}}{\Delta t'} \neq \vec{v}$$

$$\vec{v}_{m3} = \frac{\overrightarrow{M_4M_8}}{\Delta t''} \simeq \vec{v}$$

$$\vec{v}_{m4} = \frac{\overrightarrow{M_5M_7}}{\Delta t'''} = \vec{v}$$

Conclusion:

la vitesse instantanée à l'instant t est assimilée à la vitesse moyenne entre deux instants t_1 et t_2, tel que t est milieu de $[t_1 , t_2]$ et Δt petit.

Vecteur accélération :

Accélération moyenne :

Elle caractérise la variation du vecteur vitesse

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

$\vec{a}_m$ a le même sens et direction que $\Delta\vec{v}$

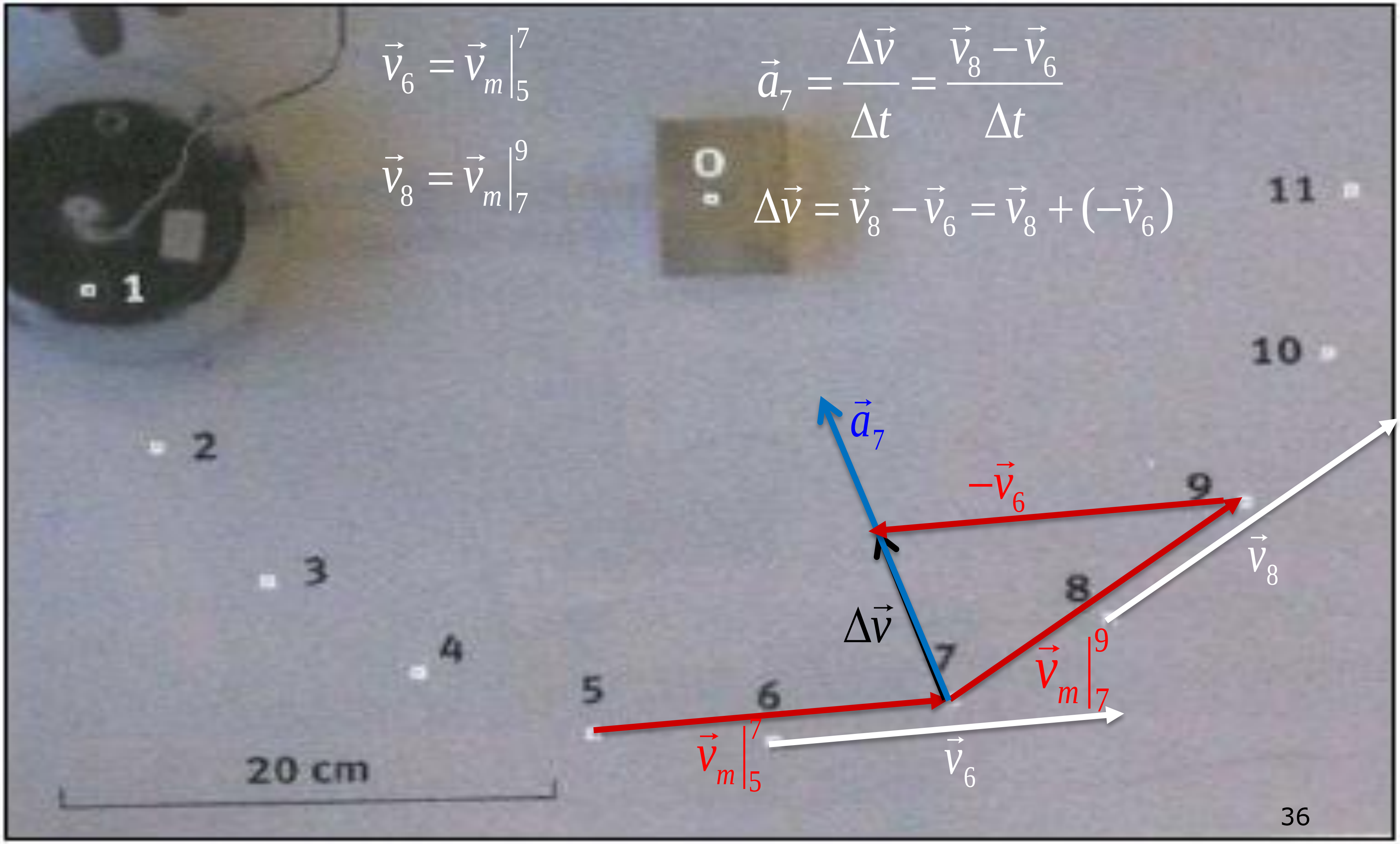
Accélération instantanée :

$$\vec{a} = \vec{a}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

On peut confondre l'accélération instantanée et l'accélération moyenne au milieu de l'intervalle de temps si $\Delta\vec{v}$ est très petit.

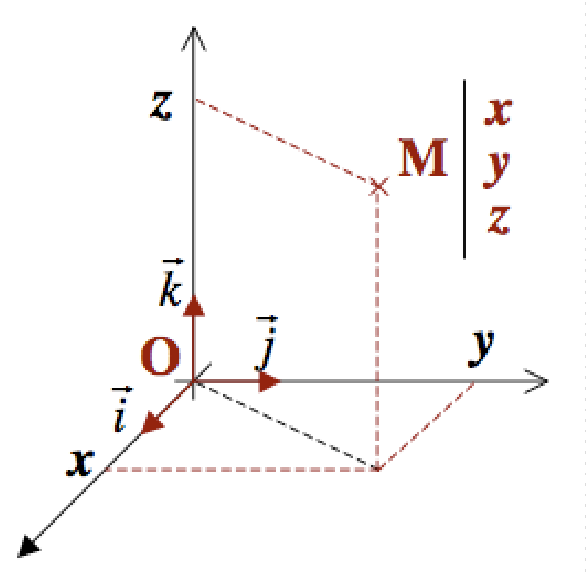
Construction géométrique de $\vec{a}$ et $\vec{a}_m$:

On cherche l'accélération à t_7 =0.6 s (correspond au point 7) avec Δt= 0.1 s



Étude de $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans différents systèmes de coordonnées :

Coordonnées cartésiennes :



Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

x(t), y(t) et z(t) sont les équations paramétriques du mouvement

Vecteur vitesse :

Vitesse moyenne:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k} = v_{mx}\vec{i} + v_{my}\vec{j} + v_{mz}\vec{k}$$

Vitesse instantanée:

$$\vec{v}_m = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

Vecteur accélération :

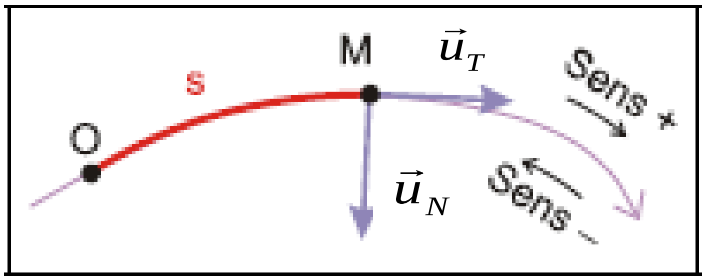
Accélération moyenne :

$$\vec{a}_m == \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\vec{k} = a_{mx}\vec{i} + a_{my}\vec{j} + a_{mz}\vec{k}$$

Accélération instantanée :

$$\vec{a} == \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

Coordonnées curvilignes ou intrinsèques :



Abscisse curviligne:

$$\overset{\frown}{OM} = s(t)$$

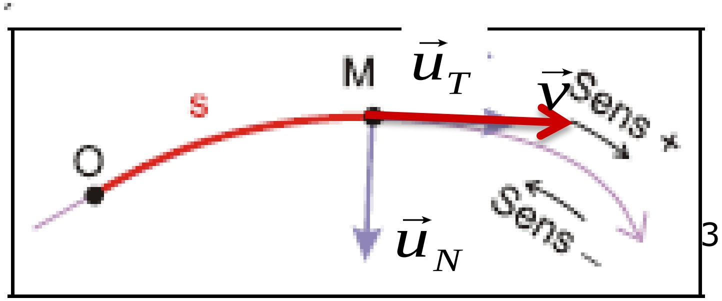
Vitesse :

On définit deux vecteurs unitaires:

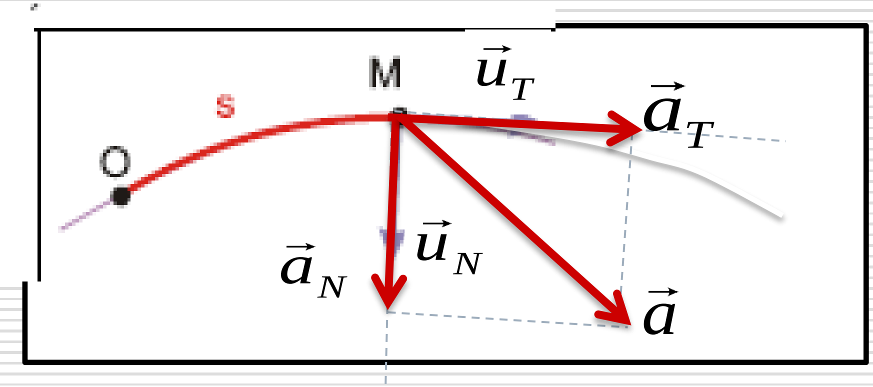
$\vec{u}_T$: porté par la tangente à la trajectoire en M est orienté dans le sens positif:

$\vec{u}_N$: porté par la perpendiculaire à la trajectoire et dirigée vers l'intérieur

Donc : $$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{u}_T = v\vec{u}_T$$



Accélération :

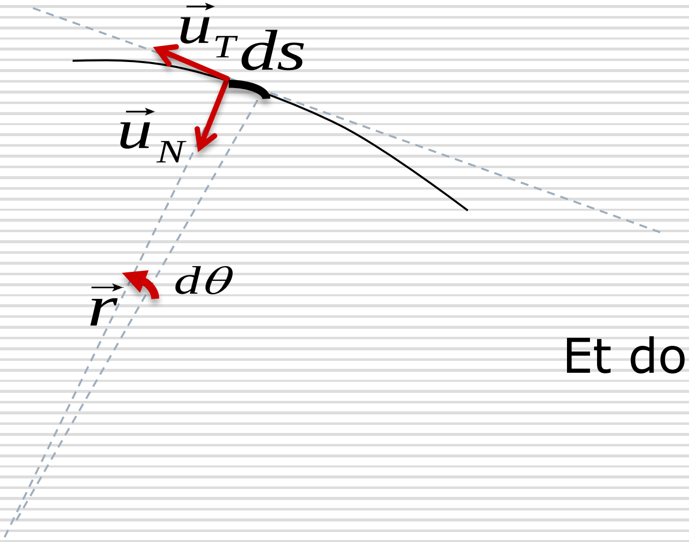


$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{u}_T)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\vec{u}_T}{dt}$$

Or: $$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_N$$

Donc: $$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_N = a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N$$

Avec: $a_T = \dfrac{dv}{dt}$ et $a_N = v\dfrac{d\theta}{dt}$



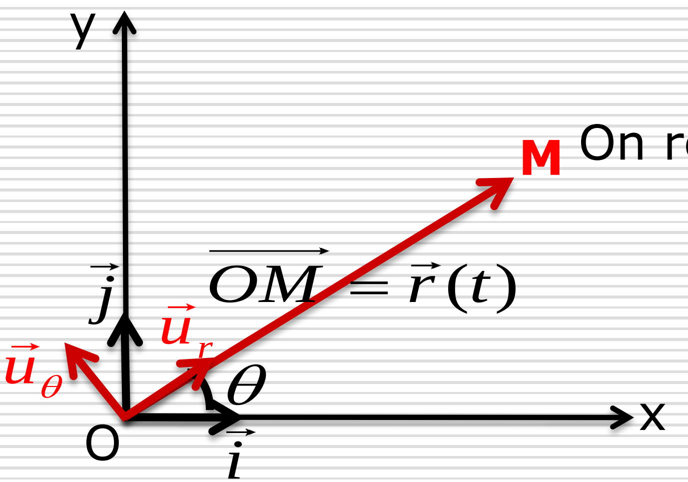
$$ds = r d\theta \Rightarrow \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{r}$$

Et donc:

$$a_N = v\frac{d\theta}{dt} = \frac{v^2}{r}$$

Coordonnées polaires :



Position:

On repère le point M par la distance OM=r et l'angle θ

$$\overrightarrow{OM}=\begin{cases} r(t) \\ \theta(t) \end{cases}$$

r(t) et θ(t) sont les équations paramétriques en coordonnées polaires

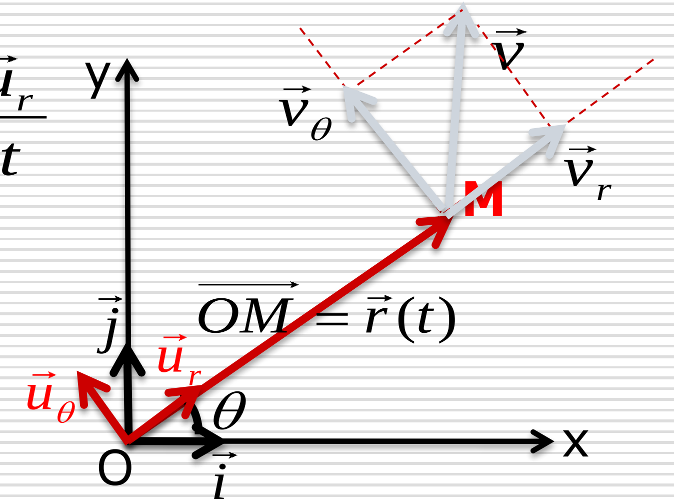
On prend deux vecteurs nouveaux unitaires $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$

$$\overrightarrow{OM}=r(t)\vec{u}_r$$

Vitesse:

Nous dérivons le vecteur position

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(r(t)\vec{u}_r)}{dt} = \frac{dr(t)}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$



Et comme : $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$

Alors : $\vec{v} = \frac{dr(t)}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$

On décompose la vitesse suivant les deux axes :

$$\vec{v} = v_r\vec{u}_r + v_\theta\vec{u}_\theta$$

Par identification on a :

$$v_r = \frac{dr}{dt} \quad \text{et} \quad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$$

Accélération:

On dérive le vecteur vitesse

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\left(\frac{dr(t)}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta\right)}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

Or on sait que : $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$ et $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_r$

$$\vec{a} = a_r\vec{u}_r + a_\theta\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}=\frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r+\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta+\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta-r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_r$$

$$\vec{a}=\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\vec{u}_r+\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\vec{u}_\theta$$

On décompose l'accélération suivant les deux axes:

$$\vec{a}=a_r\vec{u}_r+a_\theta\vec{u}_\theta$$

Par identification on a:

$$a_r=\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad a_\theta=2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Exemple:

En coordonnées polaires le mouvement d'un mobile est décrit par les équations

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} r(t) = \dfrac{t^2}{2} \\ \theta(t) = \dfrac{\pi}{4} t \end{cases}$$

Dessiner les vecteurs position, vitesse et accélération à t = 1s

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = t \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 r}{dt^2} = 1 \\ \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

Vecteur position:

À t = 1s $\overrightarrow{OM}(1s) = \begin{cases} r(t) = \frac{1}{2} = 0.5\ m \\ \theta(t) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Echelle:

1 cm	0.2 m
1 cm	0.4 m/s
1 cm	0.7 m/s2

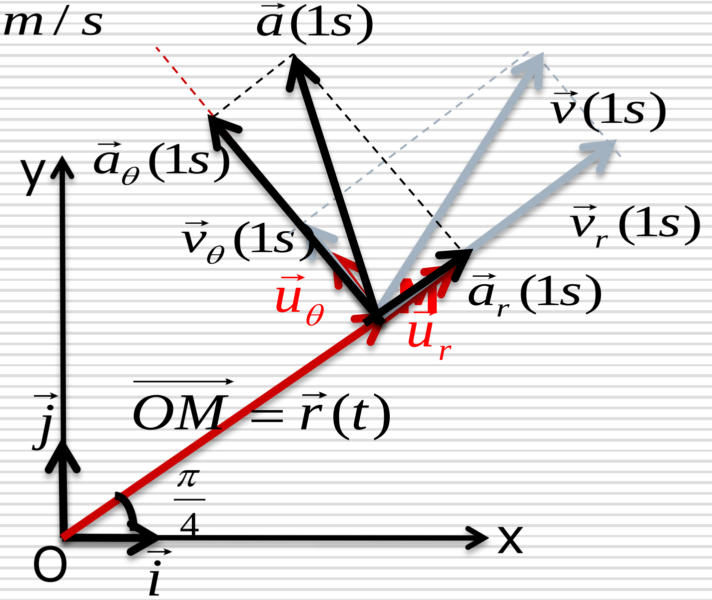
Vecteur vitesse:

$$\vec{v} = \begin{cases} v_r = \frac{dr}{dt} = t \\ v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi t^2}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_r(1s) = 1\ m/s \\ v_\theta(1) = \frac{\pi}{8} = 0.39\ m/s \end{cases}$$

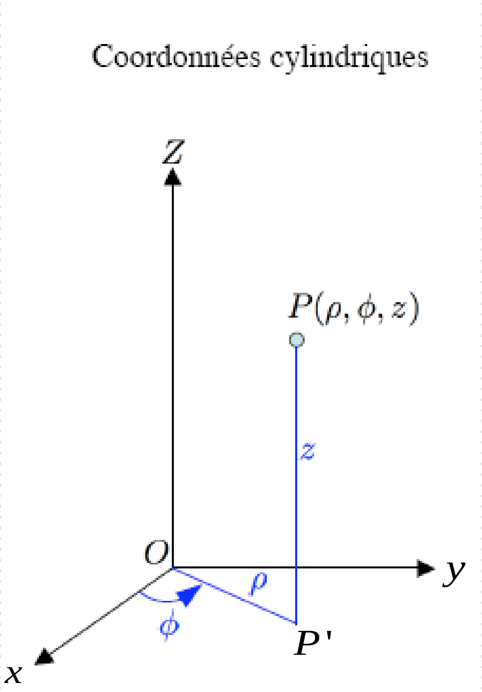
Vecteur accélération:

$$\begin{cases} a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ a_\theta = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_r = 1 - \frac{\pi^2 t^2}{32} \\ a_\theta = \frac{\pi t}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_r = 0.69\ m/s^2 \\ a_\theta = 1.57\ m/s^2 \end{cases}$$



Coordonnées cylindriques :



P' est la projection de P dans le plan xoy

Vecteur position:

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k}$$

Vecteur vitesse:

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(\rho\vec{u}_\rho + z\vec{k})}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\phi}{dt}\vec{u}_\phi + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{v} = v_\rho\vec{u}_\rho + v_\phi\vec{u}_\phi + v_z\vec{k}$$

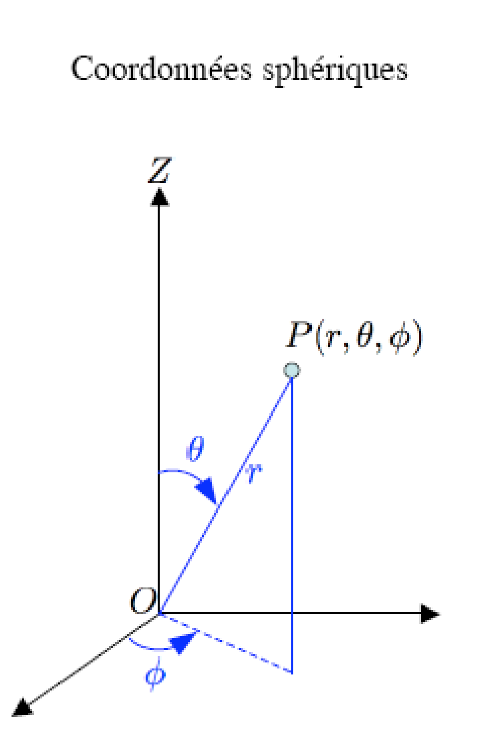
Vecteur accélération:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho+\rho\frac{d\phi}{dt}\vec{u}_\phi+\frac{dz}{dt}\vec{k}\right)$$

$$\vec{a}=\left(\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right)\vec{u}_\rho+\left(2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\phi}{dt}+\rho\frac{d^2\phi}{dt^2}\right)\vec{u}_\phi+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\vec{a}=a_\rho\vec{u}_\rho+a_\phi\vec{u}_\phi+a_z\vec{k}$$

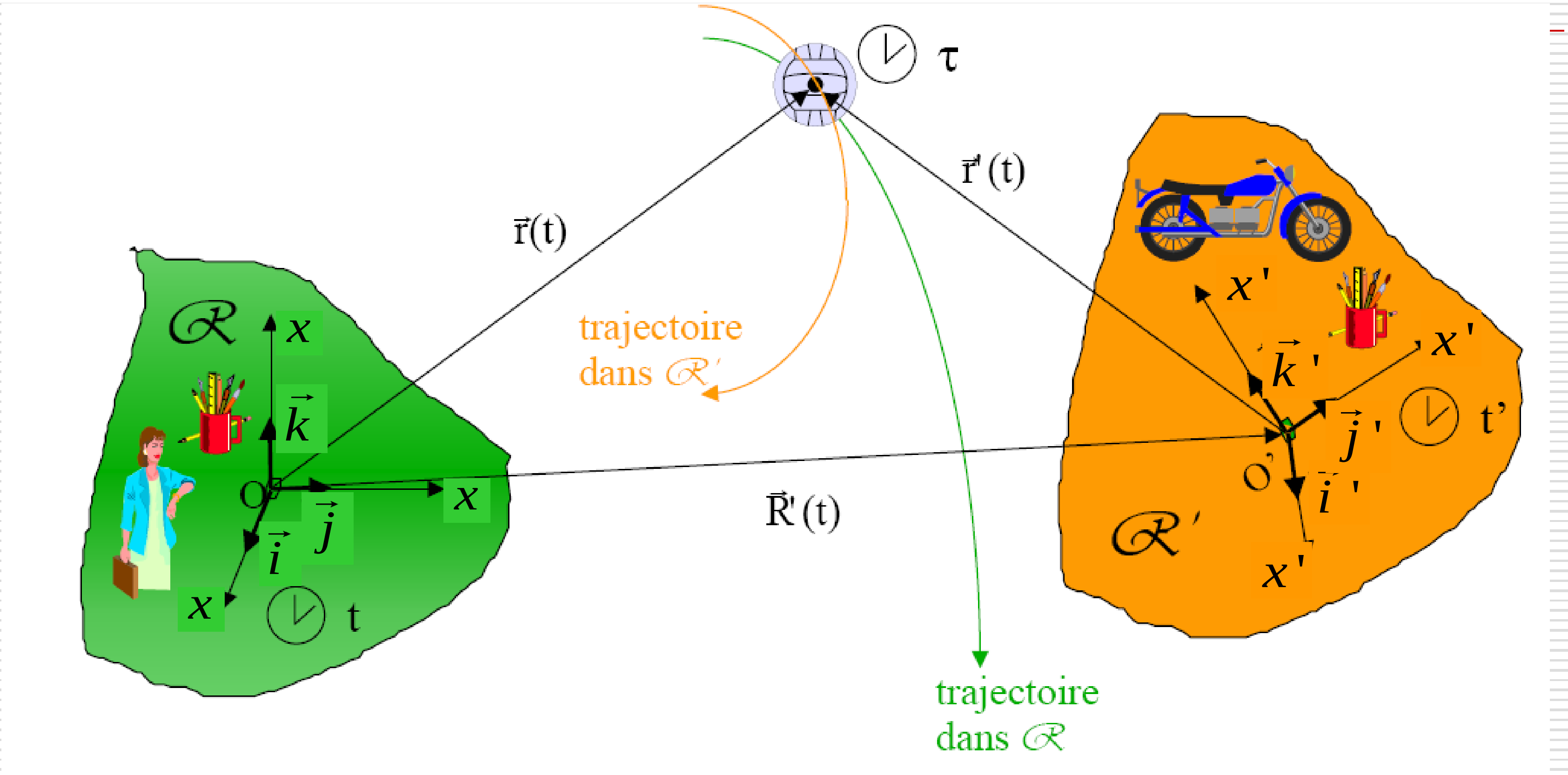
Coordonnées sphériques :



Vecteur position:

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Changement de repère ou mouvement relatif:



Vecteur position:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

Dans R: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ Dans R′: $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$

Vecteur vitesse:

La vitesse dans R est dite absolue et notée $v_a = v_{M/R}$

La vitesse dans R′ est dite relative et notée $v_r = v_{M/R'}$

Vitesse absolue:

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Vitesse relative :

$$\vec{v}_r = \frac{dx'}{dt}\vec{i}\,' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}\,' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}\,'$$

Calcul de la vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

$$\vec{v}=\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}+\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}=\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}+\frac{d(x'\vec{i}\,'+y'\vec{j}\,'+z'\vec{k}\,')}{dt}$$

$$\vec{v}=\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}+\frac{dx'}{dt}\vec{i}\,'+x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt}+\frac{dy'}{dt}\vec{j}\,'+y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt}+\frac{dz'}{dt}\vec{k}\,'+z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt}$$

$$\vec{v}=\left(\frac{dx'}{dt}\vec{i}\,'+\frac{dy'}{dt}\vec{j}\,'+\frac{dz'}{dt}\vec{k}\,'\right)+\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}+x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt}+y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt}+z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt}\right)$$

$$\vec{v}_a=\vec{v}_r+\vec{v}_e\Rightarrow\vec{v}_{M/R}=\vec{v}_{M/R'}+\vec{v}_{R/R'}$$

Vitesse d'entrainement: $\vec{v}_e=\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}+x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt}+y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt}+z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt}\right)$

Cas particuliers:

* Si R′ décrit un mouvement de translation donc les dérivées des vecteurs unitaires sont nulles:

$$\frac{d\vec{i}\,'}{dt} = \frac{d\vec{j}\,'}{dt} = \frac{d\vec{k}\,'}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$$

*Si R et R′ se déplacent à la même vitesse : $\vec{v}_a = \vec{v}_r$

Vecteur accélération:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}_r}{dt} + \frac{d\vec{v}_e}{dt}$$

En dérivant on obtient :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \Rightarrow \vec{a}_{M/R} = \vec{a}_{M/R'} + \vec{a}_{R'/R} + \vec{a}_c$$

Accélération absolue: $$\vec{a}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

Accélération relative: $$\vec{a}_r = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}\,' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}\,' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}\,'$$

Accélération entrainement: $$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}\,'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}\,'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}\,'}{dt^2}$$

Accélération Coriolis: $$\vec{a}_c = 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}\,'}{dt}\right)$$

Cas particuliers:

* Si R′ décrit un mouvement de translation donc les dérivées des vecteurs unitaires sont nulles:

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} \quad et \quad \vec{a}_c = \vec{0}$$

•Si en plus le mouvement de R′ est uniforme alors :

$$\vec{a}_e = \vec{0} \quad et \quad \vec{a}_c = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_a = \vec{a}_r$$