1. Définition

Pour réaliser un circuit électronique on doit avoir un modèle mathématique. L'algèbre de Boole (Georges Boole 1815 - 1864) est une algèbre permettant de traduire les signaux électriques en expressions mathématiques en utilisant des variables logiques (Vrai /faux).

2. Notions Théoriques

Une algèbre de Boole est constituée de :

1. Un ensemble **E**
2. Deux éléments de **E** : 0 et 1 (Faux / Vrai)
3. Deux opérations binaires sur **E** : · + (ET / OU logiques)
4. Une opération unaire sur **E** : ¯ (la négation logique).

2.1 Variable Logique (booléenne)

La variable logique est une variable ayant deux états possibles 0 ou 1

2.2 Fonction Logique

Une fonction logique est le résultat de la combinaison d'une ou de plusieurs variables logiques reliées entre elles par des opérations (et/ou/non).

Exemple : A, B, C trois variables logiques

$F(A,B) = A.B$ $F(A,B) = A + B$ $F(A,B,C) = \overline{A}.\overline{B}.C + A.\overline{B}.C + A.B.C$

2.3 Théorèmes

- **principe de dualité** : Chaque axiome et chaque postulat possède un équivalent dual, où les éléments 0 sont remplacés par des 1, les 1 par des 0, les (·) par des (+) et vice et versa

Associativité	(A+B)+C= A+(B+C)=A+B+C	(A.B).C=A.(B.C)=A.B.C
Commutativité	A+B=B+A	A.B=B.A
Distributivité	A.(B+C)= A.B + A.C	A+(B.C)=(A+B).(A+C)
Elément neutre	A+0=A	A.1=A
Elément absorbant	A.0=0	A+1=1
Complémentation	$A + \overline{A} = 1$	$A.\overline{A} = 0$
Involution	$\overline{\overline{A}} = A$	
Idempotence	A+A+A+............+A = A	A.A.A...........A=A
Absorption	A+A.B=A	A.(A+B)=A
Simplification	$A + \overline{A}.B = A + B$	$A.(\overline{A} + B) = A.B$
Lois de Morgan	$\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A}.\overline{B}$

> ***Remarque :***
> Le théorème de Morgan peut être généralisé pour N variables
>
> $\overline{A.B.C\ldots\ldots} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $\overline{A+B+C+\ldots\ldots\ldots\ldots} = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}\ldots\ldots$

3. Représentation Des Fonctions Booléennes

3.1 La table de vérité

Une TV est un tableau qui décrit toutes les possibilités de sorties en fonction des entrées. Pour N variables, la table génère $\mathbf{2^n}$ lignes

Exemple : Table de vérité du OR / AND / NOT logique

A	B	F(A,B)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

AND

A	B	F(A,B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

OR

A	F(A)
0	1
1	0

NOT

> ***Remarques :***
>
> - Deux fonctions sont équivalentes si elles possèdent la même table de vérité
> - On peut utiliser la table de vérité pour démontrer les théorèmes précédents

Exemple : démontrer l'égalité suivante A+A.B=A

3.2-Représentation algébrique

La fonction est représentée à partir des noms des variables et des opérateurs de l'algèbre de Boole

Exemple : $f(A,B) = A\overline{B} + AB + \overline{A}B$

- **La Forme canonique**

La forme canonique d'une fonction est la forme ou chaque terme de la fonction comporte toutes les variables. $\quad$ $F(A,B,C) = AB\overline{C} + A\overline{C}B + \overline{A}BC$

**** Forme Canonique Disjonctive (FCD)**

Un minterme de N variables est un produit de ces N variables ou de leurs complémentaires

Exemple : Soit a,b,c et d 4 variables booléennes $\overline{AB}CD, ABCD, \overline{A}B\overline{C}D\ldots\ldots$ sont des mintermes

La forme canonique disjonctive (**FCD**) est la somme des mintermes pour lesquels la fonction vaut **1**, cette forme est la plus utilisée.

**** Forme Canonique Conjonctive (FCC)**

Un maxterme de N variables est une somme de ces N variables ou de leurs complémentaires

Exemple : Soit a,b,c ,d 4 variables booléennes $A+B+C+D, A+B+\overline{C}+D, \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$...... sont des maxtermes . La forme canonique conjonctive (**FCC**) est le produit des maxtermes pour lesquels la fonction vaut **0**

Exemple : Soit F la fonction définie par la table de vérité ci-dessous. Donner la FCD, FCC ?

A	B	C		S	
0	0	0		0	→ $A+B+C$: max terme
0	0	1		0	→ $A+B+\overline{C}$: max terme
0	1	0		0	→ $A+\overline{B}+C$: max terme
0	1	1		1	→ $\overline{A}.B.C$: min terme
1	0	0		0	→ $\overline{A}+B+C$: max terme
1	0	1		1	→ $A.\overline{B}.C$: min terme
1	1	0		1	→ $A.B.\overline{C}$: min terme
1	1	1		1	→ $A.B.C$: min terme

FCD : $F(A,B,C)=\overline{A}.B.C + A.\overline{B}.C + A.B.\overline{C} + A.B.C$

FCC : $F(A,B,C)=(A+B+C)\,(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C)\,(\overline{A}+B+C)$

Remarques :

- La FCD et La FCC sont équivalentes
- la forme d'une fonction où les termes ne contiennent pas toutes les variables est appelée forme ***normale***

3.3 La Forme Numérique

C'est la correspondance binaire → décimale

$$F=\sum(3,5,6,7)=\overline{A}.B.C + A.\overline{B}.C + A.B.\overline{C} + A.B.C$$

$$F=\prod(0,1,2,4)=(A+B+C)\,(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C)\,(\overline{A}+B+C)$$

4. Simplification des fonctions booléennes

L'objectif de la simplification des fonctions logiques est de :

- Réduire le nombre de termes dans une fonction
- Obtenir un circuit plus petit et plus rapide

4.1 Simplification algébrique

Le principe consiste à appliquer les règles de l'algèbre de Boole afin d'éliminer des variables ou des termes

Exemple 1) $F(A,B,C) = A.\overline{B} + B.\overline{C} + B.C = A.B$

Remarque :
Il est préférable de simplifier la forme canonique ayant le nombre de termes minimum

Exemple : simplifiez la fonctions suivante $F(A,B,C)= \sum (2,3,4,5,6,7)$

Autres opérateurs :

Ou exclusif (XOR)

$$F(A,B) = A \oplus B = \overline{A}.B + A.\overline{B}$$

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Non Ou exclusif (XNOR)

$$F(A,B) = A \otimes B = A.B + \overline{A}.\overline{B}$$

A	B	$A \otimes B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4.2 Table de Karnaugh

En examinant la méthode de simplification algébrique on remarque que cette dernière devient très difficile si le nombre des variables et grand. La méthode de Karnaugh est une technique de simplification rapide

- **Principe d'adjacence**

Examinons l'expression suivante : $A \,.\, B + A \,.\, \overline{B}$

Les deux termes possèdent les mêmes variables. La seule différence est l'état de la variable B qui change

Ces termes sont adjacents

$A.B + \overline{A}.B = B$

$A.B.C + A.\overline{B}.C = A.C$

$A.B.C.D + A.B.\overline{C}.D = A.B.D$

Ces termes ne sont pas adjacents

$A.B + \overline{A}.\overline{B}$

$A.B.C + A.\overline{B}.\overline{C}$

$A.B.C.D + \overline{A}.B.\overline{C}.D$

- **Principe de la méthode**

- C'est un tableau de 2^n cases, N étant le nombre de variables.

- La méthode peut s'appliquer aux fonctions logiques de 2,3,4,5 et 6 variables.

- Pour chaque min terme (TV) lui correspond une case égale 1

- Pour chaque max terme (TV) lui correspond une case égale à 0

- **Simplification**

- Essayer de regrouper les cases adjacentes qui comportent des 1

- Essayer de faire des regroupements avec le maximum de cases (16,8,4 ,2,1)

- On s'arrête lorsqu'il y a plus de 1 en dehors des regroupements

- On élimine les variables qui **changent d'états**

- La fonction finale est égale à la somme des termes dont l'état des variables ne change pas à l'intérieur d'un regroupement.

- une ou plusieurs cases peuvent être communes à plusieurs regroupements

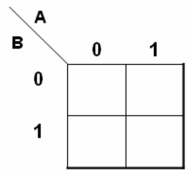
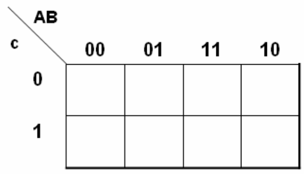


Tableau à 2 variables



Tableaux à 3 variables

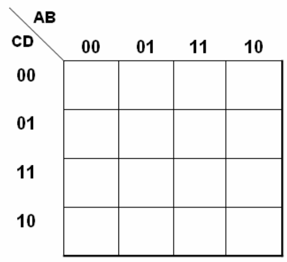


Tableau à 4 variables

Remarques:

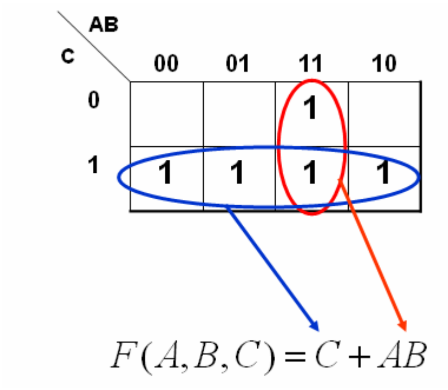
- On peut appliquer la méthode de Karnaugh sur des Maxterms

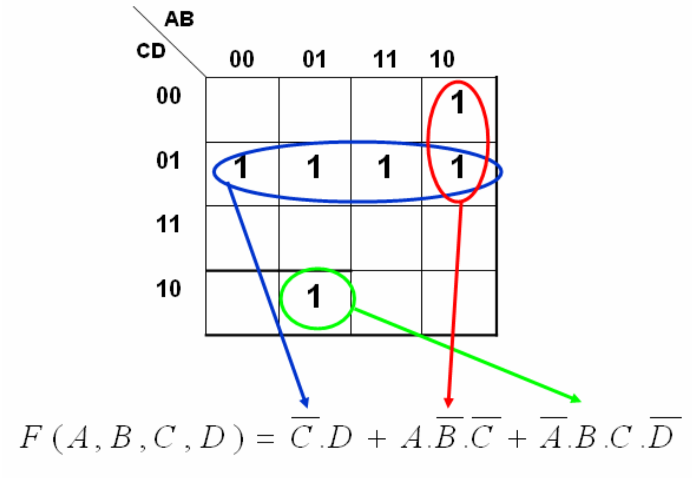
- Avec la méthode de Karnaugh on essaye de faire le minimum des regroupements qui contient le maximum des cases

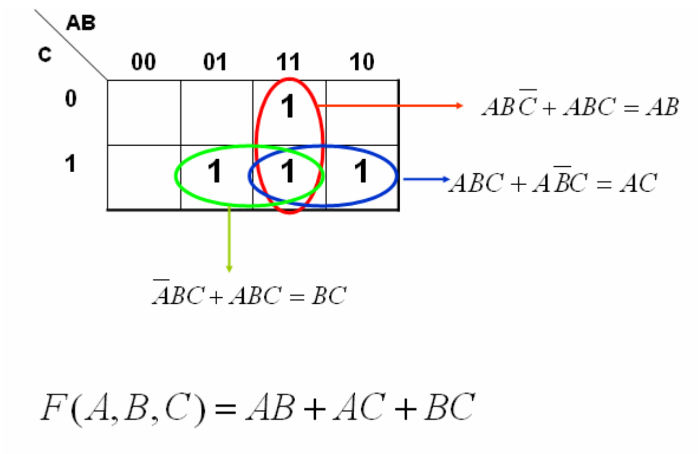
- les cases des coins sont des cases adjacentes

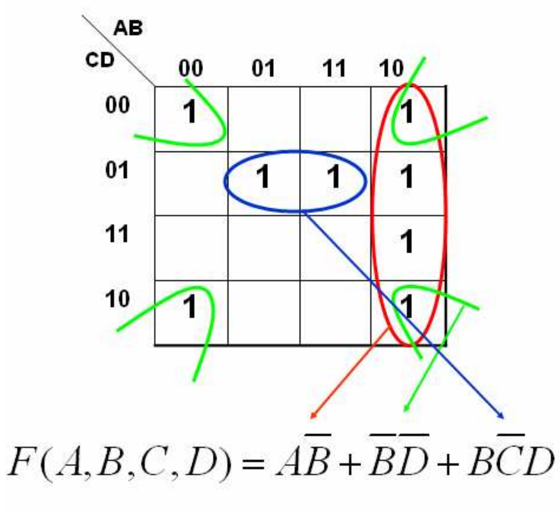
- Au-delà de 6 variables, la méthode de Karnaugh n'étant plus valable, on utilise la méthode de Mac Cluskey

Exemple :


AB
C
00 01 11 10
0
1
$F(A,B,C) = C + AB$


AB
CD
00 01 11 10
00
01
11
10
$F(A,B,C,D) = \overline{C}.D + A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.C.\overline{D}$


AB
C
00 01 11 10
0
1
$AB\overline{C} + ABC = AB$
$ABC + A\overline{B}C = AC$
$\overline{A}BC + ABC = BC$
$F(A,B,C) = AB + AC + BC$


AB
CD
00 01 11 10
00
01
11
10
$F(A,B,C,D) = A\overline{B} + \overline{B}\overline{D} + B\overline{C}D$