U.S.T.H.B
Faculté de mathématiques
Anneaux et modules(Master ACC)

Année 2012-2013
16 Janvier 2013

Epreuve finale

Exercice 1 Soient A un anneau commutatif unitaire et I, J deux idéaux de A. Soit

$$I + J = \{a + b, \quad a \in I \text{ et } b \in J\}$$

Montrer que $I \cup J \subset I + J$ et si K est un idéal de A qui contient $I \cup J$ alors $I + J \subset K$.

Exercice 2

1. Soit $A = \frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}$. Déterminer l'ensemble des éléments nilpotents de A, l'ensemble des diviseurs de *zéro* de A ainsi que l'ensemble des éléments inversibles.
2. Soit $B = \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ où $n = p^2q^2$ et p, q sont deux nombres premiers Soit $x \in B$. Montrer que x est nilpotent si et seulement si x est divisible par pq. En déduire le nombre des éléments nilpotents de B.

Exercice 3 Soit A un anneau commutatif unitaire, M un A-module et N et F des sous-modules de M. Soit $f : N \cap P \longrightarrow N \times P$, $x \longmapsto (x, x)$ et $g : N \times P \longrightarrow N + P$, $(y, z) \longrightarrow y - z$. Montrer que la suite

$$0 \longrightarrow N \cap P \xrightarrow{f} N \times P \xrightarrow{g} N + P \longrightarrow 0$$

est exacte.

Exercice 4 Soit A un anneau commutatif unitaire et $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ une suite exacte de A-modules. Soit N, P deux sous-modules de M tels que $f^{-1}(N) = f^{-1}(P)$ et $g(N) = g(P)$. On suppose que $N \subset P$. Montrer que $N = P$.

Exercice 5 Soit A un anneau commutatif unitaire, M, N deux A-module et $f : M \longrightarrow N$ un morphisme de A-modules. Si M_1 est un sous-module de M et N_1 un sous-module de N. Montrer que

1. $f^{-1}(f(M_1)) = M_1 + ker f$
2. $f(f^{-1}(N_1)) = N_1 \cap Im f$
3. $f(M_1 \cap f^{-1}(N_1)) = f(M_1) \cap N_1$