

ALGÈBRE BILINÉAIRE

Pour les :

Classes Préparatoires
aux Grandes Écoles

Premier cycle
universitaire



L2 Mathématiques

Bakir FARHI

(Professor à NHSM^a - Alger)

a. National Higher School of Mathematics.

NHSM NATIONAL HIGHER SCHOOL
OF MATHEMATICS
المدرسة الوطنية
العليا في الرياضيات



©2023-2024

Polycopié d'algèbre bilinéaire



La rédaction de ce polycopié a commencé lors de mes premières années d'enseignement à l'Université de Béjaia (de 2012/2013 à 2016/2017) où j'ai dirigé le module d'Algèbre 4 (Algèbre bilinéaire) au sein de cet établissement. A l'origine, il s'agissait simplement d'un cours léger et incomplet qui dépassait à peine 70 pages. Cependant, il était largement suffisant pour l'enseignement dans cette université souffrant de problèmes de gestion. En 2022/2023, j'ai rejoint la nouvelle Ecole de Mathématiques NHSM⁽¹⁾ d'Alger. Le niveau élevé de certains étudiants de cette école m'a alors encouragé à reprendre mes activités pédagogiques ; en particulier le développement de la version basique du polycopié en question, étant donné que je suis responsable du module d'Algèbre de 2^{ème} année (classes préparatoires). Sans plus attendre, passons à la présentation des différents chapitres du présent polycopié :

Dans le premier chapitre, nous définissons ce qu'est *une application bilinéaire* d'un produit de deux \mathbb{K} -espaces vectoriels dans un autre \mathbb{K} -espace vectoriel (où \mathbb{K} est un corps commutatif). Nous nous focalisons pour toute la suite sur le cas particulier des *formes bilinéaires symétriques* sur un \mathbb{K} -espace vectoriel, en introduisant leurs propriétés essentielles ; à savoir : *la définition, la positivité* (lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) et *la non-dégénérescence*. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les deux premières propriétés réunies définissent *un produit scalaire réel*.

Dans le deuxième chapitre, nous nous penchons tout particulièrement sur les formes bilinéaires sur un \mathbb{K} -espace vectoriel *E de dimension finie*. La fixation d'une base de *E* permet de représenter une forme bilinéaire *f* de *E* par un tableau (carré) de nombres, appelé *matrice associée à f*.

(1). National Higher School of Mathematics.

Tout comme pour les endomorphismes de E , la matrice associée à une forme bilinéaire f de E , relativement à une base donnée de E , facilite l'étude de f ainsi que la caractérisation de ses propriétés. Par exemple, une forme bilinéaire *symétrique* est caractérisée par une matrice *symétrique*, une forme bilinéaire symétrique *non dégénérée* est caractérisée par une matrice symétrique *inversible*, etc.

Nous établissons enfin *une formule de changement de base*. Il s'agit d'une formule matricielle permettant de déterminer la matrice associée à une forme bilinéaire de E relativement à une nouvelle base de E , connaissant sa matrice associée relativement à une ancienne base de E .

Au troisième chapitre, nous définissons et étudions *la forme quadratique* associée à *une forme bilinéaire symétrique* d'un espace vectoriel. Nous verrons qu'il y a *une correspondance bijective* entre *les formes bilinéaires symétriques* et *les formes quadratiques* d'un espace vectoriel, tout en explicitant *la réciproque* de cette correspondance. La forme bilinéaire symétrique associée (via cette correspondance) à une forme quadratique q est appelée *la forme polaire* de q . Dans le cas d'un espace vectoriel de *dimension finie*, la reconnaissance d'une forme quadratique q est toute simple : q s'exprime par *un polynôme homogène de second degré* en les coordonnées (relatives à une base donnée de l'espace vectoriel en question). A partir de ce polynôme homogène de second degré, on obtient immédiatement *la forme polaire* de q .

La seconde partie du chapitre est consacrée à l'étude de *l'orthogonalité* pour *une forme bilinéaire symétrique* (ou *une forme quadratique*) d'un espace vectoriel E . Nous établissons en particulier quelques propriétés de *l'orthogonal* d'une partie de E et étudions *les familles et les bases orthogonales* (resp. *orthonormées*) de E . Nous démontrons le théorème fondamental selon lequel « tout espace vectoriel de *dimension finie* E possède au moins *une base orthogonale* pour *une forme bilinéaire symétrique* donnée sur E ». Aussi, nous clarifions l'intérêt d'une base orthogonale pour une forme bilinéaire symétrique d'un espace vectoriel de dimension finie sans pour autant donner les méthodes de détermination de telles bases. Ces méthodes font l'objet d'étude des chapitres suivants.

Au quatrième chapitre, nous étudions *la réduction de Gauss* des formes quadratiques sur un espace vectoriel E de dimension finie. Il s'agit d'une technique algorithmique qui consiste à transformer un polynôme homogène de second degré en une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes. Ces formes linéaires définissent des nouvelles coordonnées relatives à une nouvelle base de E . La matrice représentant la forme quadratique en question relativement à cette nouvelle base est alors *diagonale*. Nous fournissons également, en complément, une méthode alternative matricielle pour réduire une forme quadratique.

Nous étudions ensuite l'équivalence des formes quadratiques de E . Deux formes quadratiques q et q' de E sont dites *équivalentes* s'il est possible de passer de l'expression de l'une à l'expression de l'autre par une *transformation linéaire bijective*; autrement dit, s'il existe un *automorphisme* u de E tel que $q' = q(u)$. La *classification* des formes quadratiques de E se fait alors *modulo l'équivalence* qui vient d'être définie. Dans le cas complexe (c'est-à-dire d'un espace vectoriel complexe), on montre facilement que deux formes quadratiques de E sont équivalentes si et seulement si elles ont le même *rang*. Cependant dans le cas réel, l'*invariant* qui caractérise l'équivalence des formes quadratiques n'est plus le rang mais un autre plus subtile, introduit par Sylvester en 1852 et nommé *signature*. Ces deux invariants (*rang* et *signature*) se déduisent immédiatement de la réduction de Gauss d'une forme quadratique.

Nous fournissons en complément *la méthode des déterminants de Sylvester*, permettant de calculer la signature d'une forme quadratique réelle (non dégénérée) sans la réduire préalablement. De cette méthode découle *le critère de Sylvester* caractérisant (par un simple calcul de déterminants) *la définition positive* des matrices réelles symétriques.

Le cinquième chapitre est consacré à l'étude des espaces *préhilbertiens réels* en général, et *euclidiens* en particulier. Les espaces de *Hilbert* sont introduits brièvement, car nous avons jugé qu'ils relèvent davantage de *la topologie*, voire de *l'analyse hilbertienne*, que de *l'algèbre bilinéaire*. Dans ce chapitre, nous découvrons les propriétés *métriques* d'un espace préhilbertien. Nous verrons ainsi (à travers *l'inégalité de Cauchy-Schwarz* et *l'inégalité de Minkowski*) qu'un espace préhilbertien est un cas particulier d'un *espace vectoriel normé*, mais géométriquement plus riche, car il est doté de notions telles que *l'orthogonalité* et *l'écart angulaire*, absentes dans un quelconque espace vectoriel normé. Ces deux dernières notions permettent d'étendre, aux espaces préhilbertiens, les théorèmes de *Pythagore* et d'*Al-Kashi*. D'ailleurs, *le théorème d'Al-Kashi* est, en quelque sorte, redémontré en utilisant *le produit scalaire canonique* de \mathbb{R}^2 .

Dans la seconde partie du chapitre, nous étudions *le procédé de Gram-Schmidt* qui permet (en particulier) de construire *une base orthonormée* d'un *espace euclidien* à partir d'une base quelconque de celui-ci. L'interprétation géométrique de ce procédé est reportée au sixième chapitre.

Au sixième chapitre, nous étudions *les projections orthogonales* d'un espace préhilbertien réel. Nous établissons une formule pour la projection orthogonale d'un vecteur x d'un espace préhilbertien (réel) E sur un sous-espace de dimension finie F de E , moyennant une base orthonormée de F . Par le théorème de Pythagore, nous montrons immédiatement que la projection orthogonale de x sur F est le vecteur de F le plus proche de x ,

ce qui fournit un moyen de calculer la distance de x à F , à l'aide d'une base orthonormée de F . Nous verrons juste après que *les déterminants de Gram* permettent de calculer cette même distance sans faire appel à une base orthonormée de F (une base quelconque de F suffit).

Nous terminons le chapitre en question par une interprétation géométrique de *l'algorithme de Gram-Schmidt* qui se sert justement des projections orthogonales.

Au septième chapitre, nous introduisons l'importante notion de *l'adjoint* d'un endomorphisme d'un *espace préhilbertien réel*. Plusieurs types particuliers et remarquables d'endomorphismes d'un espace préhilbertien (réel) émergent de cette notion ; parmi ceux-ci, citons les endomorphismes *autoadjoints* (ou *symétriques*), *antisymétriques*, *orthogonaux* et *normaux*. Tous ces types d'endomorphismes sont étudiés et caractérisés matriciellement lorsque l'espace préhilbertien en question est de dimension finie et muni d'une base orthonormée. La théorie spectrale de ces endomorphismes particuliers est, quant à elle, repoussée au neuvième chapitre.

Au huitième chapitre, nous étudions la notion d'*une forme hermitienne* d'un espace vectoriel complexe. Cette notion est considérée comme l'analogue de la notion d'*une forme bilinéaire symétrique* d'un espace vectoriel réel pour les espaces vectoriels complexes. Elle permet essentiellement d'étendre le concept du produit scalaire d'un espace vectoriel réel aux espaces vectoriels complexes. Nous établissons des analogues complexes de toutes les notions et de tous les résultats des chapitres 1 à 6, ce qui fait de ce chapitre le plus long de tous les autres !

Au neuvième et dernier chapitre, nous introduisons l'importante notion de *l'adjoint* d'un endomorphisme d'un espace préhilbertien complexe, dont l'analogue pour les espace préhilbertiens réels est déjà traitée au chapitre 7. Nous étudions les endomorphismes particuliers découlant de cette notion, à savoir les endomorphismes *hermitiens*, *antihermitiens*, *unitaires* et *normaux*. Nous fournissons également la caractérisation matricielle de tous ces types d'endomorphismes lorsque l'espace préhilbertien (complexe) en question est de dimension finie et muni d'une base orthonormée.

La seconde partie de ce chapitre, sans doute la plus importante et la moins triviale de ce polycopié, est essentiellement consacrée à *la théorie spectrale* des types d'endomorphismes susmentionnés d'un *espace hermitien* (c'est-à-dire d'un espace préhilbertien complexe de dimension finie). Nous appelons *théorème spectral* pour une certaine classe d'endomorphismes d'un espace préhilbertien (réel ou complexe) de dimension finie un théorème qui énonce que tout endomorphisme de la classe considérée est *diagonalisable dans une base orthonormée* de l'espace en question.

Nous établissons d'abord *le théorème spectral* pour *les endomorphismes*

hermitiens d'un espace hermitien, puis pour les endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien, et enfin pour les endomorphismes normaux d'un espace hermitien. Des analogues matriciels des différents théorèmes spectraux sont alors déduits.

Il découle de ces analogues matriciels un résultat remarquable sur les formes hermitiennes (resp. bilinéaires symétriques) d'un espace hermitien (resp. euclidien). Ce résultat énonce que « pour toute forme hermitienne (resp. bilinéaire symétrique) f d'un espace hermitien (resp. euclidien) E , il existe une base orthonormée de E qui soit f -orthogonale ».

Il découle également des théorèmes spectraux matriciels une formule pour la signature d'une forme quadratique (réelle ou hermitienne) à partir du spectre d'une matrice associée.

Nous achevons ce chapitre par le théorème de trigonalisation de Schur selon lequel « tout endomorphisme d'un espace hermitien (resp. euclidien) est trigonalisable dans une base orthonormée de l'espace en question ». Dans le cas d'un endomorphisme normal (resp. autoadjoint) d'un espace hermitien (resp. euclidien), la trigonalisation de Schur devient systématiquement une diagonalisation; du coup, nous obtenons une nouvelle démonstration du théorème spectral pour les endomorphismes normaux d'un espace hermitien.

Aussi, nous avons fait suivre chaque chapitre d'une série importante d'exercices dont la plus longue est celle du chapitre 9 en raison de son importance. Ces séries d'exercices commencent toujours par les exercices calculatoires (qui sont indispensables) et vont progressivement vers le théorique. Nous avons intégré aussi à la fin du polycopié une liste de sujets d'examen que l'auteur a proposé durant les années précédentes à l'Université de Béjaia ou à NHSM, et en dernier se trouve une liste bibliographique (pour les trois langues : français, arabe et anglais) qui nous a servi de source d'inspiration.

Pour finir, nous tenons à informer les lecteurs que ce polycopié est une première version; par conséquent des erreurs typographiques (voire même mathématiques) sont susceptibles d'apparaître. Nous espérons qu'ils nous contacteront pour nous les signaler afin que nous puissions les corriger dans les prochaines versions.

BAKIR FARHI

Béjaia, le 29 janvier 2016,

puis

Alger, le 12 juin 2024

Table des matières

1	Formes bilinéaires et produits scalaires réels	1
1.1	Premières définitions et exemples	2
1.2	Le noyau d'une forme bilinéaire symétrique	4
	Exercices	6
2	Représentation matricielle des formes bilinéaires en dimension finie	8
2.1	Matrice associée à une forme bilinéaire	8
2.2	L'équivalent matriciel d'une forme bilinéaire symétrique . .	11
2.3	Calcul pratique du noyau d'une forme bilinéaire symétrique	13
2.4	Formule de changement de base	14
	Exercices	17
3	Formes quadratiques et orthogonalité	19
3.1	Forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique	19
3.2	Reconnaissance rapide d'une forme quadratique en dimension finie	22
3.3	Orthogonalité	25
3.4	Familles et bases orthogonales pour une forme bilinéaire symétrique	27
3.5	L'intérêt d'une base orthogonale	30
3.6	Familles et bases orthonormées	30
	Exercices	32
4	Réduction et classification des formes quadratiques réelles et complexes	36
4.1	Réduction de Gauss des formes quadratiques	36
4.1.1	Description de l'algorithme de Gauss	37

4.2	Une méthode alternative matricielle pour réduire une forme quadratique	41
4.3	Equivalence des formes quadratiques	44
4.3.1	Equivalence des formes quadratiques complexes	46
4.3.2	Equivalence des formes quadratiques réelles	47
	Calcul de la signature d'une forme quadratique réelle par la méthode des déterminants de Sylvester	56
	Exercices	63
5	Espaces euclidiens, espaces préhilbertiens réels et espaces de Hilbert réels	66
5.1	Norme associée à un produit scalaire	66
5.2	Orthogonalité dans un espace préhilbertien	70
5.2.1	Extension de certains théorèmes classiques de géométrie euclidienne	70
	L'écart angulaire non orienté de deux vecteurs d'un espace préhilbertien	71
5.2.2	Construction d'une famille orthonormée d'un espace préhilbertien	73
	L'algorithme de Gram-Schmidt	73
	L'algorithme de Gram-Schmidt	73
	Description de l'algorithme	74
	Exercices	79
6	Projections orthogonales dans un espace préhilbertien réel	85
6.1	Projection sur un sous-espace parallèlement à un autre sous-espace	85
6.2	Projections orthogonales	87
6.3	Distance d'un point par rapport à un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien	89
6.4	Interprétation géométrique de l'algorithme de Gram-Schmidt	95
	Exercices	97
7	Endomorphismes adjoint, autoadjoint, orthogonal et normal d'un espace préhilbertien réel	103
7.1	Adjoint d'un endomorphisme	103
7.2	Endomorphismes autoadjoints	107
7.3	Endomorphismes antisymétriques	111
7.4	Endomorphismes orthogonaux	111
7.5	Endomorphismes normaux	118
	Exercices	121

8	Espaces hermitiens, espaces préhilbertiens complexes et espaces de Hilbert complexes	124
8.1	Introduction	125
8.2	Applications sesquilinéaires	126
8.3	Le noyau d'une forme hermitienne	130
8.4	Représentation matricielle d'une forme sesquilinéaire sur un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie	131
8.4.1	Matrice associée à une forme sesquilinéaire	132
8.4.2	L'équivalent matriciel d'une forme hermitienne sur E	135
8.4.3	Calcul pratique du noyau d'une forme hermitienne	137
8.4.4	Formule de changement de base	137
8.5	Formes quadratiques hermitiennes et orthogonalité	138
8.5.1	Forme quadratique hermitienne associée à une forme hermitienne	139
8.5.2	Reconnaissance rapide d'une forme quadratique hermitienne et détermination rapide de sa forme polaire (en dimension finie)	142
8.5.3	Orthogonalité	143
8.5.4	Réduction de Gauss des formes quadratiques hermitiennes	147
8.5.5	Une méthode alternative matricielle pour réduire une forme quadratique hermitienne	150
8.5.6	Equivalence des formes quadratiques hermitiennes	152
8.5.7	Calcul de la signature d'une forme quadratique hermitienne par la méthode des déterminants de Sylvester	154
8.6	Norme associée à un produit scalaire complexe	156
8.7	Orthogonalité dans un espace préhilbertien complexe	159
8.7.1	Construction d'une base orthonormée pour un espace hermitien	159
8.7.2	Supplémentaire orthogonal et projection orthogonale	160
8.7.3	Distance d'un vecteur par rapport à un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien complexe	162
	Exercices	164
9	Endomorphismes spéciaux d'un espace préhilbertien complexe et théorèmes spectraux	167
9.1	Adjoint d'un endomorphisme	168
9.2	Endomorphismes hermitiens	170
9.3	Endomorphismes antihermitiens	172
9.4	Endomorphismes unitaires	173

9.5	Endomorphismes normaux	176
9.6	Le théorème spectral pour les endomorphismes hermitiens .	177
9.7	Le théorème spectral pour les endomorphismes autoad- jointés d'un espace euclidien	182
9.8	Le théorème spectral pour les endomorphismes normaux . .	184
9.9	Le théorème de trigonalisation de Schur	187
	Exercices	194
	Quelques sujets d'examen des années précédentes	204
	Bibliographie	240

Notations

ssi	L'abrégé de l'expression « si et seulement si ».
$:=$	Egalité par définition qu'on représente aussi parfois par le signe $\stackrel{\text{déf}}{=}$.
$\Re(z)$	La partie réelle d'un nombre complexe z .
$\Im(z)$	La partie imaginaire d'un nombre complexe z .
$\mathbb{K}[X]$	Le \mathbb{K} -espace vectoriel des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} (où \mathbb{K} est un corps commutatif, le plus souvent égale à \mathbb{R} ou \mathbb{C}).
$\mathbb{K}_n[X]$	Le \mathbb{K} -espace vectoriel des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} , ayant un degré $\leq n$ (où \mathbb{K} est un corps commutatif et n est un entier naturel).
$0_{\mathbb{K}}$	L'élément neutre de la première loi d'un corps commutatif \mathbb{K} .
$\mathbf{0}_E$	Le vecteur nul d'un espace vectoriel E .
$\mathbf{0}$ (ou $\mathbf{0}_{\text{End}(E)}$)	L'endomorphisme nul d'un certain espace vectoriel E .
Id_E	L'endomorphisme identité d'un espace vectoriel E .
$(\mathbf{0})$	La matrice nulle d'un certain format.
δ_{ij}	Le symbole de Kronecker (où i et j sont des entiers strictement positifs). On a par définition $\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
I_n	La matrice identité d'ordre n (où n est un entier strictement positif). On a $I_n = (\delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.
$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$	La matrice diagonale (d'ordre n) dont les éléments diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (dans cet ordre, en décroissant).
$(\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 \dots \mathbf{c}_n)$	Matrice obtenue en mettant des vecteurs colonnes donnés $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n$ l'un après l'autre (où n est un entier strictement positif).
$\begin{pmatrix} \ell_1 \\ \hline \ell_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \ell_n \end{pmatrix}$	Matrice obtenue en mettant des vecteurs lignes donnés $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ l'un au dessous de l'autre (où n est un entier strictement positif).
$\text{Vect}(X)$	Le sous-espace vectoriel engendré par une partie X d'un certain espace vectoriel.

$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$	La matrice associée à un endomorphisme ou à une forme bilinéaire ou à une forme sesquilinéaire f d'un espace vectoriel de dimension finie ⁽²⁾ , relativement à une base \mathcal{B} de cet espace.
$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q)$	La matrice associée à une forme quadratique (resp. à une forme quadratique hermitienne) q d'un espace vectoriel (resp. d'un \mathbb{C} -espace vectoriel) de dimension finie, relativement à une base \mathcal{B} de cet espace.
$f _F$	La restriction de f à F (où F est un sous-espace vectoriel d'un grand espace E et f pourrait être une forme bilinéaire symétrique sur E , une forme quadratique sur E , un endomorphisme de E lorsque F est stable par f , etc).
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K} (où n est un entier strictement positif et \mathbb{K} est un corps commutatif).
$\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$	L'ensemble des matrices de format $n \times m$ (i.e., à n lignes et m colonnes) à coefficients dans \mathbb{K} (où n et m sont des entiers strictement positifs et \mathbb{K} est un corps commutatif).
$\text{End}(E)$	l'espace vectoriel constitué des endomorphismes d'un espace vectoriel E .
$\text{GL}(E)$	Le groupe des automorphismes d'un espace vectoriel E .
$\text{GL}_n(\mathbb{K})$	Le groupe linéaire d'ordre n sur \mathbb{K} (où n est un entier strictement positif et \mathbb{K} est un corps commutatif); c'est-à-dire l'ensemble des matrices carrées d'ordre n , à coefficients dans \mathbb{K} , qui sont inversibles .
$O(E)$	Le groupe orthogonal d'un espace euclidien E (voir §7.4).
$O_n(\mathbb{R})$	Le groupe orthogonal de degré n sur \mathbb{R} , où n est un entier strictement positif (voir §7.4).
$U(E)$	Le groupe unitaire d'un espace hermitien E (voir §9.4).
$U_n(\mathbb{C})$	Le groupe unitaire de degré n sur \mathbb{C} , où n est un entier strictement positif (voir §9.4).
\det	Déterminant (d'un endomorphisme en dimension finie ou d'une matrice).
tr	Trace (d'un endomorphisme en dimension finie ou d'une matrice).

(1). Bien entendu, l'espace vectoriel en question doit être complexe lorsqu'il s'agit d'une forme sesquilinéaire.

rg	Le rang (d'une matrice, d'un endomorphisme, d'une forme bilinéaire, d'une forme quadratique, d'une forme sesquilinéaire ou d'une forme quadratique hermitienne) d'un espace vectoriel de dimension finie ⁽³⁾ .
$\text{sgn}(q)$	La signature d'une forme quadratique réelle (resp. hermitienne) q d'un espace vectoriel réel (resp. complexe) de dimension finie.
$\vec{u} \cdot \vec{v}$	Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} d'un plan ou d'un espace euclidien ($\vec{u} \cdot \vec{v} := \ \vec{u}\ \cdot \ \vec{v}\ \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$).
$\text{Ker} f$	Cela pourrait désigner (selon le contexte) ou bien le noyau d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels, ou bien le noyau d'une forme bilinéaire symétrique d'un certain espace vectoriel, ou encore le noyau d'une forme hermitienne d'un certain \mathbb{C} -espace vectoriel.
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$	Produit scalaire de deux vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} d'un certain espace préhilbertien (réel ou complexe).
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\text{us}}$	Produit scalaire usuel de deux vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n (où n est un entier strictement positif).
${}^t A$	La matrice transposée d'une matrice A .
\overline{A}	La matrice obtenue en remplaçant chaque coefficient d'une matrice complexe A par son conjugué.
A^*	La matrice adjointe d'une matrice complexe A . Elle est définie par : $A^* := {}^t \overline{A}$.
f^*	L'adjoint d'un endomorphisme f d'un espace préhilbertien (défini aux chapitres 7 et 9).
P_f (resp. P_A)	Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme f (resp. d'une matrice carrée A) d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie (resp. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \in \mathbb{N}^*$), où \mathbb{K} est l'un des corps commutatifs \mathbb{R} ou \mathbb{C} .
$\sigma_{\mathbb{K}}(f)$ (resp. $\sigma_{\mathbb{K}}(A)$)	Le spectre (dans \mathbb{K}) ⁽⁴⁾ d'un endomorphisme f (resp. d'une matrice carrée A) d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie (resp. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \in \mathbb{N}^*$), où \mathbb{K} est l'un des corps commutatifs \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

(2). Bien entendu, l'espace vectoriel en question doit être complexe lorsqu'il s'agit d'une forme sesquilinéaire ou d'une forme quadratique hermitienne.

(3). C'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de f (resp. de A), appartenant au corps commutatif \mathbb{K} .

$\mathcal{C}^k([a, b], \mathbb{R})$	Le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions réelles de classe \mathcal{C}^k sur l'intervalle $[a, b]$ (où k est un entier positif et a et b sont des nombres réels tels que $a < b$). Le cas particulier $k = 0$ correspond au \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[a, b]$.
A^{\perp_f} (resp. A^{\perp_q})	L'orthogonal d'une partie A d'un espace vectoriel par rapport à une forme bilinéaire symétrique ou à une forme hermitienne ⁽⁴⁾ f (resp. à une forme quadratique ou à une forme quadratique hermitienne ⁽⁴⁾ q) de celui-ci. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur f ou q , on écrit simplement A^\perp au lieu de A^{\perp_f} ou A^{\perp_q} .

(4). Bien entendu, l'espace vectoriel en question doit être complexe lorsqu'il s'agit d'une forme hermitienne ou d'une forme quadratique hermitienne.

Chapitre 1

Formes bilinéaires et produits scalaires réels



غياث الدين جمشيد بن مسعود الكاشي
(1350 م - 1439 م)

La première forme du produit scalaire pouvait être observée dans un livre du mathématicien et astronome arabo-persan Ben Messaoud al-Kashi, publié en 1428. Al-Kashi travailla en tant qu'astronome à Samarcande (en Ouzbékistan) et fut un grand maître de la trigonométrie. L'un de ses travaux remarquables consista en le calcul du nombre $\sin 1^\circ$ avec une grande précision à partir du nombre $\sin 3^\circ$ (connu à l'époque avec une grande précision). Il effectua ce calcul en résolvant une équation de troisième degré par une méthode itérative aujourd'hui connue sous le nom de *méthode du point fixe*. On lui doit également l'invention des fractions décimales, une excellente approximation du nombre π (restée un record pendant plus d'un siècle) et d'importants travaux en Algèbre et en Arithmétique. Il fut incontestablement le plus grand mathématicien de son temps et, avec l'arabo-andalou al-Qalsadi, l'un des derniers grands mathématiciens de la civilisation musulmane.

Sommaire

1.1 Premières définitions et exemples	2
1.2 Le noyau d'une forme bilinéaire symétrique	4
Exercices	6

Pour tout ce qui suit, on fixe \mathbb{K} un corps commutatif et on désigne par

E, F et G des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

1.1 Premières définitions et exemples

Définition 1.I.— On appelle *application bilinéaire* de $E \times F$ dans G toute application $f : E \times F \rightarrow G$ qui est linéaire par rapport à chacune de ses deux variables ; c'est-à-dire qui vérifie pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, tous $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in E$ et tous $\mathbf{y}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in F$:

$$(i) \quad f(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = \lambda_1 f(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \lambda_2 f(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}).$$

$$(ii) \quad f(\mathbf{x}, \lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2) = \lambda_1 f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + \lambda_2 f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2).$$

Dans le cas particulier correspondant à $G = \mathbb{K}$, on dira que f est une *forme bilinéaire* de $E \times F$.

Exemple 1.I.— Soit :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\mapsto \det(\vec{u}, \vec{v}). \end{aligned}$$

— Montrer que f est une forme bilinéaire.

Pour $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on a bien $\det(\vec{u}, \vec{v}) = u_1 v_2 - u_2 v_1$. En utilisant cette expression, la bilinéarité de f est immédiate. ■

Définition 1.II.— Une application bilinéaire $f : E \times E \rightarrow G$ est dite *symétrique* si elle vérifie :

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E : \quad f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

Pour toute la suite de ce polycopié, on s'intéressera uniquement aux formes bilinéaires et en particulier aux formes bilinéaires symétriques.

Exemple 1.II.— Soit :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\mapsto \vec{u} \cdot \vec{v}. \end{aligned}$$

— Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique.

Pour $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on a bien $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$. En utilisant cette expression, la symétrie et la bilinéarité de f sont immédiates. ■

Définition 1.III.— Soit $f : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique. On dit que f est *définie* si :

$$\forall \mathbf{x} \in E : f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0_{\mathbb{K}} \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}_E.$$

Définition 1.IV.— Soit $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique. — On dit que f est *positive* si :

$$\forall \mathbf{x} \in E : f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0.$$

— On dit que f est *définie positive* si f est à la fois *définie* et *positive*; ce qui revient à dire que f vérifie :

$$\forall \mathbf{x} \in E \setminus \{\mathbf{0}_E\} : f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0.$$

Définition 1.V (produit scalaire réel).— On prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On appelle *produit scalaire* sur E toute forme bilinéaire symétrique, définie positive sur E .

Notation.— Un produit scalaire de E est généralement désigné par le symbole \langle , \rangle . On écrit $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ pour désigner le produit scalaire de deux vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} de E .

Exemple 1.III (Le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^n).— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \longmapsto x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

— Montrer que f est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n .

La bilinéarité et la symétrie de f sont immédiates. De plus, pour tout $\mathbf{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a : $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0$ (car c'est une somme de nombres réels, tous positifs) et $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ ssi $x_1 = \cdots = x_n = 0$ (car, une somme de nombres réels positifs est nulle ssi tous ces nombres sont nuls); c'est-à-dire ssi $\mathbf{x} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$. Ainsi f est une forme bilinéaire symétrique définie positive de \mathbb{R}^n ; c'est-à-dire que c'est un produit scalaire de \mathbb{R}^n . ■

Appellation et notation.— Le produit scalaire de \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}^*$) introduit à l'exemple 1.III s'appelle le *produit scalaire usuel* de \mathbb{R}^n et se note $\langle , \rangle_{\text{us}}$. Le produit scalaire usuel de deux vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} de \mathbb{R}^n est ainsi noté $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\text{us}}$.

Exemple 1.IV (En dimension infinie).— Posons $E := \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et soit

$$\begin{aligned} \varphi : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto \int_0^1 f(x)g(x) dx \end{aligned}$$

— Montrer que φ est un produit scalaire sur E .

La bilinéarité et la symétrie de φ sont immédiates. De plus, pour tout $f \in E$, on a : $\varphi(f, f) = \int_0^1 f^2(x) dx \geq 0$ (car c'est une intégrale d'une fonction positive). Enfin, en appliquant la propriété des intégrales de Riemann selon laquelle « l'intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle fermé borné de \mathbb{R} est nulle si et seulement si la fonction en question est nulle sur tout l'intervalle d'intégration », on a pour tout $f \in E$:

$$\begin{aligned} \varphi(f, f) = 0 &\iff \int_0^1 f^2(x) dx = 0 \\ &\iff f^2(x) = 0, \forall x \in [0, 1] \quad (\text{car } f^2 \text{ est continue et positive sur } [0, 1]) \\ &\iff f(x) = 0, \forall x \in [0, 1] \\ &\iff f = \mathbf{0}_E. \end{aligned}$$

Par conséquent, φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E ; autrement dit, φ est un produit scalaire sur E . ■

1.2 Le noyau d'une forme bilinéaire symétrique

Définition 1.VI.— Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E . On appelle *noyau* de f le sous-ensemble de E , noté $\text{Ker } f$ et défini par :

$$\text{Ker } f := \{\mathbf{x} \in E : f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0_{\mathbb{K}}, \forall \mathbf{y} \in E\}.$$

PROPOSITION 1.1.— *Le noyau de toute forme bilinéaire symétrique f sur E est un sous-espace vectoriel de E .*

Démonstration.— Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E . On constate d'abord que $\text{Ker } f$ est non vide car $\mathbf{0}_E \in \text{Ker } f$ (étant donné que f est bilinéaire). Par suite, pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ et tous $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \text{Ker } f$, on a par définition même du noyau de f :

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) = 0_{\mathbb{K}} \quad \text{et} \quad f(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = 0_{\mathbb{K}} \quad (\forall \mathbf{y} \in E).$$

Mais puisque f est bilinéaire, il s'ensuit que pour tout $\mathbf{y} \in E$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) &= \lambda_1 f(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \lambda_2 f(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \\ &= \lambda_1 0_{\mathbb{K}} + \lambda_2 0_{\mathbb{K}} \\ &= 0_{\mathbb{K}}. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \in \text{Ker } f$. Ainsi l'on conclut que toute combinaison linéaire de deux vecteurs de $\text{Ker } f$ reste dans $\text{Ker } f$; d'où $\text{Ker } f$ est bien un sous-espace vectoriel de E . ■

Remarque 1.I.— On pourra redémontrer la proposition 1.1 d'une autre façon en introduisant les formes linéaires f_y ($y \in E$), définies par :

$$\begin{aligned} f_y : E &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto f(x, y) \end{aligned} .$$

On a alors immédiatement :

$$\text{Ker } f = \bigcap_{y \in E} \text{Ker } f_y.$$

Comme les ensembles $\text{Ker } f_y$ ($y \in E$) sont tous des sous-espaces vectoriels de E (en tant que noyaux de formes linéaires) alors leur intersection $\text{Ker } f$ l'est également. CQFD.

Définition 1.VII.— Une forme bilinéaire symétrique f de E est dite *non dégénérée* si $\text{Ker } f = \{0_E\}$.

Exemple 1.V.— Montrer que toute forme bilinéaire symétrique définie de E est non dégénérée. En particulier, tout produit scalaire réel de E (lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.

Soit f une forme bilinéaire symétrique définie de E . Pour tout $x \in \text{Ker } f$, on a par définition même $f(x, y) = 0, \forall y \in E$. En prenant en particulier $y = x$, on obtient $f(x, x) = 0$; ce qui entraîne (puisque f est définie) que $x = 0_E$. Ce raisonnement montre que l'on a $\text{Ker } f \subset \{0_E\}$. L'inclusion inverse étant triviale (puisque $\text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel de E), d'où $\text{Ker } f = \{0_E\}$ et f est bien non dégénérée. ■



Exercices

Exercice 1.1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) := xx' + 4xy' + 4x'y + 16yy'.$$

1. Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique positive sur \mathbb{R}^2 .
2. f est-elle définie positive ?

Exercice 1.2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) := xx' + yy' + zz' + \frac{1}{2}(xy' + x'y) + \frac{1}{2}(xz' + x'z) + \frac{1}{2}(yz' + y'z).$$

— Montrer que f est un produit scalaire sur \mathbb{R}^3 .

Exercice 1.3. Soit $\langle , \rangle : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\langle P, Q \rangle := \int_0^1 P(x)Q(x) dx \quad (\forall P, Q \in \mathbb{R}[x]).$$

— Montrer que \langle , \rangle est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$.

Exercice 1.4. Posons $E := \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et soit $\langle , \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f'(x)g'(x) dx + f(0)g(0) \quad (\forall f, g \in E).$$

— Montrer que \langle , \rangle est un produit scalaire sur E .

Exercice 1.5. Posons $E := \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\varphi(f, g) := \int_0^1 f(x)g(x) \cos(\pi x) dx \quad (\forall f, g \in E).$$

1. Montrer rapidement que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E .

2. Montrer que φ n'est pas positive.
3. Montrer que φ est non dégénérée.

Exercice 1.6. Etant donnés n et m deux entiers strictement positifs, montrer que le produit scalaire usuel de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ (où $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est naturellement identifié à $\mathbb{R}^{n \times m}$) peut être défini par la formule matricielle pratique suivante :

$$\langle A, B \rangle_{\text{us}} = \text{tr}({}^t A B) \quad (\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})).$$

Exercice 1.7. Soient n un entier strictement positif et E le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles carrées d'ordre n . Considérons l'application

$$\begin{aligned} f : E^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\longmapsto n \text{tr}(AB) - \text{tr}(A)\text{tr}(B) \end{aligned}$$

1. Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique sur E .
2. Montrer que f est dégénérée.
3. Désignons par E_0 le sous-espace vectoriel de E constitué des matrices de trace nulle et par f_0 la restriction de f à E_0 . Montrer que f_0 est non dégénérée.



Chapitre 2

Représentation matricielle des formes bilinéaires en dimension finie

Sommaire

2.1	Matrice associée à une forme bilinéaire	8
2.2	L'équivalent matriciel d'une forme bilinéaire symétrique	11
2.3	Calcul pratique du noyau d'une forme bilinéaire symétrique	13
2.4	Formule de changement de base	14
	Exercices	17

Pour tout ce qui suit, on fixe un corps commutatif \mathbb{K} et un \mathbb{K} -espace vectoriel (non nul) E de dimension finie, notée n ($n \in \mathbb{N}^*$).

2.1 Matrice associée à une forme bilinéaire

Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base de E . On considère f une forme bilinéaire sur E . Pour tout couple (\mathbf{x}, \mathbf{y}) de vecteurs de E , tels que

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{e}_i$$

(avec $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{K}$), on a (en vertu de la bilinéarité de f) :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{e}_j\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n x_i f \left(\mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{e}_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).
\end{aligned}$$

D'où la formule :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) x_i y_j \quad (2.1)$$

Cette dernière formule montre que la forme bilinéaire f est entièrement déterminée par la donnée des nombres $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ ($1 \leq i, j \leq n$). D'où l'idée de représenter f par ce paquet de nombres :

Définition 2.I.— On définit la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ de E , que l'on note $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$, par :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) := \left(f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Exemple 2.I.— Montrer que la matrice associée au produit scalaire usuel de \mathbb{R}^n relativement à la base canonique de \mathbb{R}^n est la matrice identité d'ordre n .

En désignant par $\mathcal{C} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n , on a clairement $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle_{\text{us}} = \delta_{ij}$ ($\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$). La matrice associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}}$ relativement à \mathcal{C} est donc égale à $(\delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = I_n$. ■

Exemple 2.II.— Soit f la forme bilinéaire sur \mathbb{R}^2 , définie par :

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\
(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\mapsto \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) .
\end{aligned}$$

— Déterminer la matrice associée à f relativement à la base canonique de \mathbb{R}^2 .

En désignant par $\mathcal{C} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ la base canonique de \mathbb{R}^2 , on a bien : $\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 0$, $\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$, $\det(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = -1$ et $\det(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 0$. La matrice associée à f relativement à \mathcal{C} est donc $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. ■

La proposition suivante établit une formule matricielle exprimant $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$) en fonction des coordonnées des vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} relativement à une base fixée de E et de la matrice associée à f relativement à la même base. En fait, cette formule n'est autre qu'une traduction matricielle de la formule (2.1).

PROPOSITION 2.1.— Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base de E et soient f une forme bilinéaire sur E et A la matrice qui représente f relativement à \mathcal{B} . Alors, pour

tous vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, représentés respectivement par les coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ de \mathbb{K}^n relativement à la base \mathcal{B} de E , on a :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^t XAY. \quad (2.2)$$

Démonstration.— Soient \mathbf{x} et \mathbf{y} deux vecteurs de E et soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ leurs coordonnées respectives relativement à la base \mathcal{B} . On a :

$$\begin{aligned} {}^t XAY &= (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & \dots & f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) & \dots & f(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_1)x_i, \dots, \sum_{i=1}^n f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_n)x_i \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)x_i \right) y_j \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)x_i y_j \\ &= f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (\text{en vertu de (2.1)}). \end{aligned}$$

La proposition est démontrée. ■

Bien qu'il est simple et immédiat, le corollaire suivant est souvent utile.

COROLLAIRE 2.2.— Soient \mathbf{x} et \mathbf{y} deux vecteurs de \mathbb{R}^n dont les coordonnées respectives relativement à la base canonique de \mathbb{R}^n sont notées X et Y . Alors, le produit scalaire usuel de \mathbf{x} et \mathbf{y} est donné par la formule matricielle :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\text{us}} = {}^tXY.$$

Démonstration.— D'après l'exemple 2.I, la matrice associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}}$ relativement à la base canonique de \mathbb{R}^n est I_n . En utilisant la proposition 2.1, on a donc :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\text{us}} = {}^tX I_n Y = {}^tXY.$$

Le corollaire est démontré. ■

Exemple 2.III.— Déterminer l'expression de la forme bilinéaire de \mathbb{R}^3 dont la matrice associée relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Désignons par f la forme bilinéaire de \mathbb{R}^3 dont A est la matrice associée relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 . En utilisant la formule (2.1), on a pour tous $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{y} =$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 :$$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} a_{ij} x_i y_j = x_1 y_1 + 3x_1 y_2 + 4x_1 y_3 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - 2x_3 y_1 + x_3 y_2 + x_3 y_3. \quad \blacksquare$$

Remarque 2.I.— Les formules équivalentes (2.1) et (2.2) montrent qu'on a une correspondance bijective entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et l'ensemble des formes bilinéaires sur E . Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a donc :

$$\boxed{(\forall X, Y \in \mathbb{K}^n : {}^tXAY = {}^tXBY) \iff A = B}.$$

2.2 L'équivalent matriciel d'une forme bilinéaire symétrique

La proposition suivante établit l'équivalent matriciel d'une forme bilinéaire symétrique sur E .

PROPOSITION 2.3.— Soit \mathcal{B} une base de E et soient f une forme bilinéaire sur E et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice qui représente f relativement à \mathcal{B} . Alors la forme bilinéaire f est symétrique si et seulement si la matrice A est symétrique⁽¹⁾.

Démonstration.— Dans cette démonstration, on note par $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les coordonnées respectives de deux vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} de E , relativement à la base \mathcal{B} . On a :

$$\begin{aligned} f \text{ est symétrique} &\iff \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E : f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \\ &\iff \forall X, Y \in \mathbb{K}^n : {}^tXAY = {}^tYAX \quad (\text{en vertu de la proposition 2.1}). \end{aligned}$$

Or, comme ${}^tYAX \in \mathbb{K}$ (pour $X, Y \in \mathbb{K}^n$), on a⁽²⁾ :

$${}^tYAX = {}^t({}^tYAX) = {}^tX^tAY.$$

D'où :

$$\begin{aligned} f \text{ est symétrique} &\iff \forall X, Y \in \mathbb{K}^n : {}^tXAY = {}^tX^tAY \\ &\iff A = {}^tA \quad (\text{en vertu de la remarque 2.I}) \\ &\iff A \text{ est symétrique.} \end{aligned}$$

Ce qui achève cette démonstration. ■

Remarque 2.II.— La proposition 2.3 montre qu'on a une correspondance bijective entre l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E et l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre n , à coefficients dans \mathbb{K} . Cette correspondance constitue en réalité un isomorphisme d'espaces vectoriels ; ce qui permet d'en déduire que le \mathbb{K} -espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur E est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Définitions 2.II.— Soit A une matrice carrée symétrique d'ordre n , à coefficients dans \mathbb{K} .

— On dit que A est *définie* si la forme bilinéaire symétrique qu'elle représente (relativement à une certaine base de \mathbb{K}^n) est définie ; c'est-à-dire si :

$$\forall X \in \mathbb{K}^n : {}^tXAX = 0_{\mathbb{K}} \implies X = \mathbf{0}_{\mathbb{K}^n}.$$

(1). Rappelons qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite symétrique si elle vérifie : ${}^tA = A$.

(2). En fait, on identifie une matrice carrée d'ordre 1 à son unique coefficient.

- Prenons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On dit que A est *positive* si la forme bilinéaire symétrique qu'elle représente (relativement à une certaine base de \mathbb{R}^n) est positive; c'est-à-dire si :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n : {}^t X A X \geq 0.$$

- Prenons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On dit que A est *définie positive* si la forme bilinéaire symétrique qu'elle représente (relativement à une certaine base de \mathbb{R}^n) est définie positive; c'est-à-dire si :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\} : {}^t X A X > 0.$$

2.3 Calcul pratique du noyau d'une forme bilinéaire symétrique

Nous verrons dans la proposition qui suit que la représentation matricielle d'une forme bilinéaire symétrique de E permet d'en déduire immédiatement son noyau tout comme si c'était un endomorphisme de E .

PROPOSITION 2.4.— Soient f une forme bilinéaire symétrique de E et A la matrice qui la représente relativement à une certaine base \mathcal{B} de E . Soit aussi u un endomorphisme de E dont A est la matrice associée relativement à \mathcal{B} . Alors, on a :

$$\text{Ker } f = \text{Ker } u.$$

Démonstration.— Posons $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$. Tout au long de cette démonstration, on note par $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les coordonnées respectives de deux vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} de E . Nous introduisons φ la forme bilinéaire symétrique de E dont la matrice associée relativement à \mathcal{B} est I_n . En vertu de (2.1), on a donc pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \delta_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Montrons d'abord que φ est non dégénérée. Tout vecteur \mathbf{x} de $\text{Ker } \varphi$ vérifie $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Mais comme $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) = x_i$, on obtient que $x_i = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, c'est-à-dire que $X = 0_{\mathbb{K}^n}$; ce qui équivaut à $\mathbf{x} = 0_E$. On vient donc d'établir que $\text{Ker } \varphi \subset \{0_E\}$. L'inclusion inverse étant triviale

puisque $\text{Ker } \varphi$ constitue un sous-espace vectoriel de E . D'où l'on conclut que $\text{Ker } \varphi = \{\mathbf{0}_E\}$ et φ est ainsi non dégénérée.

Maintenant, en utilisant la formule (2.2) de la proposition 2.1, on a pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^t XAY$$

et

$$\varphi(\mathbf{x}, u(\mathbf{y})) = {}^t X I_n (AY) = {}^t XAY$$

(car le vecteur $u(\mathbf{y})$ est représenté dans \mathcal{B} par les coordonnées AY , étant donné que l'endomorphisme u de E est représenté par la matrice A relativement à \mathcal{B}). On a donc visiblement pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}, u(\mathbf{y})). \quad (2.3)$$

En se servant enfin de cette précieuse formule (2.3), on a :

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{\mathbf{y} \in E : f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0_{\mathbb{K}}, \forall \mathbf{x} \in E\} \\ &= \{\mathbf{y} \in E : \varphi(\mathbf{x}, u(\mathbf{y})) = 0_{\mathbb{K}}, \forall \mathbf{x} \in E\} \\ &= \{\mathbf{y} \in E : u(\mathbf{y}) \in \text{Ker } \varphi\} \\ &= \{\mathbf{y} \in E : u(\mathbf{y}) = \mathbf{0}_E\} \quad (\text{car } \varphi \text{ est non dégénérée}) \\ &= \text{Ker } u. \end{aligned}$$

Ce qui achève cette démonstration. ■

COROLLAIRE 2.5.— Soient f une forme bilinéaire symétrique de E et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice associée à f relativement à une certaine base \mathcal{B} de E . Alors f est non dégénérée si et seulement si A est inversible ; c'est-à-dire si et seulement si $\det A \neq 0$.

Démonstration.— C'est une conséquence immédiate de la définition de la non-dégénérescence d'une forme bilinéaire symétrique de E et de la proposition 2.4. ■

2.4 Formule de changement de base

Dans ce qui suit, on verra comment la représentation matricielle d'une forme bilinéaire de E change lorsqu'on effectue un changement de base de E .

PROPOSITION 2.6.— Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E et P la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' . Soit aussi f une forme bilinéaire sur E , représentée dans la base \mathcal{B} par une matrice A et dans la base \mathcal{B}' par une matrice A' . Alors, on a :

$$A' = {}^tPAP.$$

Démonstration.— Soient \mathbf{x} et \mathbf{y} deux vecteurs quelconques de E et soient X et Y leurs coordonnées respectives dans la base \mathcal{B} et X' et Y' leurs coordonnées respectives dans la base \mathcal{B}' . On a donc $X = PX'$ et $Y = PY'$. Par suite, d'après la proposition 2.1, on a d'une part :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^tXAY = {}^t(PX')A(PY') = {}^tX'{}^tPAPY' = {}^tX'({}^tPAP)Y' \quad (2.4)$$

et d'autre part :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^tX'A'Y'. \quad (2.5)$$

La comparaison entre (2.4) et (2.5) donne :

$${}^tX'A'Y' = {}^tX'({}^tPAP)Y'.$$

Comme cette dernière formule est vraie pour tous $X', Y' \in \mathbb{K}^n$, il s'ensuit (en vertu de la remarque 2.I) que l'on a :

$$A' = {}^tPAP.$$

Ce qui achève cette démonstration. ■

La formule de changement de bases établie par la proposition 2.6 nous amène à introduire une relation d'équivalence assez importante sur l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Cette relation met simplement dans une même classe toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui représentent une même forme bilinéaire sur \mathbb{K}^n relativement aux différentes bases de \mathbb{K}^n .

Définition 2.III.— Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dite *congruentes* si elles représentent une même forme bilinéaire de \mathbb{K}^n relativement à deux bases (différentes ou identiques) de \mathbb{K}^n .

En tenant compte de la proposition 2.6, on peut reformuler cette définition (matriciellement) comme ceci :

Définition 2.IV (équivalente à la précédente).— Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dite *congruentes* s'il existe une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que l'on ait :

$$B = {}^tPAP.$$

Remarque 2.III.— Comme la multiplication d’une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par une matrice de $GL_n(\mathbb{K})$ (à droite ou à gauche) ne fait pas changer le rang de A , on déduit de la définition 2.IV que deux matrices congruentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont forcément le même rang. Ce qui autorise (et rend légitime) la définition suivante.

Définition 2.V.— Soit f une forme bilinéaire sur E . On définit le *rang* de f , que l’on note $\text{rg}(f)$, comme étant le rang d’une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui représente f relativement à une certaine base de E .

Exemple 2.IV.— Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E . Montrer la formule :

$$\dim \text{Ker } f + \text{rg}(f) = n.$$

— En déduire que f est non dégénérée si et seulement si $\text{rg}(f) = n$.

Fixons une base \mathcal{B} de E et soit A la matrice associée à f relativement à \mathcal{B} . Introduisons u l’endomorphisme de E dont A est la matrice associée relativement à \mathcal{B} . D’après le théorème du rang, on a :

$$\dim \text{Ker } u + \dim \text{Im } u = \dim E = n.$$

Mais comme $\text{Ker } u = \text{Ker } f$ (en vertu de la proposition 2.4) et $\dim \text{Im } u = \text{rg}(A) = \text{rg}(f)$ (car A est une représentation matricielle de l’endomorphisme u et de la forme bilinéaire f en même temps), il en résulte que :

$$\dim \text{Ker } f + \text{rg}(f) = n,$$

comme il fallait le prouver.

— Maintenant, f est non dégénérée veut dire (par définition même) que $\text{Ker } f = \{0_E\}$; ce qui équivaut à dire que $\dim \text{Ker } f = 0$. La formule précédente permet ainsi de conclure que f est non dégénérée ssi $\text{rg}(f) = n$. ■



Exercices

Exercice 2.1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1 - 4x_1 y_2 - 4x_2 y_1 + 10x_2 y_2 \quad \left(\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\right).$$

1. Vérifier rapidement que f est une forme bilinéaire symétrique sur \mathbb{R}^2 .
2. Ecrire la matrice A représentant f relativement à la base canonique du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^2 .
3. Déterminer de deux façons différentes la matrice B représentant f relativement à la nouvelle base $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ de \mathbb{R}^2 , avec :

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) En utilisant la définition d'une matrice associée à une forme bilinéaire relativement à une base donnée.
- (b) En utilisant la formule de changement de base.
4. La forme bilinéaire symétrique f est-elle positive ?

Exercice 2.2. Soit $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1) \quad (\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X]).$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Ecrire la matrice associée à φ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2.3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) := 2x_1 y_1 - 4x_2 y_2 - 2x_3 y_3 - (x_1 y_2 + x_2 y_1) + 3(x_2 y_3 + x_3 y_2).$$

1. Vérifier rapidement que f est une forme bilinéaire symétrique sur le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer $\text{Ker } f$.

Exercice 2.4. Soient n un entier strictement positif et A une matrice réelle symétrique de d'ordre n .

— Montrer que si la matrice A est définie positive alors sa matrice inverse A^{-1} est aussi (symétrique) définie positive.

Exercice 2.5. Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et \langle , \rangle_1 et \langle , \rangle_2 deux produits scalaires sur E .

— Montrer qu'il existe un unique automorphisme u de E pour lequel on ait :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_2 = \langle u(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle_1 \quad (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E).$$



Chapitre 3

Formes quadratiques et orthogonalité

Sommaire

3.1	Forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique	19
3.2	Reconnaissance rapide d'une forme quadratique en dimension finie	22
3.3	Orthogonalité	25
3.4	Familles et bases orthogonales pour une forme bilinéaire symétrique	27
3.5	L'intérêt d'une base orthogonale	30
3.6	Familles et bases orthonormées	30
	Exercices	32

Pour tout ce qui suit, on fixe \mathbb{K} un corps commutatif, de caractéristique ⁽¹⁾ différente de 2, et E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

3.1 Forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique

Définition 3.I.— Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E . On appelle *forme quadratique* associée à f l'application :

(1). Cela signifie (grossièrement parlant) que l'élément $2_{\mathbb{K}} := 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}}$ est inversible dans \mathbb{K} . La division sur 2 (qui s'impose dans certaines formules) est donc possible dans \mathbb{K} . De toutes les façons, les corps qui nous intéressent à ce niveau sont \mathbb{R} et \mathbb{C} (tous les deux étant de caractéristique nulle, bien différente de 2).

$$\begin{aligned} q : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\mapsto q(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

Exemple 3.I.— La forme quadratique associée au produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}}$ de \mathbb{R}^n , avec $n \in \mathbb{N}^*$ (voir l'exemple 1.III) est donnée par :

$$\begin{aligned} q : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\mapsto q(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\text{us}} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \end{aligned}$$

On reconnaît le carré de la norme euclidienne de \mathbb{R}^n (notée $\|\cdot\|_2$). Nous généralisons ce phénomène plus loin en montrant que la forme quadratique associée à n'importe quel produit scalaire (réel) de E est le carré d'une norme (assez particulière) de E .

Définition 3.II.— On appelle *forme quadratique* de E toute application $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ tel qu'il existe une forme bilinéaire symétrique f sur E pour laquelle on ait :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) \quad (\forall \mathbf{x} \in E).$$

Par définition même, à toute forme bilinéaire symétrique de E est associée une unique forme quadratique sur E , mais ce qui n'est pas tout à fait clair c'est l'inverse. On se demande explicitement si, étant donnée une forme quadratique q sur E , celle-ci est associée à une unique forme bilinéaire symétrique f de E . Et, dans l'affirmative, comment déterminer f ? Ceci est l'objet de la proposition suivante :

PROPOSITION 3.1.— *Toute forme quadratique q sur E est associée à une unique forme bilinéaire symétrique f sur E , qui est donnée par la formule :*

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} (q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y})) \quad (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E). \quad (3.1)$$

Démonstration.— Soit q une forme quadratique sur E et f une forme bilinéaire symétrique sur E dont q est la forme quadratique associée. En utilisant la bilinéarité et la symétrie de f , on a pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$:

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) \\ &= f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \\ &= q(\mathbf{x}) + q(\mathbf{y}) + 2f(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

D'où l'on tire :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} (q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y})),$$

ce qui est la formule requise pour f , confirmant en particulier son unicité. La proposition est démontrée. ■

On vient d'établir ainsi une correspondance bijective entre l'ensemble des formes bilinéaires symétriques de E et l'ensemble des formes quadratiques de E .

Définition 3.III.— Soit q une forme quadratique de E . On appelle *forme polaire* associée à q , l'unique forme bilinéaire symétrique f dont q est la forme quadratique associée. En vertu de la proposition 3.1, on peut définir f par :

$$\begin{aligned} f : E^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\longmapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{1}{2} (q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y})) . \end{aligned}$$

Remarque 3.I.— Il est à noter que d'autres formules exprimant la forme polaire f associée à une forme quadratique donnée q de E , en fonction de q , existent. Parmi ces formules, la suivante :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4} (q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(\mathbf{x} - \mathbf{y})).$$

La preuve de cette formule est laissée au lecteur.

Appellation 3.I.— Etant données q une forme quadratique de E et f sa forme polaire, toute identité exprimant f en fonction de q s'appelle *identité de polarisation*.

Définitions 3.IV.— Soit q une forme quadratique sur E .

1. Supposons que E est de dimension finie. On définit *le rang* de q , que l'on note $\text{rg}(q)$, comme étant le rang de sa forme polaire.
2. On dit que q est *non dégénérée* si sa forme polaire est non dégénérée.
3. On dit que q est *définie* si sa forme polaire est définie; c'est-à-dire si elle vérifie la propriété :

$$\forall \mathbf{x} \in E : q(\mathbf{x}) = 0 \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}_E.$$

4. On suppose pour ce qui suit que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

— On dit que q est *positive* si sa forme polaire est positive; c'est-à-dire si elle vérifie la propriété :

$$\forall \mathbf{x} \in E : q(\mathbf{x}) \geq 0.$$

- On dit que q est *définie positive* si elle est à la fois définie et positive; c'est-à-dire si elle vérifie la propriété :

$$\forall \mathbf{x} \in E \setminus \{\mathbf{0}_E\} : q(\mathbf{x}) > 0.$$

- On dit que q est *négative* si elle vérifie la propriété :

$$\forall \mathbf{x} \in E : q(\mathbf{x}) \leq 0.$$

- On dit que q est *définie négative* si elle est à la fois définie et négative; c'est-à-dire si elle vérifie la propriété :

$$\forall \mathbf{x} \in E \setminus \{\mathbf{0}_E\} : q(\mathbf{x}) < 0.$$

Remarque 3.II.— On montrera plus loin (voir le corollaire 4.6) que lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une forme quadratique définie de E est nécessairement ou bien définie positive ou bien définie négative. Cela résulte en fait de la continuité d'une forme quadratique réelle dans un certain sens.

3.2 Reconnaissance rapide d'une forme quadratique et détermination rapide de sa forme polaire (en dimension finie)

La reconnaissance rapide de l'expression d'une forme quadratique d'un espace vectoriel de dimension finie ainsi que la détermination immédiate de sa forme polaire sont établies dans la proposition suivante :

PROPOSITION 3.2.— *Supposons que E est de dimension finie n (avec $n \geq 1$) et soient $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base de E et $q : E \rightarrow \mathbb{K}$ une application. Alors q est une forme quadratique sur E si et seulement si l'expression*

$$q(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) \quad (x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K})$$

est un polynôme homogène de second degré, à coefficients dans \mathbb{K} , en x_1, x_2, \dots, x_n ⁽²⁾, c'est-à-dire de la forme :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j,$$

(2). Un polynôme homogène de second degré, à coefficients dans \mathbb{K} , en n variables x_1, \dots, x_n est un polynôme $P \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, constitué de monômes qui sont tous de même degré égale à 2; il est donc forcément de la forme $P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j$, avec les a_{ij} ($1 \leq i \leq j \leq n$) sont des éléments de \mathbb{K} . Un tel polynôme vérifie la formule d'Euler : $P(kx_1, \dots, kx_n) = k^2 P(x_1, \dots, x_n)$ ($\forall k, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$).

où les a_{ij} ($1 \leq i \leq j \leq n$) sont des éléments de \mathbb{K} .

— De plus, si tel est le cas alors la forme polaire associée à q est donnée par :

$$f : E^2 \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longmapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i y_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} (x_i y_j + x_j y_i),$$

où l'on a désigné par x_1, x_2, \dots, x_n et y_1, y_2, \dots, y_n les coordonnées respectives de deux vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} de E relativement à \mathcal{B} .

Démonstration.— Durant cette démonstration, on désigne par x_1, x_2, \dots, x_n et y_1, y_2, \dots, y_n les coordonnées respectives de deux vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} de E .

• (\Rightarrow) Supposons que q est une forme quadratique sur E et soit f sa forme polaire. Alors pour tous $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, on a en vertu de la bilinéarité et de la symétrie de f :

$$\begin{aligned} q(x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n) &= f(x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n, x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^n f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) x_i x_j, \end{aligned}$$

qui est visiblement un polynôme homogène de second degré, à coefficients dans \mathbb{K} , en x_1, x_2, \dots, x_n .

• (\Leftarrow) Inversement, supposons que $q(x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n)$ ($x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}$) est un polynôme homogène de second degré, à coefficients dans \mathbb{K} , en x_1, x_2, \dots, x_n ; que l'on peut donc écrire sous la forme :

$$q(x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

(avec $a_{ij} \in \mathbb{K}$ pour tous $1 \leq i \leq j \leq n$). En définissant alors $f : E^2 \rightarrow \mathbb{K}$ par :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i y_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} (x_i y_j + x_j y_i) \quad (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E),$$

on vérifie immédiatement que :

- f est une forme bilinéaire symétrique sur E ,

- $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = q(\mathbf{x})$ ($\forall \mathbf{x} \in E$).

Par conséquent, q est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique f ; autrement dit, q est une forme quadratique sur E et f est sa forme polaire. Ce qui complète la preuve de la proposition. ■

Définition 3.V.— Soient \mathcal{B} une base de E et q une forme quadratique de E . On définit la matrice associée à q relativement à \mathcal{B} , que l'on note $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q)$, comme étant la matrice associée à la forme polaire de q relativement à \mathcal{B} . Faisons remarquer que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q)$ est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 3.II.— Soit

$$q : \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_3 .$$

1. Montrer que q est une forme quadratique sur \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer la forme polaire associée à q puis la matrice associée à q relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Durant cette solution, on note par \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{R}^3 et on désigne par ${}^t(x_1, x_2, x_3)$ et ${}^t(y_1, y_2, y_3)$ les coordonnées respectives de deux vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} de \mathbb{R}^3 .

1. Comme $q(\mathbf{x})$ est visiblement un polynôme homogène de second degré (à coefficients réels) alors q est bien une forme quadratique sur \mathbb{R}^3 (en vertu de la proposition 3.2).
2. Soit f la forme polaire de q . Pour déterminer l'expression de f , on peut se servir de la formule (3.1) :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} (q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y})) \quad (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3).$$

En suivant cependant cette démarche, les calculs à effectuer sont longs. En se servant plutôt de la proposition 3.2 (étant donné qu'on est en dimension finie), la détermination de f est beaucoup plus immédiate. En effet, l'expression de $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$) s'obtient simplement en échangeant dans l'expression de $q(\mathbf{x})$ chaque x_i^2 ($1 \leq i \leq 3$) par $x_i y_i$ et chaque $x_i x_j$ ($1 \leq i < j \leq 3$) par $\frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i)$. On obtient alors pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_1) + \frac{1}{2} (x_1 y_3 + x_3 y_1) + (x_2 y_3 + x_3 y_2) .$$

— La matrice associée à q relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 est, par définition, la matrice associée à f relativement à la même base. En posant

$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(q) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$, on a (d'après la formule (2.1) et la définition des coefficients a_{ij}) :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} a_{ij} x_i y_j.$$

Il suffit d'identifier cette formule avec la précédente pour déduire les valeurs des coefficients a_{ij} de la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(q)$. On obtient au final :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(q) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Remarque 3.III.— Pour une forme quadratique réelle q d'expression $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ relativement à une certaine base \mathcal{B} de E (où P est un polynôme homogène de second degré, à coefficients réels), on vérifie immédiatement que la matrice associée à q relativement à \mathcal{B} est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q) = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

La matrice $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ s'appelle *la matrice hessienne* de P ; elle est définie plus généralement pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles secondes. Si particulièrement f est de classe \mathcal{C}^2 sur un certain ouvert de \mathbb{R}^n alors sa matrice hessienne (sur cet ouvert) est symétrique (en vertu d'un théorème de Schwarz).

3.3 Orthogonalité

Dans cette section, on fixe une forme bilinéaire symétrique f de E et on note q la forme quadratique associée à f .

Définitions 3.VI.—

- On dit que deux vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} de E sont *orthogonaux par rapport à f* (ou *par rapport à q*) et on écrit $\mathbf{x} \perp_f \mathbf{y}$ (ou $\mathbf{x} \perp_q \mathbf{y}$) si :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Cette même propriété s'exprime aussi en disant que \mathbf{x} et \mathbf{y} sont *f -orthogonaux* (ou *q -orthogonaux*). S'il n'y a pas d'ambiguïté sur f (et q), on dit simplement que \mathbf{x} et \mathbf{y} sont *orthogonaux* et on écrit $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

- Lorsqu'un vecteur \mathbf{x} de E est orthogonal à lui même, on dit qu'il est *isotrope*. L'ensemble de tous les vecteurs isotropes de E s'appelle *le cône isotrope* de E .
- Etant donnée une partie A de E , on appelle *l'orthogonal* de A par rapport à f (ou par rapport à q) le sous-ensemble de E , noté $A^{\perp f}$ (ou $A^{\perp q}$), et défini par :

$$A^{\perp f} := \{\mathbf{x} \in E : f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0_{\mathbb{K}}, \forall \mathbf{y} \in A\}.$$

Autrement dit, $A^{\perp f}$ est l'ensemble des vecteurs de E qui sont f -orthogonaux à tous les vecteurs de A .

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur f (et q), on écrit A^{\perp} au lieu de $A^{\perp f}$ (ou $A^{\perp q}$).

Cas particuliers : On a :

$$\begin{aligned} \emptyset^{\perp f} &= \{\mathbf{0}_E\}^{\perp f} = E \\ E^{\perp f} &= \text{Ker } f. \end{aligned}$$

Dans la proposition qui suit, on établira quelques propriétés simples mais importantes sur l'orthogonal d'une partie d'un espace vectoriel.

PROPOSITION 3.3.—

1. Pour toute partie A de E , l'ensemble A^{\perp} est un sous-espace vectoriel de E .
2. Pour tous $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on a :

$$A \subset B \implies B^{\perp} \subset A^{\perp}.$$

3. Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on a :

$$A^{\perp} = \text{Vect}(A)^{\perp}.$$

4. Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on a :

$$A \subset A^{\perp\perp}$$

(où $A^{\perp\perp} := (A^{\perp})^{\perp}$).

Démonstration.—

1. Soit A une partie de E et montrons que A^{\perp} est un sous-espace vectoriel de E . Il s'agit de montrer que :

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in A^{\perp}, \forall \alpha, \alpha' \in \mathbb{K} : \alpha \mathbf{x} + \alpha' \mathbf{x}' \in A^{\perp}.$$

Soient $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in A^\perp$ et $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$ et montrons que $(\alpha\mathbf{x} + \alpha'\mathbf{x}') \in A^\perp$. Pour tout $\mathbf{y} \in A$, en utilisant le fait que f est bilinéaire puis le fait que $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = 0_{\mathbb{K}}$ (car $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in A^\perp$), on a :

$$f(\alpha\mathbf{x} + \alpha'\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha' f(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \alpha \cdot 0_{\mathbb{K}} + \alpha' \cdot 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Ce qui montre que $(\alpha\mathbf{x} + \alpha'\mathbf{x}') \in A^\perp$, comme on devait le prouver. Le sous-ensemble A^\perp de E est donc bien un sous-espace vectoriel de E .

2. Soient A et B deux parties de E . Supposons que $A \subset B$ et montrons que $B^\perp \subset A^\perp$. Pour tout $\mathbf{x} \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in B^\perp &\iff \forall \mathbf{y} \in B : f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0_{\mathbb{K}} \\ &\implies \forall \mathbf{y} \in A : f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0_{\mathbb{K}} \quad (\text{puisque par hypothèse } A \subset B) \\ &\iff \mathbf{x} \in A^\perp. \end{aligned}$$

D'où l'implication $\ll \forall \mathbf{x} \in E : \mathbf{x} \in B^\perp \implies \mathbf{x} \in A^\perp \gg$, équivalente à l'inclusion requise $B^\perp \subset A^\perp$.

3. Soit A une partie de E et montrons que $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$. L'inclusion triviale $A \subset \text{Vect}(A)$ entraîne (en vertu de la propriété du point 2. de la proposition) que $\text{Vect}(A)^\perp \subset A^\perp$. Il ne reste donc qu'à montrer l'inclusion dans l'autre sens, qui est : $A^\perp \subset \text{Vect}(A)^\perp$. Pour ce faire, soit $\mathbf{x} \in A^\perp$ et montrons que $\mathbf{x} \in \text{Vect}(A)^\perp$. Le fait $\ll \mathbf{x} \in A^\perp \gg$ signifie que \mathbf{x} est f -orthogonal à tous les vecteurs de A . Mais ceci entraîne (en vertu de la bilinéarité de f) que \mathbf{x} est aussi f -orthogonal à toutes les combinaisons linéaires (à coefficients dans \mathbb{K}) de vecteurs de A ; c'est-à-dire à tous les vecteurs de $\text{Vect}(A)$. Ce qui prouve que $\mathbf{x} \in \text{Vect}(A)^\perp$. L'inclusion $A^\perp \subset \text{Vect}(A)^\perp$ est ainsi démontrée. D'où l'égalité ensembliste requise $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$.

4. Soit A une partie de E et montrons que $A \subset A^{\perp\perp}$. Soit donc $\mathbf{x} \in A$ et montrons que $\mathbf{x} \in A^{\perp\perp}$. Cela revient à montrer que \mathbf{x} est orthogonal à tous les vecteurs de A^\perp . Ce qui équivaut à montrer (puisque la relation $\ll \text{orthogonal à} \gg$ est symétrique) que tout vecteur de A^\perp est orthogonal à \mathbf{x} . Mais ceci est évident puisque (par définition même de l'ensemble A^\perp) tout vecteur de A^\perp est orthogonal à tous les vecteurs de A et en particulier à \mathbf{x} . D'où $\mathbf{x} \in A^{\perp\perp}$ et l'inclusion $A \subset A^{\perp\perp}$ est ainsi démontrée.

La proposition est démontrée. ■

3.4 Familles et bases orthogonales pour une forme bilinéaire symétrique

Dans cette section, on fixe sur E une forme bilinéaire symétrique f et on désigne par q la forme quadratique qui lui est associée.

Définition 3.VII.— Une famille \mathcal{F} de E est dite *orthogonale* pour f (ou simplement *orthogonale* s'il n'y a pas d'ambiguïté sur f) si pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{F}$, avec $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, on a : $\mathbf{x} \perp_f \mathbf{y}$. Autrement dit, si :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0_{\mathbb{K}} \quad (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{F}, \text{ avec } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}).$$

— Lorsqu'une base \mathcal{B} de E est une famille orthogonale pour f , on dit que \mathcal{B} est une *base orthogonale* de E pour f (ou simplement une *base orthogonale* de E s'il n'y a pas d'ambiguïté sur f).

— L'expression « orthogonale pour f » est quelquefois remplacée par l'une des expressions suivantes : « orthogonale pour q », « f -orthogonale », « q -orthogonale ».

Lorsque E est de dimension finie, la détermination d'une base orthogonale de E pour f est très utile pour la simplification et la classification de la forme bilinéaire symétrique f ; heureusement d'ailleurs qu'une telle base existe toujours!

THÉORÈME 3.4.— *Supposons que E est de dimension finie. Il existe alors au moins une base orthogonale de E pour f .*

Démonstration.— Pour avoir une meilleure rigueur mathématique dans la démonstration qu'on va donner, nous reformulons le théorème à démontrer ainsi :

Tout \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie (≥ 1) possède une base orthogonale pour une forme bilinéaire symétrique donnée sur cet espace.

Sans perte de généralité, supposons que la forme bilinéaire symétrique en question est non identiquement nulle (sinon, toute base de l'espace vectoriel en question est orthogonale et l'énoncé est trivialement vrai). On raisonne par récurrence sur la dimension d de l'espace vectoriel en question.

- Si $d = 1$. Dans ce cas, toute base de l'espace vectoriel en question convient.
- Soit $d \geq 2$ un entier. Supposons que l'énoncé ci-dessus est vrai pour tout \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $(d-1)$ et toute forme bilinéaire symétrique sur cet espace et montrons qu'il reste encore vrai pour tout \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension d et toute forme bilinéaire symétrique sur ce dernier. Soit donc \mathcal{E} un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension d et g une forme bilinéaire symétrique *non identiquement nulle* sur \mathcal{E} . Nous allons montrer (en trois étapes) que \mathcal{E} possède bien une base g -orthogonale.

1^{ère} étape : Montrons par l'absurde que \mathcal{E} possède au moins un vecteur non

isotrope pour g (i.e., un vecteur \mathbf{u} tel que $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \neq 0_{\mathbb{K}}$). En supposant le contraire (i.e., $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{E} : g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0_{\mathbb{K}}$) et en utilisant (3.1), on a pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}$:

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} (g(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) - g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - g(\mathbf{y}, \mathbf{y})) = \frac{1}{2} (0_{\mathbb{K}} - 0_{\mathbb{K}} - 0_{\mathbb{K}}) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Ce qui contredit l'hypothèse « g est non identiquement nulle ». Ainsi \mathcal{E} possède au moins un vecteur non isotrope pour g . Pour la suite, nous fixons $\mathbf{u} \in \mathcal{E}$ tel que $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \neq 0_{\mathbb{K}}$.

2^{ème} étape : On introduit $\mathcal{H} := \{\mathbf{u}\}^{\perp}$. On sait (d'après le point 1 de la proposition 3.3) que \mathcal{H} est un sous-espace vectoriel de \mathcal{E} . Nous allons en dire plus sur \mathcal{H} . En introduisant

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{u}} : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \mathbf{x} &\longmapsto g_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{aligned}$$

qui est une forme linéaire non identiquement nulle de \mathcal{E} (car g est une forme bilinéaire de E et $g_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) = g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \neq 0_{\mathbb{K}}$), on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \{\mathbf{x} \in \mathcal{E} : \mathbf{x} \perp_g \mathbf{u}\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathcal{E} : g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0_{\mathbb{K}}\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathcal{E} : g_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = 0_{\mathbb{K}}\} \\ &= \text{Ker } g_{\mathbf{u}}. \end{aligned}$$

Ainsi, \mathcal{H} est le noyau d'une forme linéaire non identiquement nulle de \mathcal{E} ; c'est-à-dire que \mathcal{H} est un hyperplan de \mathcal{E} . D'où :

$$\dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{E} - 1 = d - 1.$$

Par ailleurs, le fait que $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \neq 0_{\mathbb{K}}$ entraîne immédiatement que $\mathcal{H} \cap \text{Vect}(\mathbf{u}) = \{\mathbf{0}_{\mathcal{E}}\}$. Ce qui montre que les deux sous-espaces vectoriels \mathcal{H} et $\text{Vect}(\mathbf{u})$ de E sont en somme directe. Il résulte de cela que :

$$\dim(\mathcal{H} \oplus \text{Vect}(\mathbf{u})) = \dim \mathcal{H} + \dim \text{Vect}(\mathbf{u}) = (d - 1) + 1 = d = \dim \mathcal{E}.$$

D'où l'on conclut que :

$$\mathcal{H} \oplus \text{Vect}(\mathbf{u}) = \mathcal{E}.$$

Autrement dit, \mathcal{H} et $\text{Vect}(\mathbf{u})$ sont supplémentaires dans \mathcal{E} .

3^{ème} étape : comme $\dim \mathcal{H} = d - 1$ (voir la 2^{ème} étape) alors, d'après notre hypothèse de récurrence, il existe une base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{d-1})$ de \mathcal{H} , orthogonale pour la forme bilinéaire symétrique $g|_{\mathcal{H}}$ de \mathcal{H} . En se servant du fait que \mathcal{H} et $\text{Vect}(\mathbf{u})$ sont supplémentaires dans \mathcal{E} (établi à la 2^{ème} étape) et de la définition même de \mathcal{H} , il en résulte que $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{d-1}, \mathbf{u})$ est une base de \mathcal{E} , orthogonale pour g . Le \mathbb{K} -espace vectoriel \mathcal{E} possède donc au moins une base g -orthogonale. Ce qui achève cette récurrence et cette démonstration. ■

3.5 L'intérêt d'une base orthogonale

Supposons que E est de dimension finie, notée n ($n \in \mathbb{N}^*$) et fixons-nous une forme bilinéaire symétrique f sur E et une base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ de E , orthogonale pour f . Pour tous $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, posons $a_{ij} = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$. Comme \mathcal{B} est f -orthogonale, on a $a_{ij} = 0_{\mathbb{K}}$ pour tous $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$. La matrice associée à f relativement à \mathcal{B} s'écrit alors :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & & \mathbf{(0)} \\ & \ddots & \\ \mathbf{(0)} & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

qui est visiblement diagonale. Nous retenons donc que :

La matrice associée à f relativement à une base f -orthogonale est une matrice diagonale.

Nous pouvons donc reformuler le théorème 3.4 de la façon remarquable suivante :

Toute forme bilinéaire symétrique d'un espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable⁽³⁾.

Ce résultat éclaire la différence qu'on a avec la réduction des endomorphismes (étudiée en Algèbre 3) qui ne se limite pas à la diagonalisation, vu que celle-ci n'est pas toujours possible.

Inversement, il est facile à montrer que si la matrice associée à f relativement à une certaine base \mathcal{B}' de E est diagonale alors \mathcal{B}' est une base f -orthogonale.

3.6 Familles et bases orthonormées

Dans cette section, une forme bilinéaire symétrique f sur E est fixée.

Définition 3.VIII.— Une famille \mathcal{F} de E est dite *orthonormée* pour f (ou simplement *orthonormée* s'il n'y a pas d'ambiguïté sur f) si pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{F}$, on a :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 1_{\mathbb{K}} & \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{y} \\ 0_{\mathbb{K}} & \text{si } \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \end{cases}.$$

(2). C'est-à-dire représentable par une matrice diagonale.

— Lorsqu'une base \mathcal{B} de E est une famille orthonormée pour f , on dit que \mathcal{B} est une *base orthonormée* de E pour f (ou simplement une *base orthonormée* de E s'il n'y a pas d'ambiguïté sur f).

— En désignant par q la forme quadratique associée à f , l'expression « orthonormée pour f » est quelquefois remplacée par l'une des expressions suivantes : « orthonormée pour q », « f -orthonormée », « q -orthonormée ».

Remarques 3.IV.—

1. Toute famille f -orthonormée de E est (à fortiori) une famille f -orthogonale.
2. Si E est de dimension finie, notée n ($n \in \mathbb{N}^*$), et $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ est une base orthonormée de E alors la matrice associée à la forme bilinéaire symétrique f de E relativement à \mathcal{B} est :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) := (f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))_{1 \leq i, j \leq n} = (\delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \mathbf{I}_n.$$

3. Même lorsque E est de dimension finie, l'existence d'une base orthonormée de E n'a pas toujours lieu.

Exemple 3.III.— Prenons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et supposons que E est de dimension finie, notée n ($n \in \mathbb{N}^*$), et que f constitue un produit scalaire sur E . Montrer que E possède une base orthonormée pour f .

Considérons une base f -orthogonale $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ de E (l'existence d'une telle base est garantie par le théorème 3.4). Comme f est définie positive (car c'est un produit scalaire de E), on a pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$: $f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) > 0$. Posons pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\mathbf{e}_i := \frac{\mathbf{u}_i}{\sqrt{f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)}}.$$

D'une part, il est évident que la famille $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ (tout comme $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$) est une base de E . D'autre part, en se servant de la bilinéarité de f et de l'orthogonalité de la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$, on a pour tous $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = f\left(\frac{\mathbf{u}_i}{\sqrt{f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)}}, \frac{\mathbf{u}_j}{\sqrt{f(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j)}}\right) = \frac{1}{\sqrt{f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)f(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j)}} f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} = \delta_{ij}.$$

Ce qui montre que la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ de E est f -orthonormée. Le \mathbb{R} -espace vectoriel E possède donc bien une base f -orthonormée. ■

Lorsque E est de dimension finie, les méthodes de détermination de bases orthogonales ou orthonormées (pour un produit scalaire par exemple) de E seront détaillées dans les chapitres à venir.



Exercices

Exercice 3.1. Soit $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$q \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) := (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + 3x_2 + 5x_3) \quad \left(\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right).$$

1. Montrer que q est une forme quadratique sur \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer la forme polaire associée à q .
3. Déterminer la matrice associée à q relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 puis le rang de q .

Exercice 3.2. Soit :

$$\begin{aligned} q : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto q(P) := |P(i)|^2 \end{aligned}$$

(où i désigne le nombre complexe $\sqrt{-1}$).

1. Montrer que q est une forme quadratique positive sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Cette forme quadratique q est-elle définie positive? Justifier votre réponse.
3. Déterminer la forme polaire associée à q puis la matrice associée à q relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Soit $P(X) := X^2 + X + 1$.
— Déterminer $\{P\}^\perp$ et sa dimension.

Exercice 3.3. On note $E := \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Soit :

$$\begin{aligned} q : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_0^1 f(x)f(1-x) dx. \end{aligned}$$

1. Montrer que q est une forme quadratique sur E tout en précisant la forme polaire qui lui est associée.
2. Cette forme quadratique q est-elle positive? Justifier votre réponse.

Exercice 3.4. Le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^3 est muni de la forme quadratique q définie par :

$$q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) := x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \quad \left(\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\right).$$

Soit H le plan d'équation : $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

1. Déterminer H^\perp puis $H^{\perp\perp}$. Que constatez vous ?
2. Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes pour q tout en précisant sa nature géométrique.

Exercice 3.5. Soit q la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q(X) := x^2 - 4xz - 4yz \quad \left(\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\right)$$

et (\mathcal{P}_t) ($t \in \mathbb{R}$) le plan vectoriel de \mathbb{R}^3 d'équation :

$$tx + y + z = 0.$$

1. Montrer que q est non dégénérée.
2. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles (\mathcal{P}_t) contient un vecteur q -isotrope non nul.
3. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la restriction de q à (\mathcal{P}_t) reste non dégénérée.

Exercice 3.6. Soient n un entier strictement positif et A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$q(X) := \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1 & & & & \\ x_2 & & A & & \\ \vdots & & & & \\ x_n & & & & \end{vmatrix} \quad \left(\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n\right).$$

1. Montrer que q constitue une forme quadratique sur \mathbb{R}^n tout en explicitant sa matrice associée relativement à la base canonique de \mathbb{R}^n .
2. Déterminer la condition sur A pour laquelle q est non dégénérée.
3. Déterminer la condition sur A pour laquelle q est définie positive.

Exercice 3.7. Soient \mathbb{K} un corps commutatif et E un \mathbb{K} -espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique f .

— Montrer que toute famille f -orthonormée de E est libre.

Exercice 3.8. Soient \mathbb{K} un corps commutatif et E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une forme bilinéaire symétrique f .

1. Montrer que pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a :

$$\dim F + \dim F^\perp \geq \dim E.$$

 Utiliser l'application linéaire

$$\begin{aligned} \psi : E &\longrightarrow F^* \\ x &\longmapsto f_x|_F \end{aligned}$$

où pour tout $x \in E$, $f_x \in E^*$ est définie par

$$\begin{aligned} f_x : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ y &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

2. En déduire que si f est définie alors on a pour tout sous-espace vectoriel F de E :

$$F \oplus F^\perp = E \quad \text{et} \quad F^{\perp\perp} = F.$$

Exercice 3.9. Soient \mathbb{K} un corps commutatif, E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et f une forme bilinéaire symétrique sur E . On admet le théorème suivant :

Théorème. Pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a

$$\dim E = \dim F + \dim F^\perp - \dim (F \cap \text{Ker} f).$$

— Montrer que pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a


$$F^{\perp\perp} = F + \text{Ker} f.$$

Exercice 3.10. Soient $E := \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et \langle , \rangle le produit scalaire sur E défini par :

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x) dx \quad (\forall f, g \in E).$$

On note par \mathcal{P} l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[0, 1]$.

— Montrer que $\mathcal{P}^\perp = \{\mathbf{0}_E\}$.

 Utiliser le théorème de Weierstrass suivant :

Théorème (Weierstrass). Pour toute fonction continue f sur $[0, 1]$, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge **uniformément** vers f sur $[0, 1]$.



Chapitre 4

Réduction et classification des formes quadratiques réelles et complexes

Sommaire

4.1 Réduction de Gauss des formes quadratiques	36
4.1.1 Description de l'algorithme de Gauss	37
4.2 Une méthode alternative matricielle pour réduire une forme quadratique	41
4.3 Equivalence des formes quadratiques	44
4.3.1 Equivalence des formes quadratiques complexes	46
4.3.2 Equivalence des formes quadratiques réelles	47
Exercices	63

Pour tout ce qui suit, on se donne un corps commutatif \mathbb{K} , de caractéristique ⁽¹⁾ différente de 2, et un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie, notée n (avec $n \in \mathbb{N}^*$). On se donne aussi une forme quadratique q (non identiquement nulle) sur E .

4.1 Réduction de Gauss des formes quadratiques

Au théorème 3.4, on a vu que le \mathbb{K} -espace vectoriel E possède au moins une base q -orthogonal et au § 3.5, on a expliqué que si $\mathcal{O} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ est

(1). Cela a été déjà expliqué dans la première note d'en bas de page du chapitre précédent.

une telle base alors la matrice associée à q relativement à \mathcal{O} est diagonale. Si l'on désigne cette matrice par $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ (avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$), on a donc pour tout $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \dots + x_n\mathbf{u}_n \in E$:

$$q(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2.$$

Une telle écriture de q (i.e., une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires, \mathbb{K} -linéairement indépendantes) s'appelle *réduction* (ou *réduite*) de q .

En partant de l'expression de q relativement à une base quelconque de E , on va établir dans ce qui suit un algorithme efficace (dû à Gauss) permettant d'obtenir (en un nombre limité d'étapes) une *réduite* de q .

Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base de E . D'après la proposition 3.2, l'expression de q relativement à \mathcal{B} s'écrit (pour tout $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n \in E$, avec $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}$) :

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j,$$

où les a_{ij} sont des scalaires (i.e., $\in \mathbb{K}$). L'algorithme de Gauss pour réduire q est un procédé récurrent. Il montre principalement la démarche à suivre pour écrire $q(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in E$) comme combinaison linéaire d'un carré d'une forme linéaire et d'un polynôme homogène de second degré en $(n - 1)$ autres formes linéaires. Le reste est claire : il suffit de réitérer ce procédé autant de fois que nécessaire jusqu'à écrire $q(\mathbf{x})$ comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires. L'algorithme assure l'indépendance linéaires des formes linéaires qui apparaissent en chaque étape ; il assure donc en particulier l'indépendance linéaire des formes linéaires qui apparaissent à la réduction finale. Ces dernières formes linéaires peuvent donc être considérées comme des coordonnées relatives à une nouvelle base de E . Celle ci sera justement la base orthogonale correspondante à la forme réduite de q en question.

4.1.1 Description de l'algorithme de Gauss

- Si $n = 1$. Dans ce cas, la forme quadratique q est déjà réduite et il n'y a rien à faire.

- Supposons pour la suite que $n \geq 2$. On distingue les deux cas suivants :

1^{er} cas : (si les a_{ii} ne sont pas tous nuls).

Quitte à permuter ⁽²⁾ les coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n , on peut supposer que

(2). Une permutation des coordonnées correspond à une permutation des vecteurs de la base de E en question.

$a_{11} \neq 0$. On écrit alors $q(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n \in E$) comme polynôme de second degré en x_1 (à coefficients dans $\mathbb{K}[x_2, x_3, \dots, x_n]$), puis on le mettra sous sa forme canonique. Plus précisément, on a pour tout $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n \in E$:

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) &= a_{11}x_1^2 + \sum_{2 \leq j \leq n} a_{1j}x_1x_j + \sum_{2 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_ix_j \\ &= a_{11}x_1^2 + \left(\sum_{2 \leq j \leq n} a_{1j}x_j \right) x_1 + \sum_{2 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_ix_j \\ &= a_{11} \left\{ x_1^2 + \left(\frac{1}{a_{11}} \sum_{2 \leq j \leq n} a_{1j}x_j \right) x_1 \right\} + \sum_{2 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_ix_j \\ &= a_{11} \left\{ \left(x_1 + \frac{1}{2a_{11}} \sum_{2 \leq j \leq n} a_{1j}x_j \right)^2 - \left(\frac{1}{2a_{11}} \sum_{2 \leq j \leq n} a_{1j}x_j \right)^2 \right\} + \sum_{2 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_ix_j. \end{aligned}$$

En posant :

$$L_1(x_1, x_2, \dots, x_n) := x_1 + \frac{1}{2a_{11}} \sum_{2 \leq j \leq n} a_{1j}x_j$$

(qui est l'expression d'une forme linéaire sur E), il vient que :

$$q(\mathbf{x}) = a_{11}L_1(x_1, x_2, \dots, x_n)^2 + \sum_{2 \leq i < j \leq n} b_{ij}x_ix_j,$$

pour certains $b_{ij} \in \mathbb{K}$ (s'exprimant en fonction des a_{ij}).

Remarquer que l'expression $\sum_{2 \leq i < j \leq n} b_{ij}x_ix_j$ est un polynôme homogène de second degré en les $(n-1)$ coordonnées x_2, x_3, \dots, x_n .

2nd cas : (Si les a_{ii} sont tous nuls).

Comme q est non identiquement nulle, l'un au moins des a_{ij} ($i \neq j$) est non nul. Quitte à permuter les coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n , on peut supposer que $a_{12} \neq 0$. On a alors pour tout $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n \in E$:

$$q(\mathbf{x}) = a_{12}x_1x_2 + \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ (i,j) \neq (1,2)}} a_{ij}x_ix_j.$$

En effectuant le changement de coordonnées ⁽³⁾ :

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_i = y_i \quad (\text{pour } 3 \leq i \leq n) \end{cases},$$

(3). Un changement de coordonnées correspond à un changement de base.

on obtient :

$$q(\mathbf{x}) = a_{12}y_1^2 - a_{12}y_2^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij}y_i y_j,$$

pour certains $b_{ij} \in \mathbb{K}$ (s'exprimant en fonction des a_{ij}).

On se ramène ainsi au premier cas avec les nouvelles coordonnées y_1, y_2, \dots, y_n .

Conclusion : La procédure de ci-dessus (c'est-à-dire celle du premier cas ou bien celle du second cas suivie de celle du premier) aboutit à l'écriture de $q(\mathbf{x})$ comme combinaison linéaire d'un carré d'une forme linéaire L_1 sur E et d'un polynôme homogène de second degré en $(n - 1)$ formes linéaires L_2, L_3, \dots, L_n sur E (avec L_1, L_2, \dots, L_n sont \mathbb{K} -linéairement indépendantes). L'itération de ce procédé finit par obtenir la réduction recherchée.

Nous illustrons l'algorithme de Gauss avec l'exemple suivant :

Exemple 4.I.— Déterminer une forme réduite de Gauss de la forme quadratique q de \mathbb{R}^4 , définie par :

$$q(\mathbf{x}) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 \quad (\forall \mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4).$$

— En déduire une base orthogonale de \mathbb{R}^4 pour q .

On est dans le 1^{er} cas de l'algorithme de Gauss (puisque $a_{11} = 1 \neq 0$). Pour tout $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) &:= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 \\ &= x_1^2 + (2x_2 + 2x_3 + 2x_4)x_1 + (x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \\ &= (x_1 + (x_2 + x_3 + x_4))^2 - (x_2 + x_3 + x_4)^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - (x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4) + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4. \end{aligned}$$

En posant :

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ y_i = x_i \quad (\text{pour } i = 2, 3, 4) \end{cases} ,$$

il vient que :

$$q(\mathbf{x}) = y_1^2 - q'(y_2, y_3, y_4),$$

avec

$$q'(y_2, y_3, y_4) := 2y_2y_3 + 2y_2y_4 + 2y_3y_4 \quad (\forall y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{R}).$$

L'expression q' définit clairement une forme quadratique de \mathbb{R}^3 . Pour q' , on est dans le 2nd cas de l'algorithme de Gauss. Comme le suggère la procédure de Gauss, posons :

$$\begin{cases} y_2 = z_2 + z_3 \\ y_3 = z_2 - z_3 \\ y_4 = z_4 \end{cases} .$$

On a alors pour tous $y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} q'(y_2, y_3, y_4) &= 2(z_2^2 - z_3^2) + 2(z_2 + z_3)z_4 + 2(z_2 - z_3)z_4 \\ &= q''(z_2, z_3, z_4), \end{aligned}$$

avec

$$q''(z_2, z_3, z_4) := 2z_2^2 - 2z_3^2 + 4z_2z_4 \quad (\forall z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{R}).$$

L'expression de q'' définit une forme quadratique de \mathbb{R}^3 et se situe visiblement dans le premier cas de l'algorithme de Gauss. En suivant la procédure de Gauss pour q'' , on a pour tous $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} q''(z_2, z_3, z_4) &= 2(z_2^2 + 2z_2z_4) - 2z_3^2 \\ &= 2\{(z_2 + z_4)^2 - z_4^2\} - 2z_3^2 \\ &= 2(z_2 + z_4)^2 - 2z_3^2 - 2z_4^2. \end{aligned}$$

En remontant, il vient que :

$$q(\mathbf{x}) = y_1^2 - 2(z_2 + z_4)^2 + 2z_3^2 + 2z_4^2.$$

Il ne reste qu'à poser :

$$\begin{cases} L_1 = y_1 & = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ L_2 = z_2 + z_4 = \frac{y_2 + y_3}{2} + y_4 & = \frac{x_2 + x_3}{2} + x_4 \\ L_3 = z_3 = \frac{y_2 - y_3}{2} & = \frac{x_2 - x_3}{2} \\ L_4 = z_4 = y_4 & = x_4 \end{cases},$$

pour avoir :

$$q(\mathbf{x}) = L_1^2 - 2L_2^2 + 2L_3^2 + 2L_4^2,$$

qui représente une forme réduite de Gauss pour q .

— Désignons par \mathcal{B} la base de \mathbb{R}^4 qui correspond à cette forme réduite de q ; c'est-à-dire la base de \mathbb{R}^4 dont les coordonnées de tout $X = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ sont $L(X) = {}^t(L_1(X), L_2(X), L_3(X), L_4(X))$. Désignons aussi par P la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^4 vers \mathcal{B} . On a donc pour tout $X \in \mathbb{R}^4$:

$$X = PL(X).$$

L'expression de X en fonction de $L(X)$ permet ainsi d'en tirer immédiatement P , puis \mathcal{B} . Partant des expressions ci-dessus des L_i en fonction des x_i ($1 \leq i \leq 4$), les calculs donnent :

$$\begin{cases} x_1 = L_1 - 2L_2 + L_4 \\ x_2 = L_2 + L_3 - L_4 \\ x_3 = L_2 - L_3 - L_4 \\ x_4 = L_4 \end{cases}.$$

D'où :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$, avec :

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

qui est nécessairement q -orthogonale. ■

4.2 Une méthode alternative matricielle pour réduire une forme quadratique

Supposons donnée une forme quadratique q sur E dont la matrice associée relativement à une certaine base de E est désignée par A ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, symétrique). Réduire q revient à trouver une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que la matrice produit tPAP soit diagonale. Pour déterminer une telle matrice P , on se base sur les faits suivants :

- Multiplier une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par une matrice $P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à droite (c'est-à-dire former la matrice MP) revient à modifier les colonnes de M en changeant chacune d'elles par une certaine combinaison linéaire de toutes les colonnes. Plus précisément, la $i^{\text{ème}}$ colonne C_i de M ($1 \leq i \leq n$) sera changée par $\sum_{k=1}^n p_{ki}C_k$.
- Multiplier une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par une matrice $Q = (q_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à gauche (c'est-à-dire former la matrice QM) revient à modifier les lignes de M en changeant chacune d'elles par une combinaison linéaire de toutes les lignes. Plus précisément, la $i^{\text{ème}}$ ligne L_i de M ($1 \leq i \leq n$) sera changée par $\sum_{k=1}^n q_{ik}L_k$. En prenant $Q = {}^tP$ (avec $P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), on en déduit que la matrice tPM s'obtient en changeant chaque $i^{\text{ème}}$ ligne L_i de M ($1 \leq i \leq n$) par $\sum_{k=1}^n p_{ki}L_k$. On voit alors que les transformations $M \rightarrow MP$ et $M \rightarrow {}^tPM$ se réalisent par **les mêmes combinaisons linéaires**, sauf que pour la première transformation, ces combinaisons linéaires agissent sur les colonnes de M alors que pour la seconde, elles agissent sur les lignes de M .

Il résulte de ces deux faits qu'étant donnée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, symétrique, une matrice du type tPAP ($P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$) s'obtient en changeant les colonnes de A par des combinaisons linéaires de toutes les colonnes de A , puis les lignes de la matrice obtenue par **les mêmes combinaisons linéaires** ⁽⁴⁾ des

(4). Toute combinaison linéaire (resp. ensemble de combinaisons linéaires) de colonnes doit être suivi(e) d'une combinaison linéaire (resp. ensemble de combinaisons linéaires) identique(s) de lignes.

lignes de cette matrice. On peut bien entendu inverser ces manipulations en commençant par transformer les lignes de A puis les colonnes de la matrice qui en résulte. Pour avoir $P \in GL_n(\mathbb{K})$, il faut veiller à ce que les combinaisons linéaires utilisées définissent un automorphisme de \mathbb{K}^n . En pratique, ces procédures seront répétées jusqu'à l'aboutissement d'une matrice diagonale. Par ailleurs, pour récupérer la matrice P (qui fait que tPAP soit diagonale), il suffit d'appliquer à la matrice identité I_n toutes les transformations de la procédure concernant les colonnes (les colonnes seulement⁽⁵⁾!). Cette méthode matricielle de réduction des formes quadratiques est illustrée d'abord par l'exemple suivant :

Exemple 4.II.— Réduire la forme quadratique q de \mathbb{R}^4 , définie par :

$$q(\mathbf{x}) := x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 4x_3x_4$$

($\forall \mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$) et déterminer une base orthogonale de \mathbb{R}^4 pour q .

La matrice associée à q relativement à la base canonique de \mathbb{R}^4 est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La méthode matricielle décrite ci-dessus, visant à trouver une matrice diagonale congruente à A , est constituée des étapes suivantes :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_A \left| \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right| \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_4} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_2 \rightarrow C_2 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3 \rightarrow C_3 - C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5). En appliquant à I_n toutes les transformations concernant les colonnes (et uniquement celles-ci), I_n se transforme en $I_n P = P$. Ce qui permet de récupérer la matrice P .

$$\begin{array}{l} L_4 \rightarrow L_4 - L_3 \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \\ \\ C_4 \rightarrow C_4 - C_3 \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \end{array}$$

En posant $D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, 1, 2, -2)$ et $P := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a alors

${}^tPAP = D$. Une base q -orthogonale \mathcal{B} de \mathbb{R}^4 est constituée des vecteurs colonnes de

P ; soit $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$, avec $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En outre,

pour tout $\mathbf{y} = y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2 + y_3\mathbf{u}_3 + y_4\mathbf{u}_4 \in \mathbb{R}^4$ ($y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{R}$), on a :

$$q(\mathbf{y}) = y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2 - 2y_4^2,$$

ce qui est une forme réduite de q . ■

Remarque 4.I.— Parfois la méthode matricielle décrite ci-dessus nécessite un grand nombre d'étapes; c'est le cas par exemple des formes quadratiques dont la réduction de Gauss présente un second cas de l'algorithme. Essayons par exemple de traiter l'exemple 4.I par la méthode matricielle :

La matrice associée à q relativement à la base canonique de \mathbb{R}^4 est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La méthode matricielle visant à réduire q est alors constituée des étapes suivantes :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_A \left| \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_4} \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 - L_1 \\ \hline \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{array}{l} C_2 \rightarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \rightarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \rightarrow C_4 - C_1 \\ \hline \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$L_2 \xrightarrow{L_2-L_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$C_2 \xrightarrow{C_2-C_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_3 \xrightarrow{2L_3+L_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$C_3 \xrightarrow{2C_3+C_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_4 \xrightarrow{L_4-L_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$C_4 \xrightarrow{C_4-C_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

En posant $D := \text{diag}(1, 2, -2, 2)$ et $P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a alors ${}^tPAP = D$. La

famille $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$, constituée des vecteurs colonnes de P , est donc une base q -orthogonale de \mathbb{R}^4 et on a pour tous $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{R}$:

$$q(y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2 + y_3\mathbf{u}_3 + y_4\mathbf{u}_4) = y_1^2 + 2y_2^2 - 2y_3^2 + 2y_4^2,$$

ce qui est une forme réduite de q . ■

Un important commentaire. Dans la procédure matricielle ci-dessus, il est à noter que la 3^{ème} transformation $L_2 \rightarrow L_2 - L_3$ suivie de son analogue $C_2 \rightarrow C_2 - C_3$ n'ont pour objectif que d'avoir le second coefficient diagonal de la matrice en cours de transformation non nul.

4.3 Equivalence des formes quadratiques

Définition 4.I.— Soient q et q' deux formes quadratiques de E . On dit que q et q' sont équivalentes, et on écrit $q \sim q'$, s'il existe un automorphisme

u de E tel que l'on ait pour tout $\mathbf{x} \in E$:

$$q'(\mathbf{x}) = q(u(\mathbf{x})).$$

Autrement dit, q et q' sont équivalentes si elles sont représentées par un même polynôme homogène de second degré relativement à deux bases (distinctes ou confondues) de E .

Remarques 4.II.—

— Deux formes quadratiques q et q' de \mathbb{K}^n sont équivalentes signifie qu'on peut passer de l'expression de l'une à l'expression de l'autre en effectuant un changement de coordonnées (c'est-à-dire un changement de variables linéaire et bijectif). Plus explicitement, $q \sim q'$ signifie qu'il existe des formes linéaires L_1, L_2, \dots, L_n de \mathbb{K}^n , \mathbb{K} -linéairement indépendantes, tel que l'on ait pour tout $X \in \mathbb{K}^n$:

$$q'(X) = q(L_1(X), L_2(X), \dots, L_n(X)).$$

— Etant données q et q' deux formes quadratiques de E , il est immédiat que q et q' sont équivalentes si et seulement si leurs matrices associées (relativement à une certaine base de E) sont congruentes.

— La relation binaire \sim (sur l'ensemble des formes quadratiques de E) constitue une relation d'équivalence.

Exemple 4.III.— Soient q_1, q_2 et q_3 les trois formes quadratiques réelles de \mathbb{R}^2 , définies par :

$$q_1(X) := x^2 - y^2, \quad q_2(X) := xy \quad \text{et} \quad q_3(X) := x^2 + y^2 \quad \left(\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right).$$

— Montrer que q_1 est équivalente à q_2 mais que q_1 n'est pas équivalente à q_3 .

Pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$q_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = q_2\left(\begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}\right).$$

Ainsi, en définissant :

$$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix},$$

qui est visiblement un automorphisme de \mathbb{R}^2 , on a bien $q_1(X) = q_2(u(X))$ ($\forall X \in \mathbb{R}^2$). Ce qui montre que q_1 et q_2 sont équivalentes.

— En revanche, q_1 et q_3 ne sont pas équivalentes puisque q_3 est positive alors que q_1 ne l'est pas. ■

Dans ce qui suit, nous allons classier les formes quadratiques de E modulo la relation d'équivalence \sim . Nous étudions plus précisément les cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et nous établissons pour chacun des deux un critère simple caractérisant l'équivalence. Bien que l'étude de l'équivalence des formes quadratiques est toute simple pour le cas complexe, elle l'est moins pour le cas réel, puisqu'elle n'a été clarifiée qu'en 1852 par le mathématicien anglais J.J. Sylvester. Quant au cas rationnel (i.e., $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$), il est beaucoup plus difficile que les deux derniers et dépasse d'ailleurs de loin le cadre que nous avons réservé à ce polycopié. Ce cas, qui relève en fait de l'arithmétique, a maintenant révélé ses secrets grâce au remarquable théorème de Hasse-Minkowski.

4.3.1 Equivalence des formes quadratiques complexes

Dans toute cette sous-section, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

THÉORÈME 4.1.— *Soit q une forme quadratique sur E , de rang noté r . Il existe alors une base $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ de E tel que l'on ait pour tout $\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n \in E$ (avec $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$) :*

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2.$$

Démonstration.— Soit $\mathcal{O} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ une base de E , orthogonale pour q (l'existence d'une telle base est garantie par le théorème 3.4). La matrice associée à q relativement à cette base est $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, avec $\lambda_i := q(\mathbf{u}_i) \in \mathbb{C}$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Le rang de q (noté r), qui est égale au rang de D , est donc égale au nombre des λ_i ($1 \leq i \leq n$) qui sont non nuls. Quitte à permuter les vecteurs \mathbf{u}_i ($1 \leq i \leq n$) de la base \mathcal{O} , on peut donc supposer que $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, 2, \dots, r$ et $\lambda_i = 0$ pour $r < i \leq n$. Moyennant cette supposition, on a $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, 0, 0, \dots, 0)$. Par suite, en désignant respectivement par $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_r}$ des racines carrés des nombres complexes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ et en considérant la nouvelle base

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) := \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\mathbf{u}_1, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\mathbf{u}_2, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}}\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \mathbf{u}_{r+2}, \dots, \mathbf{u}_n \right)$$

de E , on a pour tout $\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n \in E$ (avec $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$) :

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) &= q(x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n) \\ &= q\left(\frac{x_1}{\sqrt{\lambda_1}}\mathbf{u}_1 + \frac{x_2}{\sqrt{\lambda_2}}\mathbf{u}_2 + \dots + \frac{x_r}{\sqrt{\lambda_r}}\mathbf{u}_r + x_{r+1}\mathbf{u}_{r+1} + x_{r+2}\mathbf{u}_{r+2} + \dots + x_n\mathbf{u}_n\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda_1 \left(\frac{x_1}{\sqrt{\lambda_1}} \right)^2 + \lambda_2 \left(\frac{x_2}{\sqrt{\lambda_2}} \right)^2 + \cdots + \lambda_r \left(\frac{x_r}{\sqrt{\lambda_r}} \right)^2 \\
&= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2.
\end{aligned}$$

Le théorème est démontré. ■

Du théorème 4.1 résulte le corollaire suivant qui caractérise l'équivalence des formes quadratiques complexes.

COROLLAIRE 4.2.— *Deux formes quadratiques de E sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.*

Démonstration.— Soient q et q' deux formes quadratiques de E .

- Supposons que $q \sim q'$. Les matrices associées à q et q' (relativement à une certaine base de E) sont donc congruentes; ce qui entraîne qu'elles ont le même rang (voir la remarque 2.III). Autrement dit : $\text{rg}(q) = \text{rg}(q')$.
- Inversement, supposons que $\text{rg}(q) = \text{rg}(q')$ et désignons par r le rang commun à q et q' . D'après le théorème 4.1, il existe deux bases $(\mathbf{v}_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(\mathbf{v}'_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E tel que l'on ait pour tout $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + x_n \mathbf{v}_n = x'_1 \mathbf{v}'_1 + x'_2 \mathbf{v}'_2 + \cdots + x'_n \mathbf{v}'_n \in E$ (avec $x_1, x_2, \dots, x_n, x'_1, x'_2, \dots, x'_n \in \mathbb{C}$) :

$$\begin{aligned}
q(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2 \\
q'(\mathbf{x}) &= x_1'^2 + x_2'^2 + \cdots + x_r'^2.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que q et q' sont représentées par un même polynôme homogène de second degré (relativement aux bases $(\mathbf{v}_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(\mathbf{v}'_i)_{1 \leq i \leq n}$ respectivement). D'où l'on conclut que $q \sim q'$. Le corollaire est démontré. ■

4.3.2 Equivalence des formes quadratiques réelles

Dans toute cette sous-section, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

THÉORÈME 4.3 (LE THÉORÈME DE SYLVESTER).— *Soit q une forme quadratique sur E , de rang noté r . Il existe alors une base $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ de E et un couple $(p, m) \in \mathbb{N}^2$, vérifiant $p + m = r$, tel que l'on ait pour tout $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + x_n \mathbf{v}_n \in E$ (avec $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$) :*

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \cdots - x_{p+m}^2.$$

De plus, le couple (p, m) est le même pour toutes les bases de E jouissant de la même propriété. Autrement dit, (p, m) dépend uniquement de la forme quadratique q .

Démonstration.—

- Existence de la base $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ de E et du couple (p, m) : (facile)

Soit $\mathcal{O} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ une base de E , orthogonale pour q (l'existence d'une telle base est garantie par le théorème 3.4). La matrice associée à q relativement à cette base est $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, avec $\lambda_i := q(\mathbf{u}_i) \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Le rang r de q , qui est égale au rang de D , est donc égale au nombre des λ_i ($1 \leq i \leq n$) qui sont non nuls. Quitte à permuter les vecteurs \mathbf{u}_i ($1 \leq i \leq n$) de la base \mathcal{O} , on peut donc supposer que $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, 2, \dots, r$ et $\lambda_i = 0$ pour $r < i \leq n$. Moyennant cette supposition, on a $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$. On définit $p, m \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{aligned} p &:= \text{Card} \{i \in \{1, 2, \dots, r\} : \lambda_i > 0\} \\ m &:= \text{Card} \{i \in \{1, 2, \dots, r\} : \lambda_i < 0\}. \end{aligned}$$

On a bien $p + m = r$. Quitte à permuter encore les vecteurs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$, on peut supposer que $\lambda_i > 0$ pour $i = 1, 2, \dots, p$ et $\lambda_i < 0$ pour $i = p + 1, p + 2, \dots, p + m$. Moyennons nous cette supposition et considérons la nouvelle base de E :

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) := \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \mathbf{u}_1, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \mathbf{u}_2, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} \mathbf{u}_p, \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+1}}} \mathbf{u}_{p+1}, \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+2}}} \mathbf{u}_{p+2}, \dots, \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+m}}} \mathbf{u}_{p+m}, \mathbf{u}_{p+m+1}, \mathbf{u}_{p+m+2}, \dots, \mathbf{u}_n \right).$$

Pour tout $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_n \mathbf{v}_n$ (avec $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$), on a :

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) &= q(x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_n \mathbf{v}_n) \\ &= q \left(\frac{x_1}{\sqrt{\lambda_1}} \mathbf{u}_1 + \frac{x_2}{\sqrt{\lambda_2}} \mathbf{u}_2 + \dots + \frac{x_p}{\sqrt{\lambda_p}} \mathbf{u}_p + \frac{x_{p+1}}{\sqrt{-\lambda_{p+1}}} \mathbf{u}_{p+1} + \frac{x_{p+2}}{\sqrt{-\lambda_{p+2}}} \mathbf{u}_{p+2} \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{x_{p+m}}{\sqrt{-\lambda_{p+m}}} \mathbf{u}_{p+m} + x_{p+m+1} \mathbf{u}_{p+m+1} + x_{p+m+2} \mathbf{u}_{p+m+2} + \dots + x_n \mathbf{u}_n \right) \\ &= \lambda_1 \left(\frac{x_1}{\sqrt{\lambda_1}} \right)^2 + \lambda_2 \left(\frac{x_2}{\sqrt{\lambda_2}} \right)^2 + \dots + \lambda_p \left(\frac{x_p}{\sqrt{\lambda_p}} \right)^2 \\ &\quad + \lambda_{p+1} \left(\frac{x_{p+1}}{\sqrt{-\lambda_{p+1}}} \right)^2 + \lambda_{p+2} \left(\frac{x_{p+2}}{\sqrt{-\lambda_{p+2}}} \right)^2 + \dots + \lambda_{p+m} \left(\frac{x_{p+m}}{\sqrt{-\lambda_{p+m}}} \right)^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \dots - x_{p+m}^2. \end{aligned}$$

Ce qui est bien la représentation requise pour q .

• Invariance du couple (p, m) : (Sylvester)

Soient $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ et $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n)$ deux bases de E fournissant la réduction requise pour q dans notre théorème et soient respectivement (p, m) et (p', m') les deux couples de \mathbb{N}^2 correspondant; c'est-à-dire les couples de \mathbb{N}^2 pour lesquels on ait pour tout $\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n = y_1\mathbf{w}_1 + y_2\mathbf{w}_2 + \dots + y_n\mathbf{w}_n \in E$ (avec $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \dots - x_{p+m}^2 \\ &= y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{p'}^2 - y_{p'+1}^2 - y_{p'+2}^2 - \dots - y_{p'+m'}^2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Il s'agit de montrer que $(p, m) = (p', m')$. Comme $p + m = r$ et $p' + m' = r$, on a $p + m = p' + m'$ et il suffit juste de montrer que $p = p'$. Pour ce faire, nous considérons les quatre sous-espaces vectoriels de E suivants :

$$\begin{aligned} F &:= \text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p) & ; & \quad G := \text{Vect}(\mathbf{v}_{p+1}, \mathbf{v}_{p+2}, \dots, \mathbf{v}_n) \\ F' &:= \text{Vect}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{p'}) & ; & \quad G' := \text{Vect}(\mathbf{w}_{p'+1}, \mathbf{w}_{p'+2}, \dots, \mathbf{w}_n). \end{aligned}$$

En vertu de (4.1), on a :

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) &> 0 \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in F \setminus \{\mathbf{0}_E\} \\ q(\mathbf{x}) &\leq 0 \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in G \\ q(\mathbf{x}) &> 0 \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in F' \setminus \{\mathbf{0}_E\} \\ q(\mathbf{x}) &\leq 0 \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in G'. \end{aligned}$$

Montrons par l'absurde que $F \cap G' = \{\mathbf{0}_E\}$. En supposant le contraire, c'est-à-dire qu'il existe $\mathbf{x} \in F \cap G'$ tel que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_E$, on a d'une part $q(\mathbf{x}) > 0$ (puisque $\mathbf{x} \in F \setminus \{\mathbf{0}_E\}$) et d'autre part $q(\mathbf{x}) \leq 0$ (puisque $\mathbf{x} \in G'$). Ce qui fournit une contradiction apparente et montre qu'on a effectivement $F \cap G' = \{\mathbf{0}_E\}$. Ce dernier fait entraîne que les deux sous-espaces vectoriels F et G' de E sont en somme directe. On a par conséquent :

$$\dim F + \dim G' = \dim(F \oplus G') \leq \dim E = n.$$

C'est-à-dire :

$$p + (n - p') \leq n.$$

Ce qui donne :

$$p \leq p'.$$

Un raisonnement analogue montre que $F' \cap G = \{\mathbf{0}_E\}$ et puis que $p' \leq p$. Il en résulte ainsi que $p = p'$, comme il fallait le prouver. Ceci complète la preuve du théorème. ■

Définition 4.II.— Etant donnée q une forme quadratique de E , le couple (p, m) de \mathbb{N}^2 fourni par le théorème 4.3 s'appelle *la signature* de q et se note $\text{sgn}(q)$.

L'importance de la signature d'une forme quadratique réelle de E est établie par le corollaire suivant, qui est une conséquence directe du théorème 4.3. Ce corollaire est connu sous le nom du *principe d'inertie de Sylvester*.

COROLLAIRE 4.4 (LE PRINCIPE D'INERTIE DE SYLVESTER).— Deux formes quadratiques réelles q et q' de E sont équivalentes si et seulement si elles ont la même signature.

Démonstration.— Soient q et q' deux formes quadratiques de E .

- Supposons que q et q' sont équivalentes. Ceci équivaut à dire que q et q' sont représentées par un même polynôme homogène de second degré (relativement à deux bases bien choisies de E). Ce polynôme homogène de second degré (vu comme une forme quadratique de \mathbb{R}^n) est doté d'une signature $(p, m) \in \mathbb{N}^2$ qui est commune à q et q' . D'où $\text{sgn}(q) = \text{sgn}(q')$.
- Inversement, supposons que q et q' ont une même signature (p, m) (avec $(p, m) \in \mathbb{N}^2, p + m \leq n$). Dans ce cas, q et q' sont représentées toutes les deux par le même polynôme homogène du second degré

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \cdots - x_{p+m}^2$$

(relativement à deux bases bien choisies de E). Ce qui entraîne que q et q' sont équivalentes. Le corollaire est démontré. ■

La signature d'une forme quadratique réelle q de E permet également de déduire certaines des caractéristiques de q , comme : sa positivité, sa définition, sa dégénérescence, etc. Ceci est, en fait, naturel étant donné que la signature de q est l'invariant caractérisant q modulo la relation d'équivalence des formes quadratiques de E . On a le corollaire suivant :

COROLLAIRE 4.5.— Soit q une forme quadratique de E et soit (p, m) sa signature (avec $(p, m) \in \mathbb{N}^2$ et $p + m \leq n$). Alors, on a :

$$\begin{aligned} q \text{ est positive} & \iff m = 0 \\ q \text{ est définie positive} & \iff (p, m) = (n, 0) \\ q \text{ est non dégénérée} & \iff p + m = n. \end{aligned}$$

Démonstration.— D’après le théorème 4.3, il existe une base $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ de E pour laquelle on ait pour tout $\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n \in E$ (avec $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$) :

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \dots - x_{p+m}^2.$$

• Montrons la première équivalence du corollaire. Si $m = 0$, on obtient que $q(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in E$) est une somme de carrés de nombres réels, donc $q(\mathbf{x}) \geq 0$ ($\forall \mathbf{x} \in E$). Ce qui revient à dire que la forme quadratique q est positive. Inversement, si $m \neq 0$, on aura $m \geq 1$ et par suite $q(\mathbf{v}_{p+1}) = -1 < 0$. Ce qui entraîne que q n’est pas positive. La première équivalence du corollaire est ainsi démontrée.

• Montrons la deuxième équivalence du corollaire. Supposons que q est définie positive. Donc q est (à fortiori) positive et on a par conséquent $m = 0$ (d’après la 1^{ère} équivalence du corollaire, déjà démontrée). Par suite, si l’on suppose que $p < n$, on obtient $q(\mathbf{v}_{p+1}) = 0$, bien que $\mathbf{v}_{p+1} \neq \mathbf{0}_E$; ce qui contredit notre supposition du fait que q est définie positive. On a donc forcément $p = n$. D’où $(p, m) = (n, 0)$, comme il fallait le prouver.

Inversement, supposons que $(p, m) = (n, 0)$. On a alors clairement pour tout $\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n \in E$ (avec $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$) : $q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq 0$ et

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) = 0 &\iff x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0 \\ &\iff x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 \\ &\iff \mathbf{x} = \mathbf{0}_E. \end{aligned}$$

Ce qui montre que q est définie positive. La deuxième équivalence du corollaire est ainsi démontrée.

• Montrons enfin la troisième équivalence du corollaire. D’après l’exemple 2.IV, la forme quadratique q est non dégénérée si et seulement si $\text{rg}(q) = n$; c’est-à-dire ssi $p + m = n$ (puisque $\text{rg}(q) = p + m$). La troisième équivalence du corollaire est ainsi démontrée.

Ceci achève la preuve du corollaire. ■

On a aussi le corollaire complémentaire suivant dont une partie se déduit immédiatement du corollaire 4.5.

COROLLAIRE 4.6.— Soit q une forme quadratique de E et soit (p, m) sa signature (avec $(p, m) \in \mathbb{N}^2$ et $p + m \leq n$). Alors on a :

$$\begin{aligned} q \text{ est négative} &\iff p = 0 \\ q \text{ est définie négative} &\iff (p, m) = (0, n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q \text{ est définie} &\iff q \text{ est ou bien définie positive} \\
 &\quad \text{ou bien définie négative} \\
 &\iff (p, m) \in \{(n, 0), (0, n)\}.
 \end{aligned}$$

Démonstration.— En remarquant que $\text{sgn}(-q) = (m, p)$, les deux premières équivalences du corollaire sont des conséquences immédiates des deux premières équivalences du corollaire 4.5. En outre, la quatrième équivalence du corollaire est une conséquence directe des équivalences qui la précèdent. Il ne reste donc qu'à montrer la troisième équivalence du corollaire ; à savoir que la forme quadratique q est définie si et seulement si elle est définie positive ou définie négative. Comme l'implication indirecte de cette équivalence est encore triviale, il ne nous reste en fait qu'à montrer l'implication directe :

$$q \text{ est définie} \implies q \text{ est ou bien définie positive ou bien définie négative.}$$

Pour ce faire, nous procédons par l'absurde. Supposons que q est définie mais qu'elle n'est ni définie positive ni définie négative. Il existe donc deux vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E \setminus \{\mathbf{0}_E\}$ tels que :

$$q(\mathbf{u}) < 0 \quad \text{et} \quad q(\mathbf{v}) > 0.$$

Considérons par suite la fonction réelle :

$$\begin{aligned}
 \varphi : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 t &\longmapsto q(t\mathbf{u} + (1-t)\mathbf{v}) .
 \end{aligned}$$

En désignant par f la forme polaire de q , on a (en se servant de la bilinéarité et de la symétrie de f) pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}
 \varphi(t) &:= q(t\mathbf{u} + (1-t)\mathbf{v}) \\
 &= f(t\mathbf{u} + (1-t)\mathbf{v}, t\mathbf{u} + (1-t)\mathbf{v}) \\
 &= t^2 f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 2t(1-t)f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (1-t)^2 f(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \\
 &= q(\mathbf{u})t^2 + 2f(\mathbf{u}, \mathbf{v})t(1-t) + q(\mathbf{v})(1-t)^2.
 \end{aligned}$$

Ce qui montre que la fonction φ est polynomiale (de degré ≤ 2). Par conséquent, φ est continue sur $[0, 1]$. De plus, on a $\varphi(0) = q(\mathbf{v}) > 0$ et $\varphi(1) = q(\mathbf{u}) < 0$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$; soit $q(\alpha\mathbf{u} + (1-\alpha)\mathbf{v}) = 0$. Mais puisque q est supposée définie, il en découle que l'on a : $\alpha\mathbf{u} + (1-\alpha)\mathbf{v} = \mathbf{0}_E$. D'où l'on tire que $\mathbf{v} = \frac{\alpha}{\alpha-1}\mathbf{u}$. Ce qui donne :

$$q(\mathbf{v}) = q\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\mathbf{u}\right) = \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2 q(\mathbf{u}) < 0 \quad (\text{puisque } q(\mathbf{u}) < 0).$$

Or ceci contredit le fait que $q(\mathbf{v}) > 0$. Cette contradiction confirme l'implication requise et complète cette démonstration. ■

Remarque 4.III.— La signature (p, m) d'une forme quadratique q de E est aussi générée par les formules :

$$p = \max_{\substack{F \text{ est un sous-espace} \\ \text{vectoriel de } E}} \left\{ \dim F : q|_F \text{ est définie positive} \right\}$$

$$m = \max_{\substack{F \text{ est un sous-espace} \\ \text{vectoriel de } E}} \left\{ \dim F : q|_F \text{ est définie négative} \right\}.$$

Les preuves de ces formules sont laissées au soin du lecteur.

Exemple 4.IV (Extrait de l'examen de l'année 2013-2014).— Pour tout ce qui suit, k désigne un paramètre réel. On considère q_k la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q_k(\mathbf{x}) := x^2 + 2y^2 + kz^2 + 2xy + 2yz \quad (\forall \mathbf{x} = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

1. Réduire q_k par la méthode de Gauss.
2. En déduire le rang et la signature de q_k en distinguant les valeurs du paramètre réel k .
3. Quelles sont les valeurs du paramètre réel k pour lesquelles q_k est définie positive ?
4. Déterminer une base de \mathbb{R}^3 qui soit q_k -orthogonale.
5. Soit q' la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q'(\mathbf{x}) := 2xy + 2xz - yz \quad (\forall \mathbf{x} = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

- (a) Réduire q' par la méthode de Gauss.
- (b) En déduire les valeurs de k pour lesquelles q_k et q' sont équivalentes.
- (c) On prend dans cette question $k = 0$. Déterminer trois formes linéaires L_1, L_2 et L_3 en x, y, z (\mathbb{R} -linéairement indépendantes) tel que l'on ait :

$$q_0(L_1, L_2, L_3) = q'(x, y, z).$$

1. Pour tout $\mathbf{x} = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} q_k(\mathbf{x}) &= x^2 + 2y^2 + kz^2 + 2xy + 2yz \\ &= (x^2 + 2xy) + 2y^2 + 2yz + kz^2 \\ &= \{(x + y)^2 - y^2\} + 2y^2 + 2yz + kz^2 \\ &= (x + y)^2 + y^2 + 2yz + kz^2 \\ &= (x + y)^2 + (y + z)^2 + (k - 1)z^2. \end{aligned}$$

En posant :

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y + z \\ z' = z \end{cases}, \quad (4.2)$$

il vient que :

$$q_k(\mathbf{x}) = x'^2 + y'^2 + (k - 1)z'^2,$$

ce qui est une forme réduite de Gauss de q_k . Noter que l'algorithme de Gauss assure que les formes linéaires x' , y' et z' sont \mathbb{R} -linéairement indépendantes, donc correspondent à un changement de coordonnées dans le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^3 .

2.

• Le rang de q_k est égale au nombre de coefficients non nuls dans l'écriture de q_k sous sa forme réduite de Gauss. On a donc :

$$\text{rg}(q_k) = \begin{cases} 2 & \text{si } k = 1 \\ 3 & \text{si } k \neq 1 \end{cases}.$$

• La signature de q_k est égale au couple (p, m) , avec p et m désignent respectivement le nombre de coefficients strictement positifs et le nombre de coefficients strictement négatifs dans l'écriture de q_k sous sa forme réduite de Gauss. On a donc :

$$\text{sgn}(q_k) = \begin{cases} (2, 0) & \text{si } k = 1 \\ (3, 0) & \text{si } k > 1 \\ (2, 1) & \text{si } k < 1 \end{cases}.$$

3. La forme quadratique q_k est définie positive ssi $\text{sgn}(q_k) = (\dim \mathbb{R}^3, 0) = (3, 0)$. Il en résulte, en vertu du résultat de la question précédente, que q_k est définie positive ssi $k > 1$.

4. On a :

$$(4.2) : \begin{cases} x' = x + y \\ y' = y + z \\ z' = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = x' - y' + z' \\ y = y' - z' \\ z = z' \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \text{avec } P := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice P représente la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^3 vers une nouvelle base de \mathbb{R}^3 où q_k est représentée par sa forme réduite de Gauss. Cette nouvelle base est : $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, avec :

$$\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et est (de toute évidence) q_k -orthogonale.

5.

(a) On est dans le second cas de l'algorithme de Gauss. Le coefficient de yz étant non nul ($= -1$); l'algorithme de Gauss nous incite à poser :

$$\begin{cases} y = u + v \\ z = u - v \\ x = w \end{cases} .$$

Ainsi, pour tout $\mathbf{x} = {}^t(x, y, z)$, $q'(\mathbf{x})$ se transforme en :

$$\begin{aligned} q'(\mathbf{x}) &= 2w(u + v) + 2w(u - v) - (u + v)(u - v) \\ &= 4uw - u^2 + v^2 \\ &= v^2 - (u^2 - 4uw) \\ &= v^2 - \{(u - 2w)^2 - 4w^2\} \\ &= v^2 + 4w^2 - (u - 2w)^2. \end{aligned}$$

En posant :

$$\begin{cases} u' = v = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z \\ v' = 2w = 2x \\ w' = u - 2w = -2x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \end{cases}$$

(qui sont des formes linéaires \mathbb{R} -linéairement indépendantes), on obtient :

$$\boxed{q'(\mathbf{x}) = u'^2 + v'^2 - w'^2} .$$

Ce qui est une forme réduite de Gauss de q' .

(b) D'après la forme réduite de Gauss précédente de q' , on a $\text{sgn}(q') = (2, 1)$. D'après le principe d'inertie de Sylvester, les deux formes quadratiques q_k et q' sont équivalentes si et seulement si elles ont la même signature; donc si et seulement si $\text{sgn}(q) = (2, 1)$. Il résulte du résultat de la question 2 que $q_k \sim q'$ si et seulement si $\boxed{k < 1}$.

(c) D'après le résultat de la question 5.(a), on a :

$$q'(x, y, z) = u'^2 + v'^2 - w'^2, \tag{4.3}$$

avec $u'(x, y, z) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z$, $v'(x, y, z) = 2x$ et $w'(x, y, z) = -2x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$. Par ailleurs, en vertu du résultat de la question 1 pour $k = 0$, on a pour tous L_1, L_2 et L_3 des formes linéaires en x, y, z :

$$q_0(L_1, L_2, L_3) = (L_1 + L_2)^2 + (L_2 + L_3)^2 - L_3^2. \tag{4.4}$$

L'identification entre (4.3) et (4.4) suggère de prendre L_1, L_2 et L_3 telles que :

$$\begin{cases} L_1 + L_2 = u' \\ L_2 + L_3 = v' \\ L_3 = w' \end{cases} .$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} L_1 &= u' - v' + w' \\ L_2 &= v' - w' \\ L_3 &= w' \end{cases} .$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} L_1 &= \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z\right) - 2x + \left(-2x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right) \\ L_2 &= 2x - \left(-2x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right) \\ L_3 &= -2x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \end{cases} .$$

En simplifiant, on obtient enfin :

$$\boxed{\begin{cases} L_1 &= -4x + y \\ L_2 &= 4x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z \\ L_3 &= -2x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \end{cases} .}$$

Ce sont des formes linéaires \mathbb{R} -linéairement indépendantes, vérifiant : $q_0(L_1, L_2, L_3) = q'(x, y, z)$. Bien entendu, pour une raison de simplification d'écriture, on a noté L_i au lieu de $L_i(x, y, z)$ ($i = 1, 2, 3$). Noter aussi que ces forme linéaires L_1, L_2 et L_3 qu'on vient de trouver ne sont pas les uniques formes linéaires en x, y, z telles que $q_0(L_1, L_2, L_3) = q'(x, y, z)$. ■

Calcul de la signature d'une forme quadratique réelle par la méthode des déterminants de Sylvester

Étant donnés $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice réelle carrée d'ordre n , rappelons qu'un mineur principal de A est un déterminant d'une sous-matrice carrée de A que l'on obtient en fixant les mêmes indices (i.e., les mêmes numéros) pour les lignes et les colonnes à extraire de A . Plus explicitement, un mineur principal d'ordre k de A (où $k \in \{1, 2, \dots, n\}$) est un déterminant d'une sous-matrice de A de la forme $(a_{ij})_{i, j \in I}$, où I est un sous-ensemble (ordonné) de cardinal k de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. Nous renvoyons le lecteur au cours de 1^{ère} année d'Algèbre 2 pour réviser cette notion dont l'intérêt fondamental est le calcul du rang d'une matrice. Pour ce qui va suivre, nous aurons besoin d'introduire un type bien particulier de mineurs principaux d'une matrice carrée :

Définition 4.III.— Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on appelle mineur principal dominant d'ordre k de A le déterminant extrait de A suivant :

$$D_k := \det(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k} .$$

On prend aussi par convention $D_0 = 1$.

Pour calculer la signature d'une forme quadratique réelle, la méthode de Sylvester utilise les mineurs principaux dominants de sa matrice associée (relativement à une base fixée du \mathbb{R} -espace vectoriel ambiant). Il s'énonce comme suit :

THÉORÈME 4.7 (SYLVESTER).— Soient n un entier strictement positif, E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base de E . Soient aussi q une forme quadratique sur E et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice associée à q relativement à \mathcal{B} . Considérons les mineurs principaux dominants de A , qui sont :

$$D_0 := 1 \quad \text{et} \quad D_k := \det(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k} \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, n,$$

et supposons que $D_k \neq 0$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Considérons aussi s le nombre de changements de signes dans la suite finie ordonnée D_0, D_1, \dots, D_n . Alors, on a :

$$\text{sgn}(q) = (n - s, s).$$

Démonstration.— Nous allons construire par un procédé identique à celui de *Gram-Schmidt* (que l'on verra au chapitre suivant) une base $\mathcal{C} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ de E qui soit orthogonale pour q et pour laquelle on ait pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k) = \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k).$$

Pour ce faire, nous allons procéder par récurrence sur k ; c'est-à-dire que nous construirons les \mathbf{u}_k ($1 \leq k \leq n$) de proche en proche.

- Pour $k = 1$, nous prenons simplement $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1$.
- Soit $k \in \{2, 3, \dots, n\}$. Supposons que $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}$ sont déjà construits de sorte qu'ils soient deux à deux q -orthogonaux et satisfassent :

$$\text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}) = \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{k-1}).$$

Nous devons construire alors un vecteur \mathbf{u}_k de E qui soit q -orthogonal à chacun des \mathbf{u}_i ($1 \leq i \leq k - 1$) et tel que l'on ait :

$$\text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k) = \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k).$$

Nous nous proposons de chercher un tel \mathbf{u}_k de la forme :

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{e}_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \mathbf{u}_i, \tag{4.5}$$

où les λ_i sont des réels à déterminer pour avoir $\mathbf{u}_k \perp_q \mathbf{u}_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. Cette forme de \mathbf{u}_k assure immédiatement que :

$$\text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k) = \text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{e}_k) = \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{k-1}, \mathbf{e}_k)$$

(en vertu de l'hypothèse de récurrence). Il ne reste donc qu'à choisir les λ_i convenablement pour avoir $\mathbf{u}_k \perp_q \mathbf{u}_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. En désignant par φ la forme polaire de q , on a pour tout $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k \perp_q \mathbf{u}_j &\iff \varphi(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_j) = 0 \\ &\iff \varphi\left(\mathbf{e}_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j\right) = 0 \\ &\iff \varphi(\mathbf{e}_k, \mathbf{u}_j) + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \varphi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = 0 \\ &\iff \varphi(\mathbf{e}_k, \mathbf{u}_j) + \lambda_j \varphi(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j) = 0 \end{aligned}$$

(puisque les $\mathbf{u}_i, 1 \leq i \leq k-1$, sont deux à deux q -orthogonaux d'après notre hypothèse de récurrence). D'où pour tout $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, on a :

$$\mathbf{u}_k \perp_q \mathbf{u}_j \iff \varphi(\mathbf{e}_k, \mathbf{u}_j) + \lambda_j q(\mathbf{u}_j) = 0. \quad (4.6)$$

Cette relation (4.6) montre que la détermination des λ_j ($1 \leq j \leq k-1$) tel que nous le souhaitons est possible (et unique) dès que $q(\mathbf{u}_j) \neq 0$ pour $1 \leq j \leq k-1$. Montrons que nous sommes effectivement dans cette situation. Pour ce faire, introduisons la restriction q_{k-1} de la forme quadratique q au sous-espace vectoriel $E_{k-1} := \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{k-1})$ de E ; soit $q_{k-1} := q|_{\text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{k-1})}$, qui constitue donc une forme quadratique sur $E_{k-1} = \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{k-1}) = \text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1})$. Nous constatons que la matrice associée à q_{k-1} relativement à la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{k-1})$ de E_{k-1} est $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k-1}$, qui est de déterminant $D_{k-1} \neq 0$. Donc q_{k-1} est non dégénérée. D'autre part, la matrice associée à q_{k-1} relativement à la base ⁽⁶⁾ $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1})$ de E_{k-1} est $\text{diag}(q(\mathbf{u}_1), q(\mathbf{u}_2), \dots, q(\mathbf{u}_{k-1}))$ (puisque les vecteurs $\mathbf{u}_i, 1 \leq i \leq k-1$, sont deux à deux q -orthogonaux), qui est de déterminant $q(\mathbf{u}_1)q(\mathbf{u}_2) \cdots q(\mathbf{u}_{k-1})$. Mais puisque nous venons de voir que q_{k-1} est non dégénérée, on a certainement $q(\mathbf{u}_1)q(\mathbf{u}_2) \cdots q(\mathbf{u}_{k-1}) \neq 0$; ce qui assure que $q(\mathbf{u}_j) \neq 0$ pour tout $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, comme nous l'avons prétendu. Par conséquent, on peut prendre pour tout $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$:

(6). $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1})$ est effectivement une base de E_{k-1} car elle est génératrice minimale de cet espace.

$$\lambda_j = -\frac{\varphi(\mathbf{e}_k, \mathbf{u}_j)}{q(\mathbf{u}_j)}.$$

Ce qui permet d'avoir (en vertu de (4.6)) : $\mathbf{u}_k \perp_q \mathbf{u}_j$ pour tout $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. Cette récurrence ainsi achevée nous fournit une famille q -orthogonale $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ de E , satisfaisant :

$$\text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k) = \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k) \quad \text{pour tout } k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

En particulier, on a (en prenant $k = n$) :

$$\text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) = \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = E.$$

Ainsi $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ est une famille génératrice de E ; mais comme elle est de surplus minimale (puisque $\dim E = n$), elle constitue même une base de E . D'où $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ est une base q -orthogonale de E .

Reprenons maintenant nos notations de ci-haut en posant plus généralement pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$E_k := \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k) = \text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$$

et

$$q_k := q|_{E_k}.$$

Constatons que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$ constitue une base de E_k , étant donné qu'elle est génératrice minimale de E_k . Pour $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, les matrices associées à la forme quadratique q_k relativement aux bases $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k)$ et $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$ de E_k sont respectivement $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ et $\text{diag}(q(\mathbf{u}_1), q(\mathbf{u}_2), \dots, q(\mathbf{u}_k))$. Ces deux dernières matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont donc congruentes; ce qui s'exprime matriciellement par l'existence d'une matrice $P_k \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ (qui n'est rien d'autre que la matrice de passage de la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k)$ de l'espace E_k vers la base $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$ du même espace) pour laquelle on ait :

$$\text{diag}(q(\mathbf{u}_1), q(\mathbf{u}_2), \dots, q(\mathbf{u}_k)) = {}^t P_k \cdot (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k} \cdot P_k.$$

En prenant les déterminants des deux membres de cette dernière égalité, on obtient que :

$$q(\mathbf{u}_1)q(\mathbf{u}_2) \cdots q(\mathbf{u}_k) = D_k \cdot (\det P_k)^2$$

(pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$). Il résulte de cette dernière formule que l'on a pour tout $k \in \{2, 3, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} q(\mathbf{u}_k) &= \frac{q(\mathbf{u}_1)q(\mathbf{u}_2)\cdots q(\mathbf{u}_k)}{q(\mathbf{u}_1)q(\mathbf{u}_2)\cdots q(\mathbf{u}_{k-1})} \\ &= \frac{D_k (\det P_k)^2}{D_{k-1} (\det P_{k-1})^2} \\ &= \frac{D_k}{D_{k-1}} \left(\frac{\det P_k}{\det P_{k-1}} \right)^2. \end{aligned}$$

D'où (en passant aux signes) :

$$\operatorname{sgn}(q(\mathbf{u}_k)) = \operatorname{sgn}\left(\frac{D_k}{D_{k-1}}\right) \quad (\forall k \in \{2, 3, \dots, n\}).$$

Mais puisque $D_0 = 1$ et $q(\mathbf{u}_1) = D_1(\det P_1)^2$ (d'après ce qui précède) alors cette dernière identité reste valable pour $k = 1$ aussi. On a donc pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\operatorname{sgn}(q(\mathbf{u}_k)) = \operatorname{sgn}\left(\frac{D_k}{D_{k-1}}\right). \quad (4.7)$$

Enfin, puisque les réels $q(\mathbf{u}_k)$ ($1 \leq k \leq n$) sont tous non nuls (voir ce qui précède) alors la signature de q est le couple $(n - s, s)$, avec s est le nombre de réels $q(\mathbf{u}_k)$ ($1 \leq k \leq n$) qui sont strictement négatifs. Mais d'après (4.7), s est aussi égale au nombre de changements de signes dans la suite réelle ordonnée D_0, D_1, \dots, D_n . Ainsi s'achève cette démonstration. ■

Nous déduisons du théorème 4.7 un critère pratique sur la positive définition d'une forme bilinéaire symétrique réelle (en dimension finie) :

COROLLAIRE 4.8 (CRITÈRE DE SYLVESTER).— Soient n un entier strictement positif, E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n et \mathcal{B} une base de E . Soit aussi f une forme bilinéaire symétrique sur E et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice qui lui est associée relativement à \mathcal{B} . Alors f est définie positive si et seulement si tous les mineurs principaux dominants de A sont strictement positifs ; c'est-à-dire si et seulement si l'on a :

$$\det \left((a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k} \right) > 0 \quad (\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}).$$

Démonstration.— Soit q la forme quadratique associée à f . Posons $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ et pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_k &:= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k), \\ E_k &:= \operatorname{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k), \\ f_k &:= f|_{E_k}, \\ A_k &:= (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}, \\ D_k &:= \det A_k. \end{aligned}$$

Pour $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, constater que f_k est une forme bilinéaire symétrique sur le \mathbb{R} -sous-espace vectoriel E_k de E et A_k est la matrice qui lui est associée relativement à la base \mathcal{B}_k de E_k .

• (\Rightarrow) Supposons que f est définie positive. Il en est de même donc de toutes ses restrictions $f|_{E_k} = f_k$ ($1 \leq k \leq n$). Ce qui entraîne (à fortiori) que les formes bilinéaires symétriques f_k sur E_k ($1 \leq k \leq n$) sont toutes non dégénérées et que, par conséquent, leurs matrices associées A_k sont toutes non singulières. Les déterminants de ces matrices A_k (qui sont les réels D_k) sont donc tous non nuls. Ce dernier fait permet d'appliquer le théorème 4.7 et d'obtenir que la signature de la forme quadratique q associée à f est $(n - s, s)$, où s est le nombre de changements de signes dans la suite réelle ordonnée $1, D_1, D_2, \dots, D_n$. Mais comme f est supposée définie positive, on doit avoir $(n - s, s) = (n, 0)$ (en vertu du corollaire 4.5). D'où l'on tire que $s = 0$. Mais cela signifie que les réels D_k ($1 \leq k \leq n$) sont tous strictement positifs, comme il fallait le prouver.

• (\Leftarrow) Inversement, supposons que l'on a $D_k > 0$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Le théorème 4.7 est donc applicable à la forme quadratique q associée à f et l'on obtient que $\text{sgn}(q) = (n, 0)$. Ce qui montre (en vertu du corollaire 4.5) que f est définie positive, comme il fallait le prouver. Le corollaire est démontré. ■

Exemple 4.V.— En utilisant la méthode des déterminants de Sylvester, déterminer la signature de la forme quadratique réelle q de \mathbb{R}^4 , donnée par :

$$q \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right) := -x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2xy + 2xz + 4yz + 4yt + 4zt \quad (\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4).$$

La matrice associée à q relativement à la base canonique de \mathbb{R}^4 est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les mineurs principaux dominants de cette matrice sont donc :

$$D_0 = 1, \quad D_1 = \det(-1) = -1, \quad D_2 = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2, \quad D_3 = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 5 \quad \text{et} \\ D_4 = \det A = -3.$$

On voit alors que ces mineurs sont tous non nuls et que le nombre de changements de signes dans la suite réelle ordonnée $(D_0, D_1, D_2, D_3, D_4) = (1, -1, -2, 5, -3)$ est $s = 3$. Ce qui entraîne (d'après le théorème 4.7) que la signature de q est égale à :

$$\operatorname{sgn}(q) = (\dim \mathbb{R}^4 - s, s) = (4 - 3, 3) = \boxed{(1, 3)}. \quad \blacksquare$$

Remarque 4.IV.— On peut montrer que lorsqu'une forme quadratique d'un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie est **non dégénérée**, il est toujours possible de déterminer sa signature par application du théorème 4.7. Plus précisément, si la représentation matricielle choisie pour une telle forme quadratique q possède un certain mineur principal dominant nul (ce qui rend le théorème 4.7 inapplicable) alors il est possible (et facile) de trouver une autre représentation matricielle de q qui a tous ses mineurs principaux dominants non nuls. Traitons à titre d'exemple la forme quadratique de \mathbb{R}^3 définie par :

$$q \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) := x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 2yz.$$

La matrice associée à q relativement à la base canonique $\mathcal{B}_c = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de \mathbb{R}^3 est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or le mineur principal dominant d'ordre 2 de A est nul; ce qui rend le théorème 4.7 inapplicable! Cependant, la matrice associée à q relativement à la base ordonnée $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)$ est :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

et l'on constate que les mineurs principaux dominants de B sont $D_0 = 1, D_1 = 4, D_2 = 3$ et $D_3 = -1$ et sont tous non nuls! Le théorème 4.7 s'applique donc à B et l'on obtient que $\operatorname{sgn}(q) = (2, 1)$.



Exercices

Exercice 4.1.

1. Soit q la forme quadratique de \mathbb{R}^3 définie par :

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3, \quad \left(\forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right).$$

- (a) Réduire q par la méthode de Gauss.
 - (b) Déterminer la nouvelle base de \mathbb{R}^3 suivant laquelle q est représentée par une matrice diagonale D qu'on précisera.
 - (c) En déduire que q est non dégénérée. q est-elle positive? définie positive?
2. Reprendre les mêmes questions avec la forme quadratique q' de \mathbb{R}^3 définie par :

$$q'(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \quad \left(\forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right).$$

Exercice 4.2 (Interrogation 2012-2013).

Soit $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$q(\mathbf{x}) := x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \quad \left(\forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right).$$

1. Justifier rapidement le fait que q est une forme quadratique sur \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer la forme polaire associée à q puis la matrice associée à q relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 .
3. Réduire q par la méthode de Gauss.
4. En déduire le rang et la signature de q .
— Cette forme quadratique q est-elle positive? justifier.
5. Déterminer une base de \mathbb{R}^3 qui soit orthogonale pour q .
6. Soit $q' : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par :

$$q'(\mathbf{x}) := x_1x_2 - x_3^2 \quad \left(\forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right).$$

— Les deux formes quadratiques q et q' sont-elles équivalentes? Justifier.

Exercice 4.3. Soient α un paramètre réel et f la forme bilinéaire symétrique de \mathbb{R}^3 , donnée par :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_1 + x_3)(y_1 + y_3) + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3) - \alpha(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)$$

(pour tous $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = {}^t(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$).

— Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f est un produit scalaire sur \mathbb{R}^3 .

Exercice 4.4. Etudier l'équivalence des deux formes quadratiques suivantes sur \mathbb{C} puis sur \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} q_1(\mathbf{x}) &= x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 \\ q_2(\mathbf{x}) &= -x_1^2 - 4x_2^2 - 9x_3^2 + 4x_1x_2 + 10x_1x_3 + 12x_2x_3, \end{aligned}$$

pour tout $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou \mathbb{R}).

Exercice 4.5. Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique φ et $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille de E , **orthogonale** pour φ et constituée de vecteurs **non isotropes**.

— Montrer que \mathcal{F} est libre.

Exercice 4.6. Réduire chacune des deux formes quadratiques suivantes de \mathbb{R}^n et en déduire le rang de chacune d'entre elles.

1. $q(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (i + j - 1)x_i x_j$,
2. $q(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \min(i, j)x_i x_j$

($\forall \mathbf{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$).

☞ Pour la seconde forme quadratique, on peut commencer par étudier les cas $n = 1, 2, 3$ avant de généraliser.

Exercice 4.7. En utilisant le critère de Sylvester (c'est-à-dire le corollaire 4.8), montrer que la forme bilinéaire symétrique sur \mathbb{R}^3 , définie par :

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) := 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + 2(x_1y_2 + x_2y_1) + (x_1y_3 + x_3y_1) + 3(x_2y_3 + x_3y_2)$$


($\forall {}^t(x_1, x_2, x_3), {}^t(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$) est définie positive.

Exercice 4.8. Soient n un entier strictement positif et t un paramètre réel. Considérons la matrice réelle symétrique d'ordre n , définie par :

$$A_n(t) := \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 & t^4 & \dots & t^n \\ t & 1 & t & t^2 & t^3 & \dots & t^{n-1} \\ t^2 & t & 1 & t & t^2 & \dots & t^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ t^{n-2} & t^{n-3} & \dots & t & 1 & t & t^2 \\ t^{n-1} & t^{n-2} & \dots & t^2 & t & 1 & t \\ t^n & t^{n-1} & \dots & t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix}$$

et désignons par $q_n(t)$ la forme quadratique de \mathbb{R}^n que représente $A_n(t)$ relativement à la base canonique de \mathbb{R}^n .

— En distinguant les valeurs de t , déterminer la signature de $q_n(t)$.

 Utiliser le critère de Sylvester tant que c'est possible et traiter les cas particuliers restants par la méthode de réduction de Gauss.

Exercice 4.9 (Matrice de Hilbert). Soient n un entier strictement positif et \mathcal{H} la matrice réelle symétrique d'ordre n définie par :

$$\mathcal{H} := \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

— Montrer par deux méthodes différentes que \mathcal{H} est définie positive :

1^{ère} méthode : Utiliser le critère de Sylvester (c'est-à-dire le corollaire 4.8).

2^{nde} méthode : (pour plus tard). Montrer que \mathcal{H} est une matrice de Gram et utiliser les résultats du théorème 6.5.



Chapitre 5

Espaces euclidiens, espaces préhilbertiens réels et espaces de Hilbert réels

Sommaire

5.1	Norme associée à un produit scalaire	66
5.2	Orthogonalité dans un espace préhilbertien	70
5.2.1	Extension de certains théorèmes classiques de géométrie euclidienne	70
5.2.2	Construction d'une famille orthonormée d'un espace préhilbertien	73
	L'algorithme de Gram-Schmidt	73
	Exercices	79

Dans ce chapitre, on se limite uniquement aux espaces vectoriels réels.

5.1 Norme associée à un produit scalaire

Définitions 5.I.—

- On appelle *espace préhilbertien réel* (ou simplement *espace préhilbertien* s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps \mathbb{R} utilisé) tout \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
- On appelle *espace euclidien* tout espace préhilbertien réel de dimension finie.

— Soient E un espace préhilbertien réel et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire associé. On définit l'application :

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{x} &\longmapsto \|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} . \end{aligned}$$

On montrera plus loin que $\|\cdot\|$ constitue une norme sur E , ce qui justifie d'ailleurs sa notation. Cette norme $\|\cdot\|$ s'appelle *la norme associée* au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de E .

Sauf mention contraire, le produit scalaire d'un espace préhilbertien est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et sa norme associée est notée $\|\cdot\|$.

Dans ce qui va suivre, on donnera les propriétés fondamentales vérifiées par l'application $\|\cdot\|$.

PROPOSITION 5.1 (INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ).— Soit E un espace préhilbertien. Alors, pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, on a :

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \quad (5.1)$$

De plus, cette inégalité devient une égalité si et seulement si \mathbf{x} et \mathbf{y} sont colinéaires.

Appellation.— L'inégalité (5.1) est connue sous le nom de *l'inégalité de Cauchy-Schwarz* ou simplement *l'inégalité de Schwarz* ⁽¹⁾.

Démonstration de la proposition 5.1.— Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ fixés. Si $\mathbf{x} = \mathbf{0}_E$, l'énoncé de la proposition est immédiat. Supposons pour la suite que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_E$ et définissons pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$P(\lambda) := \langle \lambda \mathbf{x} + \mathbf{y}, \lambda \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle .$$

La positivité du produit scalaire montre qu'on a : $P(\lambda) \geq 0$ ($\forall \lambda \in \mathbb{R}$). D'autre part, en utilisant la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \lambda^2 + 2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \lambda + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 \lambda^2 + 2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \lambda + \|\mathbf{y}\|^2 , \end{aligned}$$

ce qui montre que P est un polynôme de second degré ⁽²⁾ en λ . Ainsi, le fait que P est toujours positif (donc de signe constant) entraîne que son

(1). Dans les pays de l'ex-union soviétique, l'inégalité de Schwarz est appelée : *l'inégalité de Bunyakovski-Schwarz*.

(2). Le polynôme P est de second degré car le coefficient de λ^2 dans P est $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$, qui est non nul en vertu de notre supposition « $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_E$ ».

discriminant réduit $\Delta' = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 - \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2$ est négatif; soit $\Delta' \leq 0$. Ce qui donne immédiatement l'inégalité requise :

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|.$$

— Maintenant, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité équivaut à dire que $\Delta' = 0$, ce qui équivaut à dire ⁽³⁾ que P possède au moins une racine réelle λ_0 (qui est nécessairement double). On a par suite :

$$P(\lambda_0) = \langle \lambda_0 \mathbf{x} + \mathbf{y}, \lambda_0 \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = 0.$$

Ce qui équivaut (en vertu de la définition du produit scalaire) à $\lambda_0 \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}_E$, exprimant le fait que \mathbf{x} et \mathbf{y} sont colinéaires. Ceci complète la preuve de la proposition. ■

PROPOSITION 5.2 (INÉGALITÉ DE MINKOWSKI).— Soit E un espace préhilbertien. Alors, pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, on a :

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \tag{5.2}$$

Appellation.— L'inégalité (5.2) est connu sous le nom de *l'inégalité de Minkowski*.

Démonstration de la proposition 5.2.— Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$. En se servant de la bilinéarité et de la symétrie du produit scalaire, on a :

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2.$$

Mais comme $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$ (en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz), il s'ensuit que :

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.$$

D'où :

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|,$$

comme il fallait le prouver. La proposition est démontrée. ■

COROLLAIRE 5.3.— Soit E un espace préhilbertien. L'application $\|\cdot\|$ constitue une norme sur E .

Démonstration.— Il s'agit de montrer que $\|\cdot\|$ satisfait les 3 axiomes d'une norme sur un \mathbb{R} -espace vectoriel, qui sont :

(3). L'implication directe est claire. Montrons l'implication inverse. Supposons que P possède au moins une racine réelle. Dans ce cas, le discriminant réduit Δ' de P est forcément positif. Mais comme on sait aussi que Δ' est négatif, alors $\Delta' = 0$. CQFD.

$$(i) \quad \forall \mathbf{x} \in E : \|\mathbf{x}\| \geq 0 \text{ et } \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}_E.$$

$$(ii) \quad \forall \mathbf{x} \in E \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|.$$

$$(iii) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E : \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

La satisfaction de l'axiome (i) résulte immédiatement de la définition et de la positivité du produit scalaire. L'axiome (iii) n'est rien d'autre que l'inégalité de Minkowski (5.2). Montrons que $\|\cdot\|$ satisfait l'axiome (ii). En se servant de la bilinéarité du produit scalaire, on a pour tout $\mathbf{x} \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\|\lambda \mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \|\mathbf{x}\|^2} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{\|\mathbf{x}\|^2} = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|,$$

comme il fallait le prouver. Les axiomes (i), (ii) et (iii) sont ainsi tous satisfaits par l'application $\|\cdot\|$, ce qui montre que cette dernière constitue bien une norme sur E . Le corollaire est démontré. ■

Remarque 5.I.— Compte tenu du corollaire 5.3, on considère un espace préhilbertien comme un cas particulier d'un \mathbb{R} -espace vectoriel normé.

Définition 5.II.— On appelle *espace de Hilbert réel* (ou simplement *espace de Hilbert* s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps \mathbb{R} utilisé) tout *espace préhilbertien réel complet*⁽⁴⁾.

Exemple 5.I.—

1. Montrer que tout espace euclidien est de Hilbert.
2. Montrer que le \mathbb{R} -espace vectoriel $E := \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, défini par :

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x) dx \quad (\forall f, g \in E),$$

n'est pas de Hilbert.

1. Il suffit d'utiliser le résultat de topologie générale selon lequel « tout \mathbb{R} -espace vectoriel normé de dimension finie est de Banach ».

2. Considérons la suite $(f_n)_{n \geq 2}$ d'éléments de E , définie par :

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \\ n(x - \frac{1}{2}) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \end{cases} \quad (\forall n \geq 2, \forall x \in [0, 1]).$$

On montre aisément que $(f_n)_n$ est de Cauchy (pour la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$) mais qu'elle n'est pas convergente⁽⁵⁾ (dans E). ■

(4). Bien entendu, complet pour la norme associée à son produit scalaire.

5.2 Orthogonalité dans un espace préhilbertien

Les notions d'orthogonalité, de famille orthogonale (resp. orthonormée), de base orthogonale (resp. orthonormée) d'un \mathbb{R} -espace vectoriel, muni d'une forme bilinéaire symétrique, ont été déjà définies et étudiées au chapitre 3. Dans le cas (particulier) des espaces préhilbertiens, ces notions se rapprochent mieux des notions géométriques « concrètes » déjà connues sur \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 . Remarquer par exemple qu'une famille orthonormée d'un espace préhilbertien est une famille de vecteurs deux à deux orthogonaux, qui sont tous de norme égale à 1; ce qui est exactement la même notion connue en géométrie euclidienne classique. On doit comprendre donc que les notions d'espace euclidien et préhilbertien que nous découvrons dans ce polycopié ne sont que des généralisations abstraites (certes profondes) des notions classiques de géométrie euclidienne plane. On dit d'ailleurs que la géométrie de Hilbert n'est autre que la géométrie d'Euclide en dimension infinie!

5.2.1 Extension de certains théorèmes classiques de géométrie euclidienne

Nous commençons par étendre les théorèmes classiques de Pythagore et d'al-Kashi (en géométrie plane) aux espaces préhilbertiens.

THÉORÈME 5.4 (LE THÉORÈME DE PYTHAGORE).— Soient E un espace préhilbertien et \mathbf{x} et \mathbf{y} deux vecteurs de E . Alors, on a :

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \iff \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2.$$

Démonstration.— En utilisant la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire, on a :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit que :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \perp \mathbf{y} &\stackrel{\text{déf}}{\iff} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \\ &\iff \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \end{aligned}$$

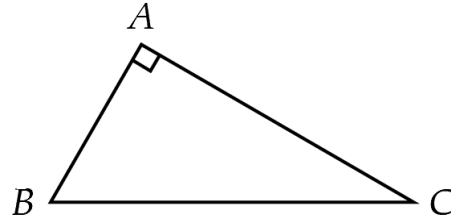
(5). Si l'on suppose que $(f_n)_n$ converge vers une certaine fonction $f \in E$, alors, compte tenu de sa continuité, f est forcément égale à 1 sur $[0, \frac{1}{2}]$ et égale à 0 sur $[\frac{1}{2}, 1]$; ce qui est absurde vis à vis de la valeur de f en $\frac{1}{2}$. Ceci conclut que la suite $(f_n)_n$ n'est pas convergente dans E .

$$\iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Le théorème est démontré. ■

Remarque 5.II.—

Pour retrouver le théorème de Pythagore classique sur un triangle (ABC) de sommet A , il suffit de prendre (dans le théorème 5.4) pour E le plan vectoriel euclidien portant le triangle (ABC) et pour x et y les vecteurs : $x = \overrightarrow{BA}$ et $y = \overrightarrow{AC}$.



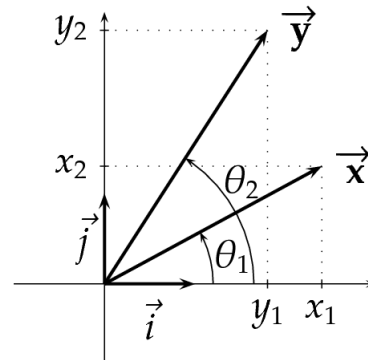
Le théorème de Pythagore :

Le triangle (ABC) est rectangle en A ssi : $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

L'écart angulaire non orienté de deux vecteurs d'un espace préhilbertien

Le cas $E = \mathbb{R}^2$.

Examinons d'abord le cas du plan euclidien $E = \mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique notée (\vec{i}, \vec{j}) et de son produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soient $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls de E . On introduit les deux angles orientés $\theta_1 := (\vec{i}, \vec{x})$ et $\theta_2 := (\vec{i}, \vec{y})$. L'écart angulaire non orienté de \vec{x} et \vec{y} est l'angle (non orienté) qui sépare \vec{x} et \vec{y} ; c'est donc l'angle $\theta = |\theta_2 - \theta_1| \in [0, \pi]$ (voir la figure ci-contre).



Pour déterminer θ , il suffit de déterminer son cosinus. Comme la fonction cosinus est paire, on a :

$$\cos \theta = \cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2.$$

Mais puisque :

$$\cos \theta_1 = \frac{x_1}{\|\vec{x}\|}, \quad \cos \theta_2 = \frac{y_1}{\|\vec{y}\|}, \quad \sin \theta_1 = \frac{x_2}{\|\vec{x}\|}, \quad \sin \theta_2 = \frac{y_2}{\|\vec{y}\|},$$

il s'ensuit que :

$$\cos \theta = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}.$$

D'où la précieuse formule :

$$\theta = \arccos \left(\frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \right) \quad (5.3)$$

qui permet de déterminer la mesure de θ .

De la formule (5.3) découle aussi la formule classique du produit scalaire :

$$\boxed{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos \theta}.$$

Le cas général (extension).

Soit E un espace préhilbertien et soient \mathbf{x} et \mathbf{y} deux vecteurs non nuls de E . En copiant sur (5.3), on définit l'écart angulaire non orienté de \mathbf{x} et \mathbf{y} , que l'on note $\widehat{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$, par :

$$\widehat{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} := \arccos \left(\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} \right). \quad (5.4)$$

Noter que l'expression du membre de droite de (5.4) est bien définie car $\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} \in [-1, 1]$ (en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Le lecteur doit donc comprendre que c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui a permis d'étendre la définition de l'écart angulaire de deux vecteurs aux espaces préhilbertiens quelconques.

Nous pouvons maintenant énoncer la généralisation du théorème d'al-Kashi à un espace préhilbertien quelconque.

THÉORÈME 5.5 (LE THÉORÈME D'AL-KASHI).— Soient E un espace préhilbertien et \mathbf{x} et \mathbf{y} deux vecteurs de E . Alors, on a :

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \cos \widehat{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}.$$

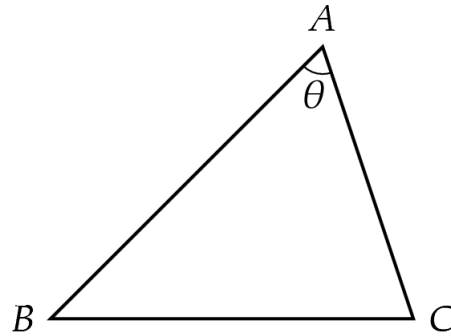
Démonstration.— En utilisant la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire, on a :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \left(\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} \right) \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \cos \widehat{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \quad (\text{d'après (5.4)}). \end{aligned}$$

Le théorème est démontré. ■

Remarque 5.III.—

Pour retrouver le théorème d'al-Kashi classique sur un triangle (ABC) de sommet A , il suffit de prendre (dans le théorème 5.5) pour E le plan vectoriel euclidien portant le triangle (ABC) et pour \mathbf{x} et \mathbf{y} les vecteurs : $\mathbf{x} = \overrightarrow{AB}$ et $\mathbf{y} = \overrightarrow{AC}$.

**Le théorème d'al-Kashi :**

Dans le triangle (ABC) , on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \theta.$$

5.2.2 Construction d'une famille orthonormée d'un espace préhilbertien

Soit E un espace préhilbertien. La détermination d'une famille (resp. base) orthonormée de E est très utile dans plusieurs calculs géométriques liés à E (produit scalaire, projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel, distance à un sous-espace vectoriel, etc). En fait, la méthode de Gauss (vue au chapitre 4) permet de construire de telles familles⁽⁶⁾ ; cependant cette démarche, plutôt algébrique que géométrique, manque généralement d'efficacité. Dans ce qui suit, nous découvrons une méthode géométrique récursive permettant de réaliser plus facilement cette construction. Il s'agit de la méthode connue sous le nom de *procédé de Gram-Schmidt* ou *algorithme de Gram-Schmidt*.

L'algorithme de Gram-Schmidt

Soient E un espace préhilbertien et $\mathcal{F} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ ($n \geq 1$) une famille libre de E . L'algorithme de Gram-Schmidt permet d'*orthonormaliser* la famille \mathcal{F} , c'est-à-dire de construire (à partir de \mathcal{F}) une nouvelle famille libre $\mathcal{G} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ qui soit orthonormée et qui engendre le même sous-espace vectoriel de E que \mathcal{F} . La nature récursive de l'algorithme fait que l'on a plus généralement :

$$\text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k) = \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k) \quad (\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}).$$

(6). La réduction de Gauss de la forme quadratique associée au produit scalaire de E , restreinte à un sous-espace de dimension finie F de E , fournit une base orthogonale de F . Il suffit de diviser chaque vecteur de cette base par sa norme pour obtenir une base orthonormée de F .

En prenant $k = n$, on obtient en particulier $\text{Vect}(\mathcal{G}) = \text{Vect}(\mathcal{F})$. On dit que \mathcal{G} est l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de \mathcal{F} .

Remarque 5.IV.— Si E est de dimension finie, l'algorithme de Gram-Schmidt construit, à partir d'une base quelconque de E , une base orthonormée de E .

Description de l'algorithme

On construit par récurrence sur k ($1 \leq k \leq n$) une famille $\mathcal{G} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ de E qui satisfait pour tout k :

- (1) La famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$ est orthonormée.
- (2) $\text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k) = \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k)$.
- Pour $k = 1$: Il suffit de prendre ⁽⁷⁾

$$\mathbf{u}_1 := \frac{\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{e}_1\|}.$$

Les conditions (1) et (2) sont ainsi bien satisfaites pour $k = 1$.

- Soit $k \in \{2, 3, \dots, n\}$: Supposons que l'on a construit une famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1})$ de E qui satisfait les propriétés souhaitées. On détermine un vecteur $\widehat{\mathbf{u}}_k$ de E , ayant la forme :

$$\widehat{\mathbf{u}}_k = \mathbf{e}_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \mathbf{u}_i \quad (\text{avec } \lambda_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, 2, \dots, k-1\}), \quad (5.5)$$

de sorte que la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}, \widehat{\mathbf{u}}_k)$ soit orthogonale. Puisque, d'après notre hypothèse de récurrence, la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1})$ est orthonormée (donc orthogonale), alors pour que la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}, \widehat{\mathbf{u}}_k)$ soit orthogonale il faut et il suffit que l'on ait :

$$\langle \widehat{\mathbf{u}}_k, \mathbf{u}_j \rangle = 0 \quad (\forall j \in \{1, 2, \dots, k-1\}).$$

Compte tenu de l'orthonormalité de la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1})$, on a pour tout $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\mathbf{u}}_k, \mathbf{u}_j \rangle &= \left\langle \mathbf{e}_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \right\rangle \\ &= \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{u}_j \rangle + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle \end{aligned}$$

(7). On peut prendre aussi $\mathbf{u}_1 = -\frac{\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{e}_1\|}$, mais ce ne serait pas l'algorithme de Gram-Schmidt!

$$\begin{aligned}
&= \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{u}_j \rangle + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \delta_{ij} \\
&= \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{u}_j \rangle + \lambda_j.
\end{aligned}$$

La condition $\langle \widehat{\mathbf{u}}_k, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ ($\forall j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$) équivaut donc à :

$$\lambda_j = -\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{u}_j \rangle \quad (\forall j \in \{1, 2, \dots, k-1\}).$$

En reportant ces valeurs (uniques) des réels λ_j ($j = 1, 2, \dots, k-1$) dans (5.5), on obtient la formule de Gram-Schmidt pour notre vecteur recherché $\widehat{\mathbf{u}}_k$:

$$\widehat{\mathbf{u}}_k = \mathbf{e}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i.$$

Il est important de signaler que ce vecteur $\widehat{\mathbf{u}}_k$ ne peut être nul. En effet, en supposant le contraire, on obtient que $\mathbf{e}_k \in \text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}) = \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{k-1})$ (en vertu de l'hypothèse de récurrence); ce qui contredit l'indépendance linéaire des vecteurs $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$.

Maintenant, puisque la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1})$ est orthonormée (d'après l'hypothèse de récurrence) et la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}, \widehat{\mathbf{u}}_k)$ est orthogonale (par construction), alors en définissant⁽⁸⁾ :

$$\mathbf{u}_k := \frac{\widehat{\mathbf{u}}_k}{\|\widehat{\mathbf{u}}_k\|},$$

on obtient une famille orthonormée $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{u}_k)$ de E . Enfin, en utilisant les définitions de \mathbf{u}_k et $\widehat{\mathbf{u}}_k$ ainsi que l'hypothèse de récurrence $\text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}) = \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{k-1})$, on a :

$$\begin{aligned}
\text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k) &= \text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}, \widehat{\mathbf{u}}_k) \\
&= \text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{e}_k) \\
&= \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{k-1}, \mathbf{e}_k).
\end{aligned}$$

Ainsi la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$ satisfait bien les deux conditions requises **(1)** et **(2)**. Ce qui permet de réitérer le procédé.

La dernière étape du procédé aboutit à une famille $\mathcal{G} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ de E qui est orthonormée et engendre le même sous-espace vectoriel de E que la famille considérée initialement $\mathcal{F} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$. En particulier, si \mathcal{F} est une base de E alors \mathcal{G} sera une base orthonormée de E .

(8). On peut prendre aussi $\mathbf{u}_k = -\frac{\widehat{\mathbf{u}}_k}{\|\widehat{\mathbf{u}}_k\|}$, mais ce ne serait pas l'algorithme de Gram-Schmidt!

Remarques 5.V.—

1. Dans la situation de l'algorithme de Gram-Schmidt décrit ci-dessus, on peut montrer que l'on a pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{u}_k \rangle > 0.$$

On montre de plus qu'il existe une **unique** famille **orthonormée** $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ de E satisfaisant aux deux conditions suivantes :

- $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) = \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k) \quad (\forall k \in \{1, 2, \dots, n\})$,
- $\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{v}_k \rangle > 0 \quad (\forall k \in \{1, 2, \dots, n\})$.

Cette famille est précisément l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la famille libre $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ de E . Voir l'exercice 5.15.

2. Nous verrons dans le prochain chapitre que la quantité :

$$\sum_{i=1}^{k-1} \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i$$

(rencontrée dans la formule de Gram-Schmidt ci-dessus) représente la *projection orthogonale* du vecteur \mathbf{e}_k sur le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}) = \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{k-1})$ de E (c'est-à-dire le vecteur de ce sous-espace qui soit le plus proche⁽⁹⁾ de \mathbf{e}_k). Ainsi vu, le procédé de Gram-Schmidt peut être considéré comme un procédé purement géométrique. L'illustration géométrique du procédé de Gram-Schmidt sera donnée au prochain chapitre.

Exemple 5.II.— On munit le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^3 de sa structure canonique d'espace euclidien (c'est-à-dire de son produit scalaire usuel).

1. Vérifier que les vecteurs $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ constituent une base de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la famille $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

1. On a $\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 = -1 \neq 0$ (on a développé le déterminant d'ordre 3 suivant sa deuxième ligne). Ce qui montre que la famille $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est libre. Mais puisque cette famille contient $3 = \dim \mathbb{R}^3$ vecteurs alors elle

(9). Au sens de la distance associée à la norme $\|\cdot\|$ de E .

constitue une base de \mathbb{R}^3 . C.Q.F.D.

2. Désignons par $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la famille libre $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de \mathbb{R}^3 . D'après l'algorithme de Gram-Schmidt, on a :

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{e}_1\|}.$$

Mais $\|\mathbf{e}_1\| = \sqrt{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle_{\text{us}}} = \sqrt{2}$. D'où $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1$; soit

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Par suite, on a :

$$\widehat{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{e}_2 - \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{u}_1 \rangle_{\text{us}} \mathbf{u}_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\widehat{\mathbf{u}}_2}{\|\widehat{\mathbf{u}}_2\|}.$$

Mais $\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{u}_1 \rangle_{\text{us}} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$. D'où :

$$\widehat{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{e}_2 - \frac{3}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que :

$$\|\widehat{\mathbf{u}}_2\| = \left| \frac{1}{2} \right| \cdot \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ce qui entraîne que $\mathbf{u}_2 = \frac{\widehat{\mathbf{u}}_2}{\|\widehat{\mathbf{u}}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; soit

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Par suite, on a :

$$\widehat{\mathbf{u}}_3 = \mathbf{e}_3 - \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{u}_1 \rangle_{\text{us}} \mathbf{u}_1 - \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{u}_2 \rangle_{\text{us}} \mathbf{u}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_3 = \frac{\widehat{\mathbf{u}}_3}{\|\widehat{\mathbf{u}}_3\|}.$$

Mais $\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{u}_1 \rangle_{\text{us}} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ et $\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{u}_2 \rangle_{\text{us}} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$.
D'où :

$$\widehat{\mathbf{u}}_3 = \mathbf{e}_3 - \sqrt{2}\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que :

$$\|\widehat{\mathbf{u}}_3\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 1.$$

Ce qui entraîne que $\mathbf{u}_3 = \frac{\widehat{\mathbf{u}}_3}{\|\widehat{\mathbf{u}}_3\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; soit

$$\boxed{\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}.$$

Conclusion : L'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la famille $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, avec :

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notons enfin que puisque la famille $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 alors la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ est une base orthonormée de \mathbb{R}^3 . ■



Exercices

Exercice 5.1. Soient E un espace euclidien et F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

1. Montrer les deux formules suivantes :

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp,$$

$$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

2. En déduire que si F et G sont supplémentaires dans E alors il en est de même pour F^\perp et G^\perp .

Exercice 5.2.

1. Montrer que pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2).$$

2. Soient x, y et z trois réels tels que : $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1$. Montrer que l'on a :

$$(x + y + z)^2 \leq \frac{11}{6}.$$

3. Soient x_1, x_2, \dots, x_n des nombres réels strictement positifs tels que :

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1. \text{ Montrer que :}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2.$$

— Étudier le cas d'égalité.

4. Soient f et g deux fonctions réelles continues sur $[0, 1]$. Montrer que l'on a :

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2 dx \int_0^1 g(x)^2 dx.$$

— Etudier le cas d'égalité.

Exercice 5.3.

1. Soit E un espace préhilbertien. Montrer l'égalité du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (\forall x, y \in E).$$

2. En déduire que la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_\infty := \max(|x|, |y|) \quad (\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2)$$

n'est pas une norme euclidienne (c'est-à-dire qu'elle ne provient pas d'un produit scalaire).

Exercice 5.4. Soient E un espace euclidien et $(\mathbf{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de vecteurs unitaires⁽¹⁰⁾ de E tels que :

$$\forall \mathbf{x} \in E : \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle^2.$$

— Montrer que $(\mathbf{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$ constitue une base orthonormée de E .

Exercice 5.5. Soient n un entier strictement positif et E un espace euclidien de dimension n . Soient aussi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base orthonormée de E et $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ une famille (ordonnée) de vecteurs de E , satisfaisant :

$$\sum_{k=1}^n \|\mathbf{x}_k - \mathbf{e}_k\|^2 < 1.$$

— Montrer que $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ constitue une base de E .

Exercice 5.6. Soient E un espace euclidien et $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ ($n \in \mathbb{N}^*$) une famille de vecteurs de E , satisfaisant aux deux propriétés suivantes :

- $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle < 0$ pour tous $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$.
- $\exists \mathbf{x} \in E$ tel que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle > 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

— Montrer alors que la famille $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ est libre.

Exercice 5.7. Soit E un espace préhilbertien. On appelle « isométrie » de E , toute application de E dans E qui conserve les distances (c'est-à-dire toute application $f : E \rightarrow E$, vérifiant : $d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$).

(10). Un vecteur unitaire est un vecteur de norme 1.

1. Montrer que toute isométrie f de E , vérifiant $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, conserve aussi les normes et les produits scalaires.
2. En déduire que toute isométrie f de E , vérifiant $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, est forcément un automorphisme de E .

Exercice 5.8. Soient E un espace euclidien de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$) et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de E . Soit aussi f un automorphisme de E . On suppose que f conserve l'orthogonalité; c'est-à-dire que f vérifie la propriété :

$$\forall x, y \in E : \quad x \perp y \implies f(x) \perp f(y).$$

1. Montrer que la famille $(f(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ constitue une base orthogonale de E .
2. Montrer que pour tous $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a :

$$(f(e_i) + f(e_j)) \perp (f(e_i) - f(e_j)).$$

3. En déduire que les vecteurs $f(e_i)$ ($1 \leq i \leq n$) sont tous de même norme. **Désignons par k cette norme commune.**
4. Montrer que pour tout $x \in E$, on a :

$$\|f(x)\| = k \|x\|.$$

(On dit que f est une similitude de rapport k).

Exercice 5.9. On munit \mathbb{R}^5 de sa structure canonique d'espace euclidien. Soit F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^5 engendré par les deux vecteurs :

$$\mathbf{u} = {}^t(1, 2, 1, 1, 1) \text{ et } \mathbf{v} = {}^t(1, -1, 1, 0, 3).$$

— Déterminer une base orthonormée pour F et une base orthonormée pour F^\perp .

Exercice 5.10. On munit $\mathbb{R}[x]$ du produit scalaire \langle , \rangle défini par :

$$\langle P, Q \rangle := \int_0^1 P(x)Q(x) dx \quad (\forall P, Q \in \mathbb{R}[x]).$$

— Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[x]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 5.11 (Interrogation 2012-2013). On note par E le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Soit $\langle , \rangle : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f'(x)g'(x) dx + f(0)g(0) \quad (\forall f, g \in E).$$

1. Montrer que \langle , \rangle constitue un produit scalaire sur E .
2. Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la famille libre (P_0, P_1, P_2) , avec $P_0(x) = x - 1$, $P_1(x) = x$ et $P_2(x) = x^2$.

Exercice 5.12 (Examen 2012-2013).

Pour ce qui suit, on munit le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ de l'application $\langle , \rangle : \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\langle P, Q \rangle := P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P'(0)Q'(0) \quad (\forall P, Q \in \mathbb{R}_3[X]).$$

1. Montrer que \langle , \rangle constitue un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base orthonormée du sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 5.13 (Rattrapage 2012-2013).

Pour ce qui suit, on munit le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ de l'application $\langle , \rangle : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\langle P, Q \rangle := P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1) \quad (\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X]).$$

1. Montrer que \langle , \rangle constitue un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 5.14. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et ω une fonction continue et strictement positive sur l'intervalle $[a, b]$. Considérons l'application $\langle , \rangle : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\langle P, Q \rangle := \int_a^b P(x)Q(x)\omega(x) dx \quad (\forall P, Q \in \mathbb{R}[X]).$$

1. Montrer que \langle , \rangle constitue un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer qu'il existe une suite polynomiale $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, orthonormée pour \langle , \rangle et telle que $\deg P_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. **Pour toute la suite, on fixe une telle suite polynomiale $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$.**
3. Montrer que la suite polynomiale $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait une relation récurrente de la forme ⁽¹¹⁾ :

$$P_{n+2}(X) = (\alpha_n X + \beta_n)P_{n+1}(X) + \gamma_n P_n(X) \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

avec $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites réelles, $(\alpha_n)_n$ étant strictement positive et $(\gamma_n)_n$ étant strictement négative.

(11). Cette formule s'appelle en anglais « the three-term recurrence relation ».

\square Pour $n \in \mathbb{N}$ donné, montrer que le polynôme $X P_{n+1}(X)$ s'exprime comme combinaison linéaire (à coefficients réels) des polynômes $P_0, P_1, \dots, P_n, P_{n+1}, P_{n+2}$, puis que les coefficients de cette combinaison linéaire sont nuls sauf peut être ceux de P_n, P_{n+1} et P_{n+2} .

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n est simplement scindé ⁽¹²⁾ sur \mathbb{R} et que ses zéros appartiennent tous à l'intervalle $]a, b[$.

\square Pour $n \in \mathbb{N}$ donné, raisonner sur le produit scalaire de P_n avec le polynôme $\prod_i (X - x_i)$, où les x_i sont les zéros réels deux à deux distincts de P_n , appartenant à l'intervalle $]a, b[$ et ayant pour ordres de multiplicité des nombres impairs.

Exercice 5.15. Soient n un entier strictement positif et E un espace préhilbertien réel de dimension au moins égale à n . Soient aussi $\mathcal{F} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ une famille libre de E et $\mathcal{G} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ son orthonormalisée de Gram-Schmidt.

1. Montrer que l'on a pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{u}_k \rangle = \|\widehat{\mathbf{u}}_k\| > 0$$

(voir la description de l'algorithme de Gram-Schmidt pour la définition de $\widehat{\mathbf{u}}_k$).

2. Montrer qu'il existe une **unique** famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ de vecteurs de E qui satisfait les trois propriétés suivantes :
- $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ est orthonormée,
 - $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) = \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k) \quad (\forall k \in \{1, 2, \dots, n\})$,
 - $\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{v}_k \rangle > 0 \quad (\forall k \in \{1, 2, \dots, n\})$.

(Bien entendu, cette famille n'est autre que l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de \mathcal{F}).

\square Supposer l'existence de deux familles de vecteurs de E satisfaisant ces trois propriétés et exprimer les vecteurs de l'une de ces deux familles comme combinaisons linéaires des vecteurs de l'autre.


Exercice 5.16 (Décomposition de Cholesky).

Soient n un entier strictement positif et A une matrice symétrique définie positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.


(12). C'est-à-dire « scindé à racines simples ».

1. Montrer l'existence d'une matrice triangulaire supérieure T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à coefficients diagonaux positifs, fournissant la décomposition (dite **de Cholesky**) suivante de la matrice A :

$$A = {}^t T T.$$

 Munir le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^n du produit scalaire \langle , \rangle dont la matrice associée relativement à sa base canonique \mathcal{C} est A . Ensuite, considérer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt \mathcal{G} de \mathcal{C} relativement à ce produit scalaire (\mathcal{G} constituera donc une nouvelle base de \mathbb{R}^n). Enfin, écrire la formule de changement de base pour la représentation matricielle de la forme bilinéaire symétrique \langle , \rangle de \mathbb{R}^n relativement aux deux bases \mathcal{C} et \mathcal{G} et en tirer le résultat requis. Pour établir la positivité des coefficients diagonaux de la matrice T (ainsi obtenue), vous pouvez vous appuyer sur le résultat du point 1. de l'exercice 5.15.

2. Montrer l'unicité d'une telle matrice T .

 Supposer qu'il existe deux matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux positifs T et S satisfaisant $A = {}^t T T = {}^t S S$ et montrer que la matrice $D := S T^{-1}$ est forcément diagonale à coefficients diagonaux positifs. En constatant de plus que ${}^t D D = I_n$, conclure que $D = I_n$, puis que $T = S$.



Chapitre 6

Projections orthogonales dans un espace préhilbertien réel

Sommaire

6.1	Projection sur un sous-espace parallèlement à un autre sous-espace	85
6.2	Projections orthogonales	87
6.3	Distance d'un point par rapport à un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien	89
6.4	Interprétation géométrique de l'algorithme de Gram-Schmidt	95
	Exercices	97

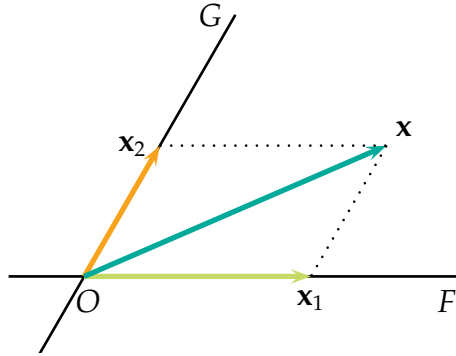
6.1 Projection sur un sous-espace parallèlement à un autre sous-espace

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E (i.e., $F \oplus G = E$).

Définition 6.I.— On appelle *projection* (ou *projecteur*) sur F parallèlement à G l'application $p : E \rightarrow E$ qui associe à tout vecteur x de E , se décomposant de manière unique comme $x = x_1 + x_2$ (avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$), le vecteur x_1 de F .

— Il est facile de voir que p est linéaire; donc p constitue un endomorphisme de E .

Illustration géométrique.



Quelques propriétés immédiates.— La projection p sur F parallèlement à G satisfait les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Im } p &= F, \\ \text{Ker } p &= G, \\ p^2 &= p. \end{aligned}$$

La dernière propriété constitue en fait une caractérisation des projections, comme le confirme la proposition suivante :

PROPOSITION 6.1.— *Un endomorphisme f de E est une projection si et seulement s'il vérifie $f^2 = f$. De plus, dans un tel cas, f est précisément la projection sur $\text{Im } f$ parallèlement à $\text{Ker } f$.*

Démonstration.— Soit f un endomorphisme de E . Si f est une projection, on a bien (d'après les propriétés ci-dessus) : $f^2 = f$. Inversement, supposons que $f^2 = f$ et montrons que f est une projection sur un certain sous-espace vectoriel F de E parallèlement à un certain autre sous-espace vectoriel G de E (supplémentaire à F). Nous allons montrer cela précisément pour $F = \text{Im } f$ et $G = \text{Ker } f$. Montrons d'abord que $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ sont supplémentaires dans E (i.e., $\text{Im } f \oplus \text{Ker } f = E$) ; ce qui équivaut à montrer que $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\}$ et $\text{Im } f + \text{Ker } f = E$. Comme les inclusions $\{0_E\} \subset \text{Im } f \cap \text{Ker } f$ et $\text{Im } f + \text{Ker } f \subset E$ sont triviales (car $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ sont des sous-espaces vectoriels de E), il s'agit juste de montrer les deux inclusions : $\text{Im } f \cap \text{Ker } f \subset \{0_E\}$ et $E \subset \text{Im } f + \text{Ker } f$.

- Montrons que $\text{Im } f \cap \text{Ker } f \subset \{0_E\}$. Soit $x \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$. Le fait que $x \in \text{Im } f$ entraîne l'existence d'un $u \in E$ tel que $x = f(u)$. D'autre part, le

fait que $\mathbf{x} \in \text{Ker } f$ entraîne que l'on a $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_E$. En combinant et en utilisant le fait que $f^2 = f$, on a :

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{u}) = f^2(\mathbf{u}) = f(f(\mathbf{u})) = f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_E.$$

Autrement dit $\mathbf{x} \in \{\mathbf{0}_E\}$. D'où l'inclusion $\text{Im } f \cap \text{Ker } f \subset \{\mathbf{0}_E\}$.

• Montrons maintenant l'inclusion $E \subset \text{Im } f + \text{Ker } f$. Soit $x \in E$ quelconque et posons $\mathbf{x}_1 = f(\mathbf{x})$ et $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x} - f(\mathbf{x})$. On a bien $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_1 \in \text{Im } f$ et $f(\mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x} - f(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}) - f^2(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_E$ (car f est linéaire et $f^2 = f$), entraînant que $\mathbf{x}_2 \in \text{Ker } f$. D'où $\mathbf{x} \in \text{Im } f + \text{Ker } f$. L'inclusion $E \subset \text{Im } f + \text{Ker } f$ en résulte.

Le fait que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires dans E est ainsi confirmé. De plus, la décomposition unique d'un vecteur \mathbf{x} de E sous la forme $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, avec $\mathbf{x}_1 \in \text{Im } f$ et $\mathbf{x}_2 \in \text{Ker } f$, est précisément donnée par $\mathbf{x}_1 = f(\mathbf{x})$ et $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x} - f(\mathbf{x})$. L'endomorphisme f (i.e., la correspondance $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_1$) est donc identique à la projection sur $\text{Im } f$ parallèlement à $\text{Ker } f$. La preuve de la proposition est complète. ■

6.2 Projections orthogonales

Soit E un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire associé est désigné par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme sous-jacente par $\|\cdot\|$. Soit aussi F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** de E .

PROPOSITION 6.2.— On a :

$$F \oplus F^\perp = E.$$

Démonstration.— Il s'agit de montrer que l'on a : $F \cap F^\perp = \{\mathbf{0}_E\}$ et $F + F^\perp = E$. Comme les inclusions $\{\mathbf{0}_E\} \subset F \cap F^\perp$ et $F + F^\perp \subset E$ sont évidentes, il s'agit en fait de montrer les deux inclusions $F \cap F^\perp \subset \{\mathbf{0}_E\}$ et $E \subset F + F^\perp$.

• Montrons d'abord que $F \cap F^\perp \subset \{\mathbf{0}_E\}$. Pour tout $\mathbf{x} \in F \cap F^\perp$, on a $\mathbf{x} \perp \mathbf{x}$; soit $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$. Autrement dit, on a $\|\mathbf{x}\|^2 = 0$; ce qui entraîne que $\|\mathbf{x}\| = 0$ et puis que $\mathbf{x} = \mathbf{0}_E$. L'inclusion $F \cap F^\perp \subset \{\mathbf{0}_E\}$ en résulte.

• Montrons maintenant l'inclusion $E \subset F + F^\perp$. Considérons pour cela une base orthonormée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k)$ ($k \in \mathbb{N}$) de F (l'existence d'une telle base est assurée par le procédé de Gram-Schmidt). Étant donné $\mathbf{x} \in E$ (arbitraire), définissons

$$\mathbf{x}' := \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i \in F.$$

Puisque la famille $(\mathbf{e}_i)_{1 \leq i \leq k}$ est orthonormée, on a pour tout $j \in \{1, 2, \dots, k\}$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}', \mathbf{e}_j \rangle &= \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \delta_{ij} \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_j \rangle. \end{aligned}$$

D'où l'on tire que pour tout $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, on a :

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}', \mathbf{e}_j \rangle = 0.$$

Le vecteur $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ est donc orthogonal à tous les vecteurs $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$ de la base considérée pour F . Ce qui entraîne que $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ est orthogonal à tous les vecteurs de F ; autrement dit $(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \in F^\perp$. Le vecteur \mathbf{x} se décompose alors en : $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + (\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, avec $\mathbf{x}' \in F$ et $(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \in F^\perp$; ce qui entraîne que $\mathbf{x} \in F + F^\perp$. L'inclusion $E \subset F + F^\perp$ en découle.

En conclusion, on a $F \oplus F^\perp = E$, comme il fallait le prouver. ■

Exemple 6.I.— Dans le cas où E est euclidien (i.e., de dimension finie), montrer que l'on a : $F^{\perp\perp} = F$.

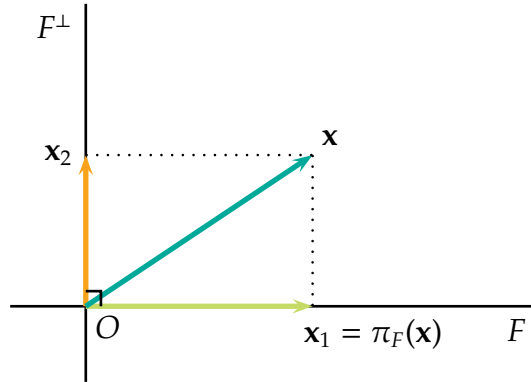
Supposons que E est euclidien, c'est-à-dire de dimension finie. D'après la proposition 6.2, on a à la fois $F \oplus F^\perp = E$ et $F^\perp \oplus F^{\perp\perp} = E$. Par suite, puisque la dimension d'une somme directe de deux sous-espaces vectoriels de E est égale à la somme des dimensions de ces sous-espaces, il s'ensuit en prenant les dimensions dans les deux égalités précédentes que : $\dim F + \dim F^\perp = \dim E = \dim F^\perp + \dim F^{\perp\perp}$. D'où l'on tire que $\dim F = \dim F^{\perp\perp}$. Enfin, puisque l'on sait que $F \subset F^{\perp\perp}$ (voir le point 4 de la proposition 3.3), il en résulte que $F^{\perp\perp} = F$, comme il fallait le prouver. ■

Appellations 6.I.—

1. Le sous-espace vectoriel F^\perp de E s'appelle *le supplémentaire orthogonal* de F .
2. La projection sur F parallèlement à son supplémentaire orthogonal F^\perp s'appelle *la projection orthogonale* sur F .

Notation 6.I.— La projection orthogonale sur F se note π_F (ou quelquefois p_F).

Illustration géométrique.



L'expression explicite de la projection orthogonale sur F d'un vecteur \mathbf{x} de E , en adoptant préalablement une base orthonormée pour F , est tirée directement de la démonstration ⁽¹⁾ de la proposition 6.2. Elle est donnée par le théorème suivant :

THÉORÈME 6.3.— Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k)$ (où $k \in \mathbb{N}$) une base *orthonormée* de F . Alors on a pour tout $\mathbf{x} \in E$:

$$\pi_F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i. \quad \blacksquare$$

6.3 Distance d'un point par rapport à un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien

Soit E un espace préhilbertien dont le produit scalaire associé est désigné par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme et la distance sous-jacentes sont respectivement désignées par $\|\cdot\|$ et \mathbf{d} . Soit aussi F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** de E . Rappelons d'abord la définition topologique ⁽²⁾ de la distance d'un point de E par rapport à F .

(1). Dans le contexte de la démonstration de la proposition 6.2, on a : $\pi_F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' = \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i$.

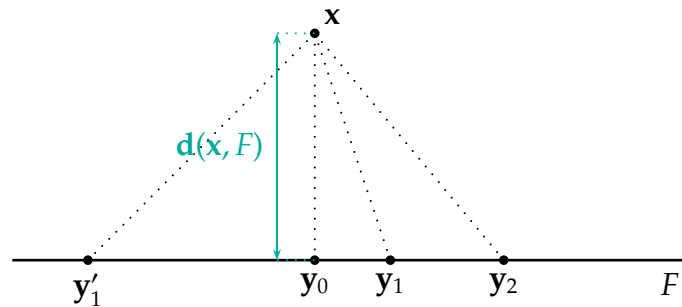
(2). Métrique plus exactement.

Définition 6.II.— La **distance** d'un vecteur x de E par rapport à F , notée $d(x, F)$, est définie par :

$$d(x, F) := \inf_{y \in F} d(x, y) = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

— Noter que cet infimum existe (et appartient à \mathbb{R}^+) car la partie $\{\|x - y\|, y \in F\}$ de \mathbb{R} est visiblement non vide et minorée par 0 (on utilise l'axiome de la borne inférieure de Bolzano).

Illustration géométrique.



On verra dans le théorème qui suit que la projection orthogonale sur F d'un point x de E est le vecteur de F le plus proche de x ; ce qui permet de calculer concrètement $d(x, F)$.

THÉORÈME 6.4.— Pour tout $x \in E$, il existe un unique $y_0 \in F$ tel que :

$$d(x, F) = d(x, y_0).$$

De plus, on a précisément $y_0 = \pi_F(x)$, de sorte que l'on ait :

$$d(x, F) = \|x - \pi_F(x)\|.$$

Démonstration.— Pour tout $y \in F$, on a :

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|(x - \pi_F(x)) + (\pi_F(x) - y)\|^2 \\ &= \|x - \pi_F(x)\|^2 + \|\pi_F(x) - y\|^2 \end{aligned}$$

(d'après le théorème de Pythagore ; ici on a : $(x - \pi_F(x)) \in F^\perp$ et $(\pi_F(x) - y) \in F$, donc $(x - \pi_F(x)) \perp (\pi_F(x) - y)$). Il résulte de cela que :

$$\inf_{y \in F} \|x - y\|^2 = \|x - \pi_F(x)\|^2 + \inf_{y \in F} \|\pi_F(x) - y\|^2.$$

Mais comme l'infimum $\inf_{y \in F} \|\pi_F(x) - y\|^2$ est visiblement atteint une seule fois en $y_0 = \pi_F(x)$ et est égale à 0 alors l'infimum $\inf_{y \in F} \|x - y\|^2$ est, lui aussi, atteint une seule fois en le même $y_0 = \pi_F(x)$ et est égale à $\|x - \pi_F(x)\|^2$. D'où $\inf_{y \in F} \|x - y\| = d(x, F)$ est également atteint une seule fois en $y_0 = \pi_F(x)$ et vaut $\|x - \pi_F(x)\|$. Le théorème est démontré. ■

Matrice et déterminant de Gram

Pour calculer la distance d'un vecteur \mathbf{x} de E au sous-espace vectoriel de dimension finie F de E , l'utilisation de la formule du théorème 6.4 nécessite de calculer d'abord la projection orthogonale de \mathbf{x} sur F ; ce qui nécessite de déterminer préalablement une base orthonormée⁽³⁾ pour F . Nous verrons dans ce qui suit que même une base arbitraire de F permet de calculer assez facilement $\mathbf{d}(\mathbf{x}, F)$, et ce via *les déterminants de Gram*.

Définition 6.III.— Soient n un entier strictement positif et $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ une famille ordonnée de vecteurs de E .

— On appelle **la matrice de Gram** associée à la famille $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ la matrice réelle carrée d'ordre n définie par :

$$\text{Gram}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) := \left(\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

— On appelle **le déterminant de Gram** associé à la famille $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$, que l'on note $G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$, le déterminant de la matrice de Gram associé à cette même famille; soit

$$G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) := \det \text{Gram}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n).$$

Les principaux résultats concernant la matrice et le déterminant de Gram sont rassemblés dans le théorème suivant :

THÉORÈME 6.5.— Soient n un entier strictement positif et $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ une famille ordonnée de vecteurs de E . Les propriétés suivantes sont alors satisfaites :

1. La matrice $\text{Gram}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ est symétrique positive. Elle est de plus définie positive si et seulement si la famille de vecteurs $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ est libre.
2. On a $\text{rg } \text{Gram}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \dim \text{Vect}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$.
3. On a $G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \geq 0$. De plus, $G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) > 0$ si et seulement si la famille de vecteurs $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ est libre.
4. Le déterminant $G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ est invariant par permutation⁽⁴⁾ des vecteurs $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ et invariant également lorsqu'un certain vecteur \mathbf{x}_i ($1 \leq i \leq n$) est remplacé par une somme de \mathbf{x}_i et d'une combinaison linéaire des autres vecteurs \mathbf{x}_j ($1 \leq j \leq n, j \neq i$).

(3). On utilise à cet effet l'algorithme de Gram-Schmidt.

(4). Il est alors plus approprié de parler du déterminant de Gram d'une famille finie de vecteurs de E plutôt que d'une famille finie « ordonnée » de vecteurs de E .

5. Supposons que $\dim F = n$ et soit $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ une base arbitraire de F . Alors pour tout $\mathbf{x} \in E$, on a :

$$d(\mathbf{x}, F) = \sqrt{\frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)}{G(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)}}$$

(appelée la formule de Gram).

Démonstration.—

1. La symétrie de la matrice $\text{Gram}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ résulte simplement de la symétrie du produit scalaire de E . Montrons maintenant que la matrice $\text{Gram}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ est positive. Ce qui revient à montrer que l'on a pour

tout $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : {}^t \lambda \text{Gram}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \lambda \geq 0$. Soit $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\begin{aligned} & {}^t \lambda \text{Gram}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \lambda \\ &= (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n \rangle \\ \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= (\langle \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1 \rangle, \langle \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_2 \rangle, \\ &\quad \dots, \langle \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n \rangle) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= \langle \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n, \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n \rangle \\ &= \|\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n\|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

comme il fallait le prouver. De plus, la matrice $\text{Gram}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ est

définie positive si et seulement si l'on a pour tout $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}$:

${}^t \lambda \text{Gram}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \lambda > 0$; c'est-à-dire (d'après ce qui précède) pour tout $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\} : \|\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n\|^2 > 0$, autrement dit

$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n \neq \mathbf{0}_E$. D'où $\text{Gram}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ est définie positive si et seulement si la famille $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ est libre. Ceci complète la preuve du point 1. du théorème.

2. Posons $H := \text{Vect}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ et considérons l'application linéaire :

$$f : H \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{x} \longmapsto \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x} \rangle \\ \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{x} \rangle \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \text{Ker} f &= \{ \mathbf{x} \in H : f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} \} \\ &= \{ \mathbf{x} \in H : \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x} \rangle = 0 \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, n \} \\ &= \{ \mathbf{x} \in H : \mathbf{x} \perp \mathbf{x}_i \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, n \} \\ &= \{ \mathbf{x} \in H : \mathbf{x} \in \{ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \}^\perp \} \\ &= \{ \mathbf{x} \in H : \mathbf{x} \in H^\perp \} \\ &= H \cap H^\perp = \{ \mathbf{0}_E \}. \end{aligned}$$

Ce qui montre que f est injective. Il résulte de cela que $\dim f(H) = \dim H$. Mais puisque le sous-espace vectoriel $f(H)$ de \mathbb{R}^n est engendré par les vecteurs $f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2), \dots, f(\mathbf{x}_n)$ de \mathbb{R}^n , qui sont exactement les vecteurs colonnes de la matrice $\text{Gram}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$, on a $\dim f(H) = \text{rg Gram}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$. Ce qui conclut au résultat requis.

3. Si la famille $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ est liée alors on a (d'après le résultat du point 2., déjà démontré) : $\text{rg Gram}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \dim \text{Vect}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) < n$. Ce qui entraîne que la matrice carrée $\text{Gram}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ est singulière, et donc son déterminant $G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ est nul. Par contre, si la famille $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ est libre alors (d'après le résultat du point 1., déjà démontré) la matrice $\text{Gram}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ est (symétrique) définie positive; ce qui entraîne (d'après le critère de Sylvester du corollaire 4.8) que tous ses mineurs principaux dominants sont strictement positifs; en particulier, son déterminant $G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ est strictement positif. Ce qui complète la preuve du point 3. du théorème.

4. Si la famille $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ est liée, le résultat requis découle du résultat du point précédent. Supposons maintenant que la famille $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ est libre. Elle constitue donc une base du sous-espace vectoriel de E qui l'engendre, à savoir $H := \text{Vect}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$. Remarquons alors que la matrice $\text{Gram}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ n'est autre que la matrice associée à la forme bilinéaire

symétrique \langle , \rangle_H de H relativement à la base $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ de H . De plus, si $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n)$ est une autre base de H et P est la matrice de passage de $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ vers $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n)$ alors la matrice associée à la même forme bilinéaire symétrique \langle , \rangle_H de H relativement à la nouvelle base $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n)$ est d'une part égale à $\text{Gram}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n)$ et d'autre part égale à ${}^t P \text{Gram}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) P$ (en vertu de la formule de changement de base relative aux formes bilinéaires). Il résulte par comparaison que l'on a :

$$\text{Gram}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n) = {}^t P \text{Gram}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) P.$$

En prenant les déterminants des deux membres de cette dernière identité et en se rappelant que $\det {}^t P = \det P$, il en résulte que :

$$G(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n) = G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) (\det P)^2.$$

Cette dernière est une identité générale incluant les deux cas du point 4. du théorème. En effet, si $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n)$ est une permutation de $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ alors $\det P$ est égale à la signature de cette permutation, donc égale à ± 1 ; ce qui fait que $(\det P)^2 = 1$. D'où l'on tire pour ce cas que $G(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n) = G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$, comme il fallait le prouver. D'autre part, s'il existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que

$$y_j = \begin{cases} x_j & \text{pour } j \neq i \\ x_i + \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \alpha_j x_j & \text{pour } j = i \end{cases} \quad (\forall j \in \{1, 2, \dots, n\})$$

(où les α_j ($1 \leq j \leq n, j \neq i$) sont des nombres réels) alors on vérifie facilement (en décomposant P par blocs par exemple) que $\det P = 1$; ce qui conclut aussi pour ce cas à la formule requise $G(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n) = G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$.

5. Soit $\mathbf{x} \in E$. Comme la projection orthogonale $\pi_F(\mathbf{x})$ de \mathbf{x} sur F appartient à F alors $\pi_F(\mathbf{x})$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$. Ce qui entraîne d'après le résultat du point 4. précédent que l'on a $G(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) = G(\mathbf{x} - \pi_F(\mathbf{x}), \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$. Mais puisque $\mathbf{x} - \pi_F(\mathbf{x}) \in F^\perp$, on a $\langle \mathbf{x} - \pi_F(\mathbf{x}), \mathbf{u}_i \rangle = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. D'où

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) = G(\mathbf{x} - \pi_F(\mathbf{x}), \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} \|\mathbf{x} - \pi_F(\mathbf{x})\|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & \text{Gram}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{vmatrix} \\
 &= \|\mathbf{x} - \pi_F(\mathbf{x})\|^2 \det \text{Gram}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) \\
 &= \mathbf{d}(\mathbf{x}, F)^2 G(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)
 \end{aligned}$$

(en vertu du théorème 6.4). Ce qui donne la formule requise :

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, F) = \sqrt{\frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)}{G(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)}}.$$

Ainsi se complète cette démonstration. ■

Remarques 6.I.—

1. Faisons remarquer que le cas particulier correspondant à $n = 2$ du point 3. du théorème 6.5 n'est autre que l'inégalité de Cauchy-Schwarz!
2. On peut montrer que toute matrice réelle carrée symétrique positive est une matrice de Gram d'une certaine famille finie de vecteurs de E .

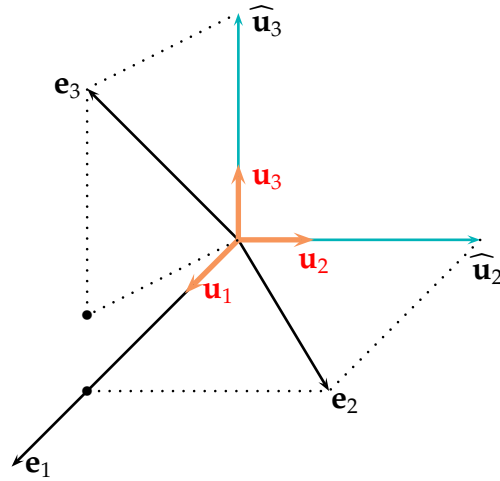
6.4 Interprétation géométrique de l'algorithme de Gram-Schmidt

Soient n un entier strictement positif et E un espace préhilbertien réel de dimension au moins égale à n . Soient aussi $\mathcal{F} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ une famille libre de E et $\mathcal{G} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ son orthonormalisée de Gram-Schmidt. Posons pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$: $E_k := \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k) = \text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$. En vertu du théorème 6.3, les formules vues au chapitre précédent, lesquelles expriment les vecteurs \mathbf{u}_i ($1 \leq i \leq n$) en fonction des vecteurs \mathbf{e}_i ($1 \leq i \leq n$), se réécrivent en utilisant les projections orthogonales comme ceci :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{e}_1\|} \\ \widehat{\mathbf{u}}_k &= \mathbf{e}_k - \pi_{E_{k-1}}(\mathbf{e}_k) \\ \mathbf{u}_k &= \frac{\widehat{\mathbf{u}}_k}{\|\widehat{\mathbf{u}}_k\|} \end{cases} \quad (\text{pour } 2 \leq k \leq n).$$

Lorsque E est de dimension finie, la formule de $\widehat{\mathbf{u}}_k$ ($2 \leq k \leq n$) s'écrit aussi $\widehat{\mathbf{u}}_k = \pi_{E_{k-1}^\perp}(\mathbf{e}_k)$; ce qui montre que $\widehat{\mathbf{u}}_k$ est le vecteur de E_{k-1}^\perp le plus proche de \mathbf{e}_k (en vertu du théorème 6.4).

Illustration géométrique pour $E = \mathbb{R}^3$ et $n = 3$



Exercices

Exercice 6.1. Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel et p et q deux projections de E .

1. Montrer les deux équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q &\iff p \circ q = q \quad \text{et} \quad q \circ p = p, \\ \operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q &\iff p \circ q = p \quad \text{et} \quad q \circ p = q. \end{aligned}$$

2. En déduire que si p_1, p_2, \dots, p_n ($n \in \mathbb{N}^*$) sont des projections de E sur un même sous-espace F de E et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont des réels tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ alors $(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_n p_n)$ est une projection de E sur F .

Exercice 6.2. Pour ce qui suit, le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^4 est muni de son produit scalaire usuel. Considérons le plan vectoriel H de \mathbb{R}^4 engendré par les deux vecteurs

$$V_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

— Déterminer la matrice associée à π_H (la projection orthogonale sur H) relativement à la base canonique de \mathbb{R}^4 .


Exercice 6.3. Soit p l'endomorphisme du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^3 dont la matrice associée relativement à la base canonique de celui-ci est :

$$A := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que p est une projection orthogonale de \mathbb{R}^3 pour son produit scalaire usuel.
2. Montrer que p est également une projection orthogonale de \mathbb{R}^3 pour le produit scalaire considéré à l'exercice 1.2.
3. Construire un produit scalaire sur \mathbb{R}^3 pour lequel p ne soit pas une projection orthogonale.

Exercice 6.4. Calculer de deux façons différentes la quantité

$$\inf_{a,b,c \in \mathbb{R}} \int_0^1 (X^3 + ax^2 + bx + c)^2 dx.$$

 Transformer le problème en un calcul de distance d'un vecteur par rapport à un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien approprié. Ensuite, calculer cette distance par les deux façons suivantes :

1^{ère} façon : Utiliser le théorème 6.4 (vous devez donc déterminer préalablement une base orthonormée de l'espace euclidien considéré).

2^{ème} façon : Utiliser la formule de Gram du théorème 6.5.

Exercice 6.5 (Examen 2014-2015). On munit le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ de l'application $\langle , \rangle : \mathbb{R}[x]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\langle P, Q \rangle := P(1)Q(1) - \int_0^1 P'(x)Q'(x) \log x dx \quad (\forall P, Q \in \mathbb{R}[x]).$$

1. Montrer que \langle , \rangle constitue un produit scalaire de $\mathbb{R}[x]$.
2. Etablir la formule :

$$\int_0^1 x^n \log x dx = -\frac{1}{(n+1)^2} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

3. En utilisant le procédé de Gram-Schmidt, déterminer une base de $\mathbb{R}_2[x]$ qui soit orthonormée pour le produit scalaire ci-dessus.
4. Calculer

$$\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \left\{ (a+b-1)^2 - \int_0^1 (2x-a)^2 \log x dx \right\}.$$

Exercice 6.6. On munit le \mathbb{R} -espace vectoriel $E := \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire \langle , \rangle défini par :

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx \quad (\forall f, g \in E).$$

Par ailleurs, on définit les polynômes de Legendre par :

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

1. Calculer P_0, P_1, P_2 et P_3 .


2. Montrer que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ainsi défini.

 Utiliser des intégrations par parties successives.

3. Montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

(où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$).


 Même indication que précédemment.

4. Déterminer la projection orthogonale de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ (de E) sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ de E .

Exercice 6.7. Soient E un espace euclidien et p une projection de E satisfaisant :

$$\|p(\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{x}\| \quad (\forall \mathbf{x} \in E).$$


— Montrer que p est nécessairement une projection orthogonale de E .

 Etant donnés $\mathbf{u} \in \text{Ker } p$ et $\mathbf{v} \in \text{Im } p$, raisonner sur le polynôme réel de second degré L en λ suivant :

$$L(\lambda) := \|\lambda \mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|p(\lambda \mathbf{u} + \mathbf{v})\|^2.$$

Exercice 6.8. Soient E un espace euclidien et f une forme linéaire sur E . Montrer qu'il existe un unique $\mathbf{a} \in E$ pour lequel on ait :

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \quad (\forall \mathbf{x} \in E).$$

 Le cas $f = \mathbf{0}_{\mathcal{L}(E)}$ est trivial. Pour $f \neq \mathbf{0}_{\mathcal{L}(E)}$, considérer un générateur \mathbf{h} du supplémentaire orthogonal de $\text{Ker } f$ et comparer $f(\mathbf{x})$ à $\langle \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle$ ($\mathbf{x} \in E$).

N. B : Le résultat de cet exercice est plus généralement vrai lorsque E est un espace **de Hilbert** (réel ou complexe) et f est une forme linéaire **continue** sur E (c'est le **théorème de représentation de Riesz**).


Exercice 6.9 (Inégalité de Bessel).

Soient E un espace préhilbertien réel et $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ ($n \in \mathbb{N}^*$) une famille orthonormée de E .

1. Montrer que pour tout $\mathbf{x} \in E$, on a :

$$\sum_{k=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2.$$

(Cette inégalité est connue sous le nom de **l'inégalité de Bessel**).

 Posons $F := \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$. Il suffit d'écrire \mathbf{x} sous la forme $\mathbf{x} = \pi_F(\mathbf{x}) + (\mathbf{x} - \pi_F(\mathbf{x}))$ et d'appliquer le théorème de Pythagore.

2. Montrer que l'inégalité de Bessel ci-dessus devient une égalité si et seulement si $\mathbf{x} \in \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$.

Exercice 6.10. Soit E un espace euclidien.

1. Etant donné \mathbf{x}_0 un vecteur non nul de E , montrer que la projection orthogonale d'un vecteur \mathbf{x} de E sur la droite vectorielle D engendrée par \mathbf{x}_0 est donnée par :

$$\pi_D(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \rangle}{\|\mathbf{x}_0\|^2} \mathbf{x}_0.$$

2. Etant donné H un hyperplan de E et \mathbf{u} un vecteur non nul de E orthogonal à H , montrer que la projection orthogonale d'un vecteur \mathbf{x} de E sur H est donnée par :

$$\pi_H(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u}$$

et que la distance de \mathbf{x} à H est donnée par :

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, H) = \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle|}{\|\mathbf{u}\|}.$$

3. Supposons que $E = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}})$ (où n est un entier strictement positif) et considérons H l'hyperplan de \mathbb{R}^n d'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$ (où a_1, a_2, \dots, a_n sont des réels non tous nuls). En appliquant le second résultat du point 2. précédent, montrer que la distance d'un

vecteur $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de E par rapport à H est donnée par :


$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, H) = \frac{|a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}}.$$

Exercice 6.11. Soient E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie k ($k \in \mathbb{N}^*$). Soit de plus $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k)$ une base orthonormée de F . Etant donné $\mathbf{x} \in E$, désignons par θ_i ($1 \leq i \leq k$) l'angle non orienté entre \mathbf{x} et \mathbf{e}_i et par θ l'angle non orienté entre \mathbf{x} et F (c'est-à-dire l'angle non orienté entre \mathbf{x} et sa projection orthogonale sur F). — Montrer alors que l'on a :

$$\cos^2 \theta = \sum_{i=1}^k \cos^2 \theta_i.$$

Exercice 6.12. Soit n un entier strictement positif. On munit le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel et on désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, constitués respectivement des matrices symétriques et des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'on a $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

 Une expression adéquate du produit scalaire usuel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est fournie par l'exercice 1.6.

2. En déduire l'expression de la projection orthogonale d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

3. Calculer (en fonction de n) la distance de la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & (\mathbf{0}) & & \ddots & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) par rapport au sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6.13. Soient n un entier ≥ 2 et E un espace euclidien de dimension n . Soient aussi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base orthonormée de E et F un sous-espace vectoriel de E d'une certaine dimension k ($0 \leq k \leq n$).

1. Montrer la formule :

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{d}(\mathbf{e}_i, F)^2 = n - k.$$

2. En déduire l'existence d'un $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que :

$$\mathbf{d}(\mathbf{e}_i, F) \geq \sqrt{1 - \frac{k}{n}}.$$

Exercice 6.14. Soit p une projection orthogonale d'un espace euclidien E . Montrer que p vérifie la propriété :

$$\langle p(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, p(\mathbf{y}) \rangle \quad (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E).$$

(On dit que p est **autoadjoint**).

Exercice 6.15. Soient p et q deux projections orthogonales d'un espace euclidien E . Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

- (i) $(p + q)$ est une projection orthogonale.
- (ii) $\forall \mathbf{x} \in E : \langle p(\mathbf{x}), q(\mathbf{x}) \rangle = 0$.
- (iii) $p \circ q = \mathbf{0}_{\text{End}(E)}$.
- (iv) $\forall \mathbf{x} \in \text{Im } p, \forall \mathbf{y} \in \text{Im } q : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

Exercice 6.16. Soient n un entier strictement positif, E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n et p une projection de E .

1. Montrer que p est diagonalisable et préciser ses éventuelles valeurs propres.
2. En déduire que $\text{rg } p = \text{tr } p$.
3. Supposons maintenant que E est euclidien et soit $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base orthonormée de E .
 - (a) Montrer que si p est une projection orthogonale de E alors on a :

$$\text{rg } p = \sum_{i=1}^n \|p(\mathbf{e}_i)\|^2.$$

- (b) Montrer que si $\sum_{i=1}^n \|p(\mathbf{e}_i)\|^2 = 1$ alors p est une projection orthogonale de E de rang 1.



Endomorphismes adjoint, autoadjoint, orthogonal et normal d'un espace préhilbertien réel

Sommaire

7.1	Adjoint d'un endomorphisme	103
7.2	Endomorphismes autoadjoints	107
7.3	Endomorphismes antisymétriques	111
7.4	Endomorphismes orthogonaux	111
7.5	Endomorphismes normaux	118
	Exercices	121

Pour tout ce chapitre, on fixe E un espace préhilbertien réel et on désigne par \langle , \rangle le produit scalaire ambiant.

7.1 Adjoint d'un endomorphisme

Définition 7.I.— Soit f un endomorphisme de E . On appelle *adjoint* de f tout endomorphisme g de E , vérifiant la propriété :

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle \quad (\forall x, y \in E).$$

— L'endomorphisme adjoint d'un endomorphisme donné permet donc de faire passer celui-ci de la partie de gauche vers la partie de droite d'un produit scalaire.

Traisons maintenant les questions d'existence et d'unicité de l'endomorphisme adjoint d'un endomorphisme donné. Pour l'existence, nous nous limitons au cas où $\dim E$ est finie (i.e., au cas d'un espace euclidien) et nous présentons le cas plus général juste sous forme d'information au lecteur.

PROPOSITION 7.1 (UNICITÉ DE L'ENDOMORPHISME ADJOINT).— *Soit f un endomorphisme de E . Si f possède un adjoint alors cet adjoint est forcément unique.*

Démonstration.— Supposons que f possède deux adjoints g et h et montrons que $g = h$ (égalité dans $\text{End}(E)$). Par définition même de l'endomorphisme adjoint, on a pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$:

$$\langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, g(\mathbf{y}) \rangle \quad \text{et} \quad \langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, h(\mathbf{y}) \rangle.$$

On déduit de cela que pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, on a :

$$\langle \mathbf{x}, g(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, h(\mathbf{y}) \rangle.$$

Ce qui revient à dire (compte tenu de la bilinéarité du produit scalaire) que l'on a pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$:

$$\langle \mathbf{x}, g(\mathbf{y}) - h(\mathbf{y}) \rangle = 0.$$

D'où l'on tire que :

$$g(\mathbf{y}) - h(\mathbf{y}) \in E^\perp \quad (\forall \mathbf{y} \in E).$$

Or $E^\perp = \{\mathbf{0}_E\}$; d'où :

$$g(\mathbf{y}) - h(\mathbf{y}) = \mathbf{0}_E \quad (\forall \mathbf{y} \in E).$$

Ce qui conclut que $g(\mathbf{y}) = h(\mathbf{y})$ ($\forall \mathbf{y} \in E$); c'est-à-dire que $g = h$, comme il fallait le prouver. ■

L'unicité de l'endomorphisme adjoint d'un endomorphisme donné de E nous autorise à lui affecter une notation propre.

Notation 7.I.— L'endomorphisme adjoint d'un endomorphisme donné f de E (lorsqu'il existe) est noté f^* .

La proposition suivante présente quelques propriétés presque immédiates des endomorphismes adjoints et de leurs liaisons (compatibilités) avec l'addition des endomorphismes, la multiplication d'un scalaire par un endomorphisme, la composition des endomorphismes, etc.

PROPOSITION 7.2.— Soient f et g deux endomorphismes de E qui possèdent des adjoints (i.e., f^* et g^* existent) et λ un nombre réel. Alors les endomorphismes Id_E , $f + g$, λf , $f \circ g$, f^{-1} (lorsque f est bijectif) et f^* de E possèdent tous des adjoints et on a précisément :

- (i) $(\text{Id}_E)^* = \text{Id}_E$,
- (ii) $(f + g)^* = f^* + g^*$,
- (iii) $(\lambda f)^* = \lambda f^*$,
- (iv) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$,
- (v) $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$ (lorsque f est bijectif),
- (vi) $(f^*)^* = f$.

Démonstration.—

- Montrons (i). Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, on a :

$$\langle \text{Id}_E(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \text{Id}_E(\mathbf{y}) \rangle.$$

Ce qui montre que l'endomorphisme identité Id_E de E possède un adjoint qui n'est autre que lui-même; soit $(\text{Id}_E)^* = \text{Id}_E$.

- Montrons (ii). Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, on a (en utilisant les propriétés d'un produit scalaire et la définition de l'adjoint d'un endomorphisme) :

$$\begin{aligned} \langle (f + g)(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle &= \langle f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle + \langle g(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, f^*(\mathbf{y}) \rangle + \langle \mathbf{x}, g^*(\mathbf{y}) \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, f^*(\mathbf{y}) + g^*(\mathbf{y}) \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, (f^* + g^*)(\mathbf{y}) \rangle. \end{aligned}$$

Ce qui montre que l'endomorphisme $(f + g)$ de E possède un adjoint et l'on a précisément $(f + g)^* = f^* + g^*$.

- Montrons (iii). Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \langle (\lambda f)(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle &= \langle \lambda f(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle \\ &= \lambda \langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle \\ &= \lambda \langle \mathbf{x}, f^*(\mathbf{y}) \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \lambda f^*(\mathbf{y}) \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, (\lambda f^*)(\mathbf{y}) \rangle. \end{aligned}$$

Ce qui montre que l'endomorphisme (λf) de E possède un adjoint et l'on a précisément $(\lambda f)^* = \lambda f^*$.

- Montrons (iv). Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \langle (f \circ g)(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle &= \langle f(g(\mathbf{x})), \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle g(\mathbf{x}), f^*(\mathbf{y}) \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, g^*(f^*(\mathbf{y})) \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, (g^* \circ f^*)(\mathbf{y}) \rangle. \end{aligned}$$

Ce qui montre que l'endomorphisme $(f \circ g)$ de E possède un adjoint et l'on a précisément $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

- Montrons (v). Supposons que f est bijectif de sorte que f^{-1} existe. On a alors pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$:

$$\begin{aligned} \langle f^{-1}(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle &= \langle f^{-1}(\mathbf{x}), f^*((f^*)^{-1}(\mathbf{y})) \rangle \\ &= \langle f(f^{-1}(\mathbf{x})), (f^*)^{-1}(\mathbf{y}) \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, (f^*)^{-1}(\mathbf{y}) \rangle. \end{aligned}$$

Ce qui montre que l'endomorphisme f^{-1} de E possède un adjoint qui est précisément $(f^*)^{-1}$; soit $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$.

- Montrons enfin (vi). Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \langle f^*(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{y}, f^*(\mathbf{x}) \rangle \\ &= \langle f(\mathbf{y}), \mathbf{x} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, f(\mathbf{y}) \rangle. \end{aligned}$$

Ce qui montre que l'endomorphisme f^* de E possède un adjoint qui est précisément f ; soit $(f^*)^* = f$.

La proposition est démontrée. ■

PROPOSITION 7.3 (SUR L'EXISTENCE DE L'ENDOMORPHISME ADJOINT).—
*Supposons que E est euclidien (i.e., $\dim E < +\infty$). Alors tout endomorphisme de E possède un endomorphisme adjoint. Plus précisément, si f est un endomorphisme de E et A est la matrice associée à f relativement à une base **orthonormée** \mathcal{B} de E alors la matrice associée à f^* relativement à la même base \mathcal{B} de E est ${}^t A$.*

Démonstration.— Posons $n := \dim E$ et soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base **orthonormée** de E (le procédé de Gram-Schmidt par exemple assure l'existence de \mathcal{B}). La matrice représentant le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de E (en tant que forme bilinéaire sur E) relativement à \mathcal{B} est donc I_n . Étant donné maintenant f un endomorphisme de E , désignons par A la matrice associée à f relativement à \mathcal{B} et par g l'endomorphisme de E dont la matrice associée

relativement à \mathcal{B} est tA . Nous allons montrer que g est l'adjoint de f . Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, de coordonnées respectives $X, Y \in \mathbb{R}^n$ relativement à \mathcal{B} , on a (puisque, relativement à \mathcal{B} , le vecteur $f(\mathbf{x})$ de E est représenté par les coordonnées AX , le vecteur $g(\mathbf{y})$ de E est représenté par les coordonnées tAY et le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de E est représenté par la matrice identité I_n) :

$$\begin{aligned} \langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle &= {}^t(AX) \cdot I_n \cdot Y \\ &= {}^tX {}^tAY \\ &= {}^tX \cdot I_n \cdot ({}^tAY) \\ &= \langle \mathbf{x}, g(\mathbf{y}) \rangle. \end{aligned}$$

Ce qui montre que g est effectivement l'adjoint de f (i.e., $g = f^*$), comme il fallait le prouver. ■

Remarque 7.I.— L'existence de l'adjoint d'un endomorphisme donné f peut être démontrée dans le cadre plus général où l'on suppose que E est **de Hilbert** (i.e., **complet**) et f est **continu**. Le résultat de la proposition 7.3 en devient du coup un cas particulier (puisque tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet et tout endomorphisme d'un tel espace est continu).

7.2 Endomorphismes autoadjoints

Définition 7.II.— Un endomorphisme f de E est dit *autoadjoint* (ou *symétrique*) s'il est l'adjoint de lui-même, c'est-à-dire si $f^* = f$. De manière équivalente, f est autoadjoint si pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, on a :

$$\langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, f(\mathbf{y}) \rangle.$$

La caractérisation matricielle d'un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien, relativement à une base orthonormée de celui-ci, se déduit immédiatement de la proposition 7.3. On a la

PROPOSITION 7.4.— *Supposons que E est euclidien de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$) et soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base **orthonormée** de E . Soient aussi f un endomorphisme de E et A la matrice associée à f relativement à \mathcal{B} . Alors f est autoadjoint si et seulement si A est **symétrique** (i.e., ${}^tA = A$). ■*

Parmi les exemples d'endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien, on cite :

- (i) les projections orthogonales,
- (ii) les symétries orthogonales

(voir plus loin). On a d'abord le théorème suivant :

THÉORÈME 7.5.— *Supposons que E est euclidien et soit p une projection de E . Alors p est une projection orthogonale si et seulement si p est autoadjointe.*

Démonstration.—

• (\Rightarrow) Supposons que p est une projection orthogonale de E . En posant $F := \text{Im } p$, on a donc $F^\perp = \text{Ker } p$, $F \oplus F^\perp = E$ et $p = \pi_F$. Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, écrivons :

$$\begin{aligned} \text{et} \quad \mathbf{x} &= \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 && (\text{avec } \mathbf{x}_1 \in F \text{ et } \mathbf{x}_2 \in F^\perp) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 && (\text{avec } \mathbf{y}_1 \in F \text{ et } \mathbf{y}_2 \in F^\perp), \end{aligned}$$

de sorte que l'on ait : $p(\mathbf{x}) = \pi_F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_1$ et $p(\mathbf{y}) = \pi_F(\mathbf{y}) = \mathbf{y}_1$. On a alors :

$$\begin{aligned} \langle p(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1 \rangle + \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2 \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1 \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 \rangle \quad (\text{car } \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2 \rangle = \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 \rangle = 0, \text{ étant} \\ &\hspace{15em} \text{donné que } \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in F \text{ et } \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in F^\perp) \\ &= \langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, p(\mathbf{y}) \rangle. \end{aligned}$$

Ce qui montre que p est autoadjoint, comme il fallait le prouver.

• (\Leftarrow) Supposons que le projecteur p est autoadjoint et posons $F := \text{Im } p$ et $G := \text{Ker } p$, de sorte que p soit précisément le projecteur sur F parallèlement à G . Montrer que p est une projection orthogonale revient alors à montrer que $G = F^\perp$. Comme G et F^\perp sont de même dimension (car ils ont un même supplémentaire dans E , qui est F) alors il suffit de montrer que l'on a $G \subset F^\perp$, c'est-à-dire que tout vecteur de G est orthogonal à tout vecteur de F . Montrons ce dernier fait. Pour tous $\mathbf{x} \in G$, $\mathbf{y} \in F$, on a :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x}, p(\mathbf{y}) \rangle \\ &= \langle p(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle \quad (\text{car } p \text{ est supposé autoadjoint}) \\ &= \langle \mathbf{0}_E, \mathbf{y} \rangle \quad (\text{car } \mathbf{x} \in G) \\ &= 0, \end{aligned}$$

confirmant le fait requis. En remontant, on obtient que p est bien une projection orthogonale de E .

Ainsi se complète cette démonstration. ■

Exemple 7.I.— Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 dont la matrice associée relativement à la base canonique de \mathbb{R}^2 est :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

— Montrer que f est une projection orthogonale de \mathbb{R}^2 (muni de son produit scalaire usuel bien entendu).

On constate que l'on a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = A;$$

d'où $f^2 = f$, confirmant que f est bien une projection de \mathbb{R}^2 . D'autre part, puisque la base canonique de \mathbb{R}^2 est orthonormée (relativement au produit scalaire usuel de \mathbb{R}^2) et que f est représenté par une matrice symétrique relativement à cette base (constater que A est symétrique) alors (en vertu de la proposition 7.4) f est autoadjoint. En conséquence, f est un projecteur autoadjoint de \mathbb{R}^2 ; ce qui entraîne (en vertu du Théorème 7.5) que f est une projection orthogonale de \mathbb{R}^2 . ■

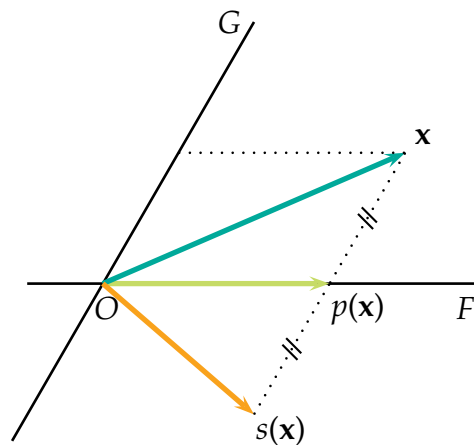
Dans ce qui suit, on définit une *symétrie* d'un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Définition 7.III.— Soit \mathcal{E} un \mathbb{R} -espace vectoriel. On appelle *symétrie* de \mathcal{E} tout endomorphisme s de \mathcal{E} s'écrivant sous la forme :

$$s = 2p - \text{Id}_{\mathcal{E}},$$

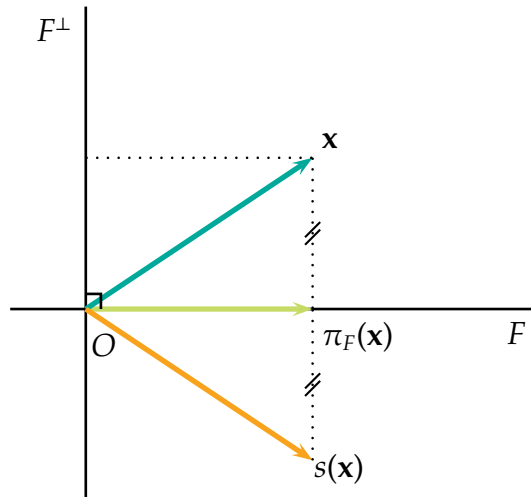
où p est un projecteur de \mathcal{E} .

Illustration géométrique :



Cas particulier : Lorsque \mathcal{E} est préhilbertien et p est une projection orthogonale de \mathcal{E} , on dira que $s = 2p - \text{Id}_{\mathcal{E}}$ est une *symétrie orthogonale* de \mathcal{E} .

Illustration géométrique :



Exemple 7.II.—

1. Montrer qu'un endomorphisme s d'un \mathbb{R} -espace vectoriel \mathcal{E} est une symétrie si et seulement si :

$$s^2 = \text{Id}_{\mathcal{E}}.$$

2. Montrer qu'un endomorphisme s d'un espace euclidien \mathcal{E} est une symétrie orthogonale si et seulement si :

$$(i) \quad s^2 = \text{Id}_{\mathcal{E}} \quad \text{et} \quad (ii) \quad s \text{ est autoadjoint.}$$

1. Soient \mathcal{E} un \mathbb{R} -espace vectoriel et s un endomorphisme de \mathcal{E} . Considérons p l'endomorphisme de \mathcal{E} défini par $p := \frac{1}{2}(s + \text{Id}_{\mathcal{E}})$, de sorte que l'on ait $s = 2p - \text{Id}_{\mathcal{E}}$. On a alors :

s est une symétrie de $\mathcal{E} \iff p$ est un projecteur de \mathcal{E}

$$\iff p^2 = p$$

$$\iff \frac{1}{4}(s + \text{Id}_{\mathcal{E}})^2 = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_{\mathcal{E}})$$

$$\iff \frac{1}{4}(s^2 + 2s + \text{Id}_{\mathcal{E}}) = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_{\mathcal{E}}) \quad (\text{on a le droit d'utiliser la formule du binôme car les endomorphismes } s \text{ et } \text{Id}_{\mathcal{E}} \text{ de } \mathcal{E} \text{ commutent})$$

$$\iff s^2 = \text{Id}_{\mathcal{E}},$$

comme il fallait le prouver.

Une symétrie d'un \mathbb{R} -espace vectoriel n'est rien d'autre donc qu'un endomorphisme involutif de cet espace.

2. Soient \mathcal{E} un espace euclidien et s un endomorphisme de \mathcal{E} . Considérons p l'endomorphisme de \mathcal{E} défini par $p := \frac{1}{2}(s + \text{Id}_{\mathcal{E}})$, de sorte que l'on ait $s = 2p - \text{Id}_{\mathcal{E}}$. On a alors :

s est une symétrie orthogonale de $\mathcal{E} \iff p$ est une projection orthogonale de \mathcal{E}
 $\iff p$ est une projection de \mathcal{E} et p est autoadjoint (en vertu du théorème 7.5)
 $\iff s$ est une symétrie de \mathcal{E} et s est autoadjoint

(car on a équivalence entre « p est autoadjoint » et « s est autoadjoint », vu que p et s s'expriment chacun comme combinaison linéaire de l'autre et l'endomorphisme identité $\text{Id}_{\mathcal{E}}$, lequel est autoadjoint). D'où l'on tire (en vertu du résultat du premier point) que :

s est une symétrie orthogonale de $\mathcal{E} \iff s^2 = \text{Id}_{\mathcal{E}}$ et s est autoadjoint,

comme il fallait le prouver. ■

7.3 Endomorphismes antisymétriques

Définition 7.IV.— Un endomorphisme f de E est dit *antisymétrique* s'il est l'opposé de son adjoint, c'est-à-dire si $f^* = -f$. De manière équivalente, f est antisymétrique si pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, on a :

$$\langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = -\langle \mathbf{x}, f(\mathbf{y}) \rangle.$$

Définition 7.V.— Etant donné n un entier strictement positif, une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *antisymétrique* si elle satisfait la propriété : ${}^t A = -A$.

La caractérisation matricielle d'un endomorphisme antisymétrique d'un espace euclidien, relativement à une base orthonormée de celui-ci, se déduit immédiatement de la proposition 7.3. On a la

PROPOSITION 7.6.— Supposons que E est euclidien de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$) et soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base *orthonormée* de E . Soient aussi f un endomorphisme de E et A la matrice associée à f relativement à \mathcal{B} . Alors f est antisymétrique si et seulement si A est antisymétrique. ■

7.4 Endomorphismes orthogonaux

Définition 7.VI.— Un endomorphisme f de E est dit *orthogonal* s'il conserve les produits scalaires ; c'est-à-dire s'il vérifie la propriété :

$$\langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E).$$

— Puisque la norme et la distance de E sont définies à partir du produit scalaire ambiant de E , il résulte de la définition ci-dessus qu'un endomorphisme orthogonal de E conserve aussi les normes et les distances. Un endomorphisme orthogonal d'un espace préhilbertien est donc un cas particulier d'une **isométrie** d'un espace métrique.

Notation 7.II.— L'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E se note $O(E)$.

Les résultats qui vont suivre fournissent les propriétés essentielles des endomorphismes orthogonaux d'un espace préhilbertien, en mettant l'accent sur le cas d'un espace euclidien.

PROPOSITION 7.7.— Soit f un endomorphisme de E . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) f est un endomorphisme orthogonal,
- (ii) f conserve les normes ; c'est-à-dire que l'on a :

$$\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\| \quad (\forall \mathbf{x} \in E).$$

Démonstration.—

- **(i) \Rightarrow (ii).** Supposons que f est orthogonal. Alors on a pour tout $\mathbf{x} \in E$:

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x})\|^2 &= \langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}) \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \quad (\text{car } f \text{ est orthogonal}) \\ &= \|\mathbf{x}\|^2, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que :

$$\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|,$$

comme il fallait le prouver.

- **(ii) \Rightarrow (i).** Supposons que f conserve les normes. Alors on a pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$:

$$\begin{aligned} \langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \rangle &= \frac{1}{2} \left(\|f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})\|^2 - \|f(\mathbf{x})\|^2 - \|f(\mathbf{y})\|^2 \right) \quad (\text{en vertu de (3.1)}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\|f(\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^2 - \|f(\mathbf{x})\|^2 - \|f(\mathbf{y})\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2 \right) \quad (\text{en vertu de l'hypothèse :} \\ &\quad \ll f \text{ conserve les normes} \gg) \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad (\text{en vertu de (3.1)}). \end{aligned}$$

Ce qui montre que l'endomorphisme f est orthogonal, comme il fallait le prouver.

La proposition est démontrée. ■

PROPOSITION 7.8.— *Supposons que E est euclidien et soit f un endomorphisme de E . Si f est orthogonal alors il transforme toute base orthonormée de E en une base orthonormée de E . Inversement, si f transforme une certaine base orthonormée de E en une autre base orthonormée de E alors f est orthogonal.*

Démonstration.—

• Supposons que f est orthogonal et soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ (où $n := \dim E$) une base orthonormée de E . Pour tous $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle f(\mathbf{e}_i), f(\mathbf{e}_j) \rangle &= \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle && \text{(puisque } f \text{ est orthogonal)} \\ &= \delta_{ij} && \text{(puisque } \mathcal{B} \text{ est orthonormée).} \end{aligned}$$

Ce qui montre que $f(\mathcal{B}) := (f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \dots, f(\mathbf{e}_n))$ est une famille orthonormée de E . Mais ceci entraîne que $f(\mathcal{B})$ est libre (voir l'exercice 3.7) et constitue donc une famille libre maximale de E ; d'où $f(\mathcal{B})$ est une base de E . Par conséquent $f(\mathcal{B})$ est une base orthonormée de E , comme il fallait le prouver.

• Inversement, supposons que f transforme une certaine base orthonormée $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ de E en une base orthonormée $f(\mathcal{B}) = (f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \dots, f(\mathbf{e}_n))$ de E . Pour tous $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{y} = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \beta_n \mathbf{e}_n \in E$ (avec $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$), on a :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \langle \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n, \beta_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{e}_n \rangle \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_i \beta_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle \quad \text{(en utilisant la bilinéarité du produit scalaire)} \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \quad \text{(puisque } \mathcal{B} \text{ est orthonormée).} \end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} \langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \rangle &= \langle f(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n), f(\beta_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{e}_n) \rangle \\ &= \langle \alpha_1 f(\mathbf{e}_1) + \dots + \alpha_n f(\mathbf{e}_n), \beta_1 f(\mathbf{e}_1) + \dots + \beta_n f(\mathbf{e}_n) \rangle \quad \text{(puisque } f \text{ est linéaire)} \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_i \beta_j \langle f(\mathbf{e}_i), f(\mathbf{e}_j) \rangle \quad \text{(en utilisant la bilinéarité du produit scalaire)} \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \quad \text{(puisque } f(\mathcal{B}) \text{ est orthonormée).} \end{aligned}$$

En comparant les deux résultats, on voit bien que l'on a : $\langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E)$. Ce qui montre que f est orthogonal, comme il fallait le prouver. Ainsi se complète notre démonstration. ■

PROPOSITION 7.9 (CARACTÉRISATION MATRICIELLE).— *Supposons que E est euclidien et soit \mathcal{B} une base orthonormée de E (où $n \in \mathbb{N}$). Soient aussi f un endomorphisme de E et A la matrice associée à f relativement à \mathcal{B} . Alors f est orthogonal si et seulement si l'on a : ${}^tAA = I_n$.*

Démonstration.— Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, désignons par $X, Y \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées respectives de \mathbf{x} et \mathbf{y} relativement à la base \mathcal{B} de E ; les coordonnées respectives de $f(\mathbf{x})$ et $f(\mathbf{y})$ relativement à \mathcal{B} sont donc AX et AY . Comme la base \mathcal{B} de E est orthonormée alors la matrice associée au produit scalaire \langle , \rangle de E (en tant que forme bilinéaire sur E) relativement à \mathcal{B} est la matrice identité I_n . On a par conséquent :

$$\begin{aligned} f \text{ est orthogonal} &\stackrel{\text{d\u00e9f}}{\iff} \langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle && (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E) \\ &\iff {}^t(AX) \cdot I_n \cdot (AY) = {}^tX \cdot I_n \cdot Y && (\forall X, Y \in \mathbb{R}^n) \\ &\iff {}^tX \cdot {}^tAA \cdot Y = {}^tX \cdot I_n \cdot Y && (\forall X, Y \in \mathbb{R}^n) \\ &\iff {}^tAA = I_n && \text{(en vertu de la remarque 2.I).} \end{aligned}$$

Ce qui démontre la proposition. ■

Définition 7.VII.— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *orthogonale* si elle représente un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien relativement à une base orthonormée de celui-ci. De manière équivalente (compte tenu de la proposition 7.9), $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *orthogonale* si elle satisfait ${}^tAA = I_n$.

Les matrices orthogonales peuvent être caractérisées aussi par leurs vecteurs lignes ou colonnes. On a la

PROPOSITION 7.10.— *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonnes (resp. lignes) constituent une base orthonormée de $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_{us})$.*

Démonstration.— Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et désignons par $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ les vecteurs colonnes de A . On a alors :

$$A = (\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_2 | \dots | \mathbf{e}_n) \quad \text{et} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{e}_1 \\ \hline {}^t\mathbf{e}_2 \\ \hline \vdots \\ \hline {}^t\mathbf{e}_n \end{pmatrix};$$

ce qui donne :

$${}^tAA = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{e}_1 \\ \hline {}^t\mathbf{e}_2 \\ \hline \vdots \\ \hline {}^t\mathbf{e}_n \end{pmatrix} (\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_2 | \dots | \mathbf{e}_n) = \left(\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle_{\text{us}} \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} A \text{ est orthogonale} &\iff {}^tAA = \mathbf{I}_n \\ &\iff \left(\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle_{\text{us}} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \mathbf{I}_n \\ &\iff (\mathbf{e}_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ est une base orthonormée de } (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}}). \end{aligned}$$

Ce qui confirme l'énoncé de la proposition en ce qui concerne les vecteurs colonnes de A . L'énoncé de la proposition en ce qui concerne les vecteurs lignes de A se déduit immédiatement de la série d'équivalences suivante :

$$\begin{aligned} A \text{ est orthogonale} &\iff {}^tAA = \mathbf{I}_n \\ &\iff {}^tA = A^{-1} \\ &\iff A^tA = \mathbf{I}_n \\ &\iff {}^tA \text{ est orthogonale.} \end{aligned}$$

La proposition est démontrée. ■

Remarque 7.II.— On peut démontrer la proposition 7.10 d'une autre façon en associant à la matrice considérée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'endomorphisme f de \mathbb{R}^n qu'elle représente relativement à la base canonique de \mathbb{R}^n , puis en utilisant la proposition 7.8 pour f .

COROLLAIRE 7.11.— *Supposons que E est euclidien. Alors un endomorphisme de E est orthogonal si et seulement s'il est l'inverse de son adjoint (i.e., $f^* = f^{-1}$).*

Démonstration.— Cela résulte immédiatement en combinant les résultats des deux propositions 7.9 et 7.3. ■

PROPOSITION 7.12.— *La composition de deux endomorphismes orthogonaux de E reste un endomorphisme orthogonal de E et l'inverse de tout endomorphisme orthogonal de E (lorsqu'il existe ⁽¹⁾) est orthogonal.*

(1). L'existence est garantie dans le cas où E est euclidien (en vertu du corollaire 7.11).

Démonstration.— Soient f et g deux endomorphismes orthogonaux de E . Montrons d'abord que l'endomorphisme composé $(f \circ g)$ est orthogonal. On a pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$:

$$\begin{aligned} \langle (f \circ g)(\mathbf{x}), (f \circ g)(\mathbf{y}) \rangle &= \langle f(g(\mathbf{x})), f(g(\mathbf{y})) \rangle \\ &= \langle g(\mathbf{x}), g(\mathbf{y}) \rangle && \text{(puisque } f \text{ est orthogonal)} \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle && \text{(puisque } g \text{ est orthogonal).} \end{aligned}$$

Ce qui montre que $(f \circ g)$ est orthogonal. Montrons maintenant que l'inverse de f (lorsqu'il existe) est orthogonal. En supposant f^{-1} existe, on a pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$:

$$\begin{aligned} \langle f^{-1}(\mathbf{x}), f^{-1}(\mathbf{y}) \rangle &= \langle f(f^{-1}(\mathbf{x})), f(f^{-1}(\mathbf{y})) \rangle && \text{(puisque } f \text{ est orthogonal)} \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle. \end{aligned}$$

Ce qui montre que f^{-1} est orthogonal. Ainsi se complète cette démonstration. ■

On tire immédiatement de la proposition 7.12 l'important corollaire suivant :

COROLLAIRE 7.13.— *Supposons que E est euclidien. Alors l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E muni de la loi de composition des endomorphismes constitue un groupe, qui est en fait un sous-groupe du groupe linéaire $GL(E)$.* ■

Définitions et notations 7.VIII.—

1. Supposons que E est euclidien. L'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E muni de la loi de composition des endomorphismes (qui est un groupe d'après le corollaire 7.13) s'appelle *le groupe orthogonal* de E et se note $O(E)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (qui constitue un sous-groupe du groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$) s'appelle *le groupe orthogonal de degré n sur \mathbb{R}* et se note $O_n(\mathbb{R})$.

Remarque 7.III.— Supposons que E est euclidien et soit f un endomorphisme orthogonal de E . Puisque f conserve les produits scalaires et les normes alors il conserve aussi les quantités $\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} = \cos(\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}})$ ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$); autrement dit, f conserve les angles non orientés. En supposant qu'on dispose de la notion d'**angles orientés**, deux situations seulement sont possibles :

- ou bien f conserve les angles orientés,
- ou bien f transforme tout angle orienté $\theta \pmod{2\pi}$ en $(-\theta) \pmod{2\pi}$.

Dans le premier cas, on dira que f est un endomorphisme orthogonal **direct** et dans le second cas, on dira que f est un endomorphisme orthogonal **indirect** (ou **gauche**). On verra de suite ces deux notions sous une forme plus commode.

PROPOSITION 7.14.— *Supposons que E est euclidien et soit f un endomorphisme orthogonal de E . Alors on a :*

$$\det f = \pm 1.$$

Démonstration.— Posons $n := \dim E$ et soient \mathcal{B} une base orthonormée de E et A la matrice représentant f relativement à \mathcal{B} . D'après la proposition 7.9, on a : ${}^tAA = I_n$. Ce qui entraîne que $\det({}^tAA) = \det(I_n) = 1$. Mais $\det({}^tAA) = \det({}^tA)\det(A) = (\det A)^2$ (puisque l'on sait que $\det({}^tA) = \det A$). D'où $(\det A)^2 = 1$; ce qui donne $\det A = \pm 1$. Autrement dit $\det f = \pm 1$, comme il fallait le prouver. ■

Définitions et notations 7.IX.— Supposons que E est euclidien.

1. Un endomorphisme orthogonal f de E est dit *direct* si $\det f = 1$; il est dit *indirect* (ou *gauche*) dans le cas contraire, c'est-à-dire (compte tenu de la proposition 7.14) dans le cas où $\det f = -1$.
2. L'ensemble des **endomorphismes orthogonaux directs** de E constitue un sous-groupe du groupe orthogonal $O(E)$ de E ; on l'appelle *le groupe spécial orthogonal* de E et on le note $SO(E)$.
3. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitue un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$; on l'appelle *le groupe spécial orthogonal de degré n sur \mathbb{R}* et on le désigne par $SO_n(\mathbb{R})$. — Pour $n \in \{2, 3\}$, le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ est parfois appelé *le groupe des rotations vectorielles* (symbolisant la nature géométrique des endomorphismes orthogonaux directs du plan euclidien ou de l'espace euclidien à 3 dimensions).

Exemple 7.III.— Supposons que E est euclidien et soit f un endomorphisme orthogonal de E . Montrer que les seules valeurs propres réelles possibles pour f sont 1 et -1 .

Soit λ une valeur propre réelle de f . Il existe donc $\mathbf{v} \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. En passant aux normes, il vient que $\|f(\mathbf{v})\| = \|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{v}\|$. Mais puisque l'endomorphisme f conserve les normes (car il est orthogonal), on a $\|f(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$. D'où l'on tire que $\|\mathbf{v}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{v}\|$; ce qui entraîne (puisque $\|\mathbf{v}\| \neq 0$, vu que $\mathbf{v} \neq 0_E$) que $|\lambda| = 1$ et conclut que $\lambda = \pm 1$. ■

Remarque 7.IV.— Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on peut adapter la solution de l'exemple précédent pour montrer que les valeurs propres complexes d'une matrice de $O_n(\mathbb{R})$ sont toutes de module 1.

7.5 Endomorphismes normaux

Définition 7.X.— Un endomorphisme f de E est dit *normal* s'il possède un adjoint et commute avec cet adjoint; c'est-à-dire si f^* existe et l'on a $f \circ f^* = f^* \circ f$.

Comme on le voit immédiatement de la définition, les endomorphismes normaux d'un espace préhilbertien englobent à la fois les endomorphismes autoadjoints, les endomorphismes antisymétriques et les endomorphismes orthogonaux.

L'analogie matriciel de la définition 7.X est le suivant :

Définition 7.XI.— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *normale* si elle commute avec sa transposée; c'est-à-dire si $A^t A = {}^t A A$.

Le lien entre les définitions 7.X et 7.XI est fourni par la proposition suivante qui découle immédiatement de la proposition 7.3.

PROPOSITION 7.15.— *Supposons que E est euclidien. Un endomorphisme de E est normal si et seulement si sa matrice associée relativement à une base ortho-normée de E est normale.* ■

La proposition qui suit fournit quelques propriétés caractérisant les endomorphismes normaux d'un espace préhilbertien.

PROPOSITION 7.16.— *Soit f un endomorphisme de E possédant un adjoint. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) f est normal.
- (ii) $\langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \rangle = \langle f^*(\mathbf{x}), f^*(\mathbf{y}) \rangle, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$.
- (iii) $\|f(\mathbf{x})\| = \|f^*(\mathbf{x})\|, \forall \mathbf{x} \in E$.

Démonstration.—

• **(i) \Rightarrow (ii).** Supposons que f est normal et montrons que f satisfait la propriété (ii) de la proposition. Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \rangle &= \langle \mathbf{x}, f^*(f(\mathbf{y})) \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, (f^* \circ f)(\mathbf{y}) \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, (f \circ f^*)(\mathbf{y}) \rangle && \text{(car } f \text{ est supposé normal)} \\ &= \langle \mathbf{x}, f(f^*(\mathbf{y})) \rangle \\ &= \langle f^*(\mathbf{x}), f^*(\mathbf{y}) \rangle && \text{(puisque } f^{**} = f), \end{aligned}$$

comme il fallait le prouver.

• **(ii) \Rightarrow (i).** Supposons que f satisfait la propriété (ii) de la proposition et montrons que f est normal; c'est-à-dire que $f \circ f^* = f^* \circ f$. Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \langle (f \circ f^*)(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle &= \langle f(f^*(\mathbf{x})), \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle f^*(\mathbf{x}), f^*(\mathbf{y}) \rangle \\ &= \langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \rangle && \text{(d'après l'hypothèse faite sur } f) \\ &= \langle f(\mathbf{y}), f(\mathbf{x}) \rangle \\ &= \langle \mathbf{y}, f^*(f(\mathbf{x})) \rangle \\ &= \langle \mathbf{y}, (f^* \circ f)(\mathbf{x}) \rangle \\ &= \langle (f^* \circ f)(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle. \end{aligned}$$

D'où l'on tire que pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, on a :

$$\langle (f \circ f^*)(\mathbf{x}) - (f^* \circ f)(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = 0.$$

Ce qui entraîne que :

$$(f \circ f^*)(\mathbf{x}) - (f^* \circ f)(\mathbf{x}) \in E^\perp \quad (\forall \mathbf{x} \in E).$$

Comme $E^\perp = \{\mathbf{0}_E\}$, il en découle immédiatement que :

$$(f \circ f^*)(\mathbf{x}) = (f^* \circ f)(\mathbf{x}) \quad (\forall \mathbf{x} \in E).$$

Autrement dit $f \circ f^* = f^* \circ f$, signifiant que f est normal, comme il fallait le prouver.

On vient ainsi de montrer l'équivalence entre les deux points (i) et (ii) de la proposition. Pour ce qui concerne l'équivalence entre les deux points (ii) et (iii) de la proposition, elle provient directement des formules :

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \quad (\forall \mathbf{x} \in E)$$

et

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2 \right) \quad (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E).$$

La proposition est démontrée. ■



Exercices

Exercice 7.1. Pour tout nombre réel θ , on pose

$$O_\theta := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice O_θ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est orthogonale.
2. Montrer que toute matrice orthogonale O de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ s'écrit sous l'une des deux formes : $O = O_\theta$ ou $O = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} O_\theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$). Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 7.2. Soit n un entier strictement positif. Montrer que pour toute matrice orthogonale $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :


$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| \leq n \sqrt{n} \quad \text{et} \quad \left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \right| \leq n.$$

Exercice 7.3 (Décomposition QR d'une matrice carrée inversible).

Etant donné un entier strictement positif n , montrer que toute matrice A de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ peut se décomposer sous la forme

$$A = QR,$$

avec $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure.

 Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt aux vecteurs colonnes de A .

Application : Déterminer une décomposition QR pour la matrice


$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7.4 (Matrices de Householder et application à la décomposition QR).

Soient E un espace euclidien, \mathbf{u} un vecteur non nul de E et K l'hyperplan de E orthogonal à \mathbf{u} (i.e., $K = \{\mathbf{u}\}^\perp$).

1. Montrer que la symétrie orthogonale d'un vecteur \mathbf{x} de E par rapport à K est donnée par :

$$s_K(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2 \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u}.$$

 Utiliser le résultat du point 2. de l'exercice 6.10.

2. Montrer que si \mathbf{x} et \mathbf{y} sont deux vecteurs distincts de E ayant la même norme alors pour $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ et $K = \{\mathbf{u}\}^\perp$, on a :

$$s_K(\mathbf{x}) = \mathbf{y}.$$


3. Prenons pour toute la suite $E = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}})$ (où n est un entier strictement positif).

- (a) Montrer que la matrice associée à s_K (la symétrie orthogonale par rapport à K) relativement à la base canonique de \mathbb{R}^n est donnée par :

$$H_{\mathbf{u}} = I_n - \frac{2}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u}^t \mathbf{u}.$$

(Une telle matrice s'appelle **matrice de Householder**).

- (b) En s'appuyant sur le résultat de la question 2. de l'exercice en cours, en déduire une méthode de décomposition d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sous la forme QR , avec Q et R sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, Q étant orthogonale et R est triangulaire supérieure.

 Multiplier la matrice A par une matrice de Householder adéquate (à gauche) afin de transformer son premier vecteur

colonne (disons \mathbf{c}_1) en $\begin{pmatrix} \|\mathbf{c}_1\| \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, puis réitérer la procédure.


Exercice 7.5 (Inégalité de Hadamard).

Soient n un entier strictement positif et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les vecteurs colonnes sont désignés par $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n$.

1. Montrer l'inégalité :

$$|\det A| \leq \|\mathbf{c}_1\|_2 \cdot \|\mathbf{c}_2\|_2 \cdots \|\mathbf{c}_n\|_2$$

(connue sous le nom de **l'inégalité de Hadamard**).

 Le résultat est trivial si $\det A = 0$. Dans le cas contraire (i.e.,

$A \in GL_n(\mathbb{R})$, décomposer A sous la forme $A = QR$, avec $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure (voir l'exercice 7.3), et constater que l'on a ${}^tAA = {}^tRR$. Pour conclure, identifier les déterminants et les coefficients diagonaux des deux matrices identiques tAA et tRR et constater que l'inégalité de Hadamard est triviale pour R .

2. Montrer que l'inégalité de Hadamard devient une égalité si et seulement si les vecteurs colonnes $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n$ de la matrice A sont deux à deux orthogonaux relativement au produit scalaire usuel de \mathbb{R}^n .



Espaces hermitiens, espaces préhilbertiens complexes et espaces de Hilbert complexes

Sommaire

- 8.1 Introduction 125**
- 8.2 Applications sesquilinéaires 126**
- 8.3 Le noyau d'une forme hermitienne 130**
- 8.4 Représentation matricielle d'une forme sesquilinéaire sur un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie 131**
 - 8.4.1 Matrice associée à une forme sesquilinéaire 132
 - 8.4.2 L'équivalent matriciel d'une forme hermitienne sur E 135
 - 8.4.3 Calcul pratique du noyau d'une forme hermitienne 137
 - 8.4.4 Formule de changement de base 137
- 8.5 Formes quadratiques hermitiennes et orthogonalité . . 138**
 - 8.5.1 Forme quadratique hermitienne associée à une forme hermitienne 139
 - 8.5.2 Reconnaissance rapide d'une forme quadratique hermitienne et détermination rapide de sa forme polaire (en dimension finie) 142
 - 8.5.3 Orthogonalité 143
 - 8.5.4 Réduction de Gauss des formes quadratiques hermitiennes 147
 - 8.5.5 Une méthode alternative matricielle pour réduire une forme quadratique hermitienne 150

8.5.6	Equivalence des formes quadratiques hermitiennes	152
8.5.7	Calcul de la signature d'une forme quadratique hermitienne par la méthode des déterminants de Sylvester	154
8.6	Norme associée à un produit scalaire complexe	156
8.7	Orthogonalité dans un espace préhilbertien complexe	159
8.7.1	Construction d'une base orthonormée pour un espace hermitien	159
8.7.2	Supplémentaire orthogonal et projection orthogonale	160
8.7.3	Distance d'un vecteur par rapport à un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien complexe	162
	Exercices	164

8.1 Introduction

Si l'on essaye de définir un produit scalaire sur un \mathbb{C} -espace vectoriel de la même sorte qu'un produit scalaire sur un \mathbb{R} -espace vectoriel (c'est-à-dire comme une forme bilinéaire symétrique définie positive), on se heurte immédiatement au problème de **positivité**. En effet, pour parler de positivité, il faut déjà avoir affaire à des valeurs réelles. Par exemple, l'analogie « naïf » du produit scalaire usuel de \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}^*$) sur \mathbb{C}^n , défini par :

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}' \rangle := z_1 z'_1 + z_2 z'_2 + \cdots + z_n z'_n \quad (\forall \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \mathbf{z}' = \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n),$$

ne satisfait même pas la condition « $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle \in \mathbb{R}$ ($\forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$) », étant donné qu'une somme de carrés de nombres complexes n'a aucune raison d'être réelle. Pour y remédier à ce problème, on a songé à modifier la définition précédente de $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}' \rangle$ en :

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}' \rangle := \bar{z}_1 z'_1 + \bar{z}_2 z'_2 + \cdots + \bar{z}_n z'_n \quad (\forall \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \mathbf{z}' = \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n).$$

Cela fonctionne bien puisque l'on obtient pour tout $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$:

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 > 0.$$

En revanche, le concept de « la bilinéarité » devra être remplacé par un autre que l'on nomme « la sesquilinearité ». Tout cela va être détaillé au fur et à mesure dans ce qui va suivre.

8.2 Applications sesquilineaires

Pour tout ce qui suit, E, F et G désignent des \mathbb{C} -espaces vectoriels.

Définition 8.I.— Une application $f : E \rightarrow F$ est dite *semilinéaire* si l'on a pour tous $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in E$ et tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$:

$$f(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2) = \bar{\lambda}_1 f(\mathbf{x}_1) + \bar{\lambda}_2 f(\mathbf{x}_2). \quad (8.1)$$

Remarques 8.I.—

1. Il va de soi que la condition (8.1) de la définition 8.I est équivalente aux deux suivantes (réunies) :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) &= f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2), \\ f(\lambda \mathbf{x}) &= \bar{\lambda} f(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}).$$

Elle est également équivalente à :

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \bar{\lambda} f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2) \quad (\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}).$$

2. Il est facile de montrer que la composition de deux applications semilinéaires donne une application linéaire ; ce qui pourrait expliquer la nomination « semilinéaire » aux applications auxquelles elle est attribuée.

Définition 8.II.— Une application $f : E \times F \rightarrow G$ est dite *sesquilineaire* si elle est **semilinéaire** par rapport à sa première variable et **linéaire** par rapport à sa seconde variable ; autrement dit, si l'on a pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in E$, tous $\mathbf{y}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in F$ et tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$:

$$f(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = \bar{\lambda}_1 f(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \bar{\lambda}_2 f(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \quad (8.2)$$

et

$$f(\mathbf{x}, \lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2) = \lambda_1 f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + \lambda_2 f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2). \quad (8.3)$$

Bien entendu, l'identité (8.2) symbolise **la semilinéarité** de f par rapport à sa première variable et l'identité (8.3) symbolise **la linéarité** de f par rapport à sa seconde variable.

— Une application sesquilinéaire de $E \times F$ dans \mathbb{C} (i.e., lorsque $G = \mathbb{C}$) s'appelle *une forme sesquilinéaire sur $E \times F$* .

— Par abus de langage, une forme sesquilinéaire sur $E \times E$ s'appelle *une forme sesquilinéaire sur E* .

N.B.— Le terme « sesquilinéaire » est un préfixe latin qui veut dire « un et demi ».

Définition 8.III.— On appelle *forme hermitienne* sur E toute forme sesquilinéaire f sur E qui vérifie de surplús la propriété :

$$\overline{f(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E). \quad (8.4)$$

— La propriété (8.4) seule s'appelle *la symétrie conjuguée*.

Remarque 8.II.— Si une application $f : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ est **symétrique par conjugaison complexe** (i.e., satisfait (8.4)) alors pour qu'elle soit une forme hermitienne, il suffit qu'elle soit semilinéaire par rapport à sa première variable **ou** linéaire par rapport à sa seconde variable. C'est un exercice facile mais intéressant à faire.

PROPOSITION 8.1.— Soit f une forme hermitienne sur E . Alors on a pour tout $\mathbf{x} \in E : f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}$.

Démonstration.— Par hypothèse, f est symétrique par conjugaison complexe. On a donc pour tout $\mathbf{x} \in E : \overline{f(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$; ce qui entraîne que $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}$, comme il fallait le prouver. ■

La proposition 8.1 rend raisonnable et sensé de parler de **la positivité** de la quantité $f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ pour une forme hermitienne f sur E (où $\mathbf{x} \in E$). On a les définitions suivantes :

Définitions 8.IV.— Soit f une forme hermitienne sur E .

— On dit que f est *définie* si l'on a pour tout $\mathbf{x} \in E :$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}_E.$$

— On dit que f est *positive* si l'on a pour tout $\mathbf{x} \in E$:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0.$$

— On dit que f est *définie positive* si l'on a pour tout $\mathbf{x} \in E \setminus \{\mathbf{0}_E\}$:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0.$$

Il va de soi que « f est définie positive » si et seulement si f est à la fois « définie » et « positive ».

Définition 8.V (produit scalaire complexe).— On appelle *produit scalaire* sur E toute forme hermitienne définie positive sur E .

Notation 8.I.— Comme dans le cas réel, un produit scalaire complexe est généralement représenté par le symbole \langle , \rangle . Ainsi, un produit scalaire de deux vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} de E est désigné par $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

Exemple 8.I (le produit scalaire usuel de \mathbb{C}^n).— Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$f : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right) \longmapsto \bar{z}_1 w_1 + \bar{z}_2 w_2 + \cdots + \bar{z}_n w_n.$$

— Montrer que f est un produit scalaire sur le \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C}^n .

Montrons d'abord que f est symétrique par conjugaison. Pour tous $\mathbf{z} = {}^t(z_1, z_2, \dots, z_n)$, $\mathbf{w} = {}^t(w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$\begin{aligned} \overline{f(\mathbf{z}, \mathbf{w})} &= \overline{\bar{z}_1 w_1 + \bar{z}_2 w_2 + \cdots + \bar{z}_n w_n} \\ &= z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 + \cdots + z_n \bar{w}_n \\ &= \bar{w}_1 z_1 + \bar{w}_2 z_2 + \cdots + \bar{w}_n z_n \\ &= f(\mathbf{w}, \mathbf{z}). \end{aligned}$$

Ce qui confirme que f est symétrique par conjugaison. De ce fait, pour montrer que f est hermitienne, il suffit de montrer qu'elle est linéaire par rapport à sa seconde variable (en vertu de la remarque 8.II). Pour tous $\mathbf{z} = {}^t(z_1, z_2, \dots, z_n)$, $\mathbf{w} = {}^t(w_1, w_2, \dots, w_n)$, $\mathbf{w}' = {}^t(w'_1, w'_2, \dots, w'_n) \in \mathbb{C}^n$ et tous $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}$, on a (puisque $\lambda \mathbf{w} + \lambda' \mathbf{w}' = {}^t(\lambda w_1 + \lambda' w'_1, \lambda w_2 + \lambda' w'_2, \dots, \lambda w_n + \lambda' w'_n)$) :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}, \lambda \mathbf{w} + \lambda' \mathbf{w}') &= \bar{z}_1 (\lambda w_1 + \lambda' w'_1) + \bar{z}_2 (\lambda w_2 + \lambda' w'_2) + \cdots + \bar{z}_n (\lambda w_n + \lambda' w'_n) \\ &= \lambda (\bar{z}_1 w_1 + \bar{z}_2 w_2 + \cdots + \bar{z}_n w_n) + \lambda' (\bar{z}_1 w'_1 + \bar{z}_2 w'_2 + \cdots + \bar{z}_n w'_n) \\ &= \lambda f(\mathbf{z}, \mathbf{w}) + \lambda' f(\mathbf{z}, \mathbf{w}'). \end{aligned}$$

Ce qui montre que f est linéaire par rapport à sa seconde variable; d'où f est hermitienne. Il reste à montrer que f est définie positive (i.e., à la fois positive et définie). Pour tout $\mathbf{z} = {}^t(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$f(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \bar{z}_1 z_1 + \bar{z}_2 z_2 + \dots + \bar{z}_n z_n = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2.$$

D'où $f(\mathbf{z}, \mathbf{z}) \geq 0$ ($\forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$); autrement dit, f est positive. De plus, pour tout $\mathbf{z} = {}^t(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = 0 &\implies |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 = 0 \\ &\implies |z_1| = |z_2| = \dots = |z_n| = 0 \\ &\implies z_1 = z_2 = \dots = z_n = 0 \\ &\implies \mathbf{z} = \mathbf{0}_{\mathbb{C}^n}. \end{aligned}$$

Ce qui montre que f est définie.

En conclusion, f est une forme hermitienne définie positive; autrement dit, f est un produit scalaire sur \mathbb{C}^n . ■

Appellation et notation 8.I.— Le produit scalaire f sur \mathbb{C}^n ($n \in \mathbb{N}^*$) de l'exemple 8.I de ci-dessus s'appelle *le produit scalaire usuel* de \mathbb{C}^n et se note $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}}$. Le produit scalaire usuel de deux vecteurs \mathbf{z} et \mathbf{w} de \mathbb{C}^n se note donc $\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle_{\text{us}}$.

Exemple 8.II (En dimension infinie).— Posons $E := \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$ (qui est un \mathbb{C} -espace vectoriel avec les opérations usuelles) et soit

$$\begin{aligned} \varphi : E \times E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) &\longmapsto \int_0^1 \overline{f(x)} g(x) dx \end{aligned}$$

— Montrer que φ est un produit scalaire sur E .

Montrons d'abord que φ est symétrique par conjugaison. Pour tous $f, g \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \overline{\varphi(f, g)} &= \overline{\int_0^1 \overline{f(x)} g(x) dx} \\ &= \int_0^1 \overline{\overline{f(x)} g(x)} dx \\ &= \int_0^1 \overline{f(x)} \overline{g(x)} dx \\ &= \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx \\ &= \int_0^1 \overline{g(x)} f(x) dx \\ &= \varphi(g, f). \end{aligned}$$

Ce qui confirme que φ est symétrique par conjugaison. Pour montrer que φ est hermitienne, il suffit donc de montrer (par exemple) qu'elle est linéaire par rapport à sa seconde variable (en vertu de la remarque 8.II). Pour tous $f, g_1, g_2 \in E$ et tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) &= \int_0^1 \overline{f(x)} (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(x) dx \\ &= \int_0^1 \overline{f(x)} (\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x)) dx \\ &= \lambda_1 \int_0^1 \overline{f(x)} g_1(x) dx + \lambda_2 \int_0^1 \overline{f(x)} g_2(x) dx \\ &= \lambda_1 \varphi(f, g_1) + \lambda_2 \varphi(f, g_2).\end{aligned}$$

Ce qui montre que φ est linéaire par rapport à sa seconde variable; d'où φ est hermitienne. Il reste à montrer que φ est définie positive (c'est-à-dire qu'elle est à la fois positive et définie). Pour tout $f \in E$, on a : $\varphi(f, f) = \int_0^1 \overline{f(x)} f(x) dx = \int_0^1 |f(x)|^2 dx \geq 0$ (car c'est une intégrale d'une fonction réelle positive). Par ailleurs, en appliquant la propriété des intégrales de Riemann selon laquelle «l'intégrale d'une fonction réelle continue et positive sur un intervalle fermé borné de \mathbb{R} est nulle si et seulement si la fonction en question est nulle sur tout l'intervalle d'intégration», on a pour tout $f \in E$:

$$\begin{aligned}\varphi(f, f) = 0 &\iff \int_0^1 \overline{f(x)} f(x) dx = 0 \\ &\iff \int_0^1 |f(x)|^2 dx = 0 \\ &\iff |f(x)|^2 = 0, \forall x \in [0, 1] \quad (\text{car } |f|^2 \text{ est réelle continue et positive sur } [0, 1]) \\ &\iff f(x) = 0, \forall x \in [0, 1] \\ &\iff f = \mathbf{0}_E.\end{aligned}$$

Ce qui montre que φ est définie.

En conclusion, φ est une forme hermitienne définie positive sur E ; autrement dit, φ est un produit scalaire sur E . ■

8.3 Le noyau d'une forme hermitienne

Pour ce qui suit, E désigne un \mathbb{C} -espace vectoriel.

Définition 8.VI.— Soit f une forme hermitienne sur E . On appelle le *noyau* de f le sous-ensemble de E , noté $\text{Ker } f$, et défini par :

$$\text{Ker } f := \{x \in E : f(x, y) = 0, \forall y \in E\}. \quad (8.5)$$

— On montre immédiatement (en utilisant la symétrie conjuguée de f) que l'on a aussi :

$$\text{Ker } f = \{y \in E : f(x, y) = 0, \forall x \in E\}. \quad (8.6)$$

En utilisant la semilinéarité d'une forme hermitienne (sur E) par rapport à sa première variable, on montre aisément la proposition suivante (les détails sont laissés au lecteur).

PROPOSITION 8.2.— *Le noyau de toute forme hermitienne sur E est un \mathbb{C} -sous-espace vectoriel de E .* ■

Remarque 8.III.— Étant donnée f une forme hermitienne sur E , considérons les applications f_x ($x \in E$) suivantes :

$$\begin{aligned} f_x : E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ y &\longmapsto f(x, y) \end{aligned} .$$

La linéarité de f par rapport à sa seconde variable montre immédiatement que ces applications f_x ($x \in E$) sont toutes linéaires (donc des formes linéaires sur E). D'autre part, en utilisant (8.6), on a immédiatement

$$\text{Ker } f = \bigcap_{x \in E} \text{Ker } f_x,$$

qui est une intersection de sous-espaces vectoriels de E ; d'où l'on obtient (d'une autre façon) le résultat de la proposition 8.2, à savoir que $\text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel de E .

Définition 8.VII.— Une forme hermitienne f sur E est dite *non dégénérée* si $\text{Ker } f = \{0_E\}$. Elle est dite *dégénérée* dans le cas contraire.

L'exemple suivant est l'analogie de l'exemple 1.V du §1 sur les formes bilinéaires symétriques. Comme il se résout de la même façon aussi, on a laissé sa résolution au soin du lecteur.

Exemple 8.III.— Montrer que toute forme hermitienne **définie** sur E est **non dégénérée**. En particulier, tout produit scalaire sur E est une forme hermitienne non dégénérée. ■

8.4 Représentation matricielle d'une forme sesquilinéaire sur un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie

Pour ce qui suit, on fixe un entier strictement positif n et un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension n . Étant donné que la lettre i est réservée pour désigner le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$, on utilise comme indices de sommation les lettres k et ℓ au lieu des lettres i et j utilisées pour les formes bilinéaires au chapitre 2.

8.4.1 Matrice associée à une forme sesquilinéaire

Soient $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base de E et $f : E^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire sur E . Pour $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, on désigne par $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les coordonnées respectives de \mathbf{x} et \mathbf{y} relativement à la base \mathcal{B} (avec $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{C}$); soit

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{e}_k \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = \sum_{\ell=1}^n y_\ell \mathbf{e}_\ell.$$

En utilisant la sesquilinearité de f , on a pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= f\left(\sum_{k=1}^n x_k \mathbf{e}_k, \sum_{\ell=1}^n y_\ell \mathbf{e}_\ell\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \bar{x}_k f\left(\mathbf{e}_k, \sum_{\ell=1}^n y_\ell \mathbf{e}_\ell\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \bar{x}_k \sum_{\ell=1}^n y_\ell f(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_\ell) \\ &= \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} \bar{x}_k y_\ell f(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_\ell). \end{aligned}$$

D'où la formule :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} f(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_\ell) \bar{x}_k y_\ell \quad (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E). \quad (8.7)$$

Cette dernière formule montre que la forme sesquilinéaire f est entièrement déterminée par le paquet de nombres $f(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_\ell)$ ($1 \leq k, \ell \leq n$). D'où l'idée de représenter f par ce paquet de nombres :

Définition 8.VIII.— On définit la matrice associée à f relativement à \mathcal{B} , notée $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$, par :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) := (f(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_\ell))_{1 \leq k, \ell \leq n}.$$

Exemple 8.IV.— Montrer que la matrice associée au produit scalaire usuel de \mathbb{C}^n relativement à la base canonique de \mathbb{C}^n est la matrice identité d'ordre n .

Désignons par $\mathcal{C} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ la base canonique de \mathbb{C}^n . Par définition même du produit scalaire usuel de \mathbb{C}^n , on a clairement pour tous $k, \ell \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_\ell \rangle_{\text{us}} = \delta_{k\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La matrice associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}}$ relativement à \mathcal{C} est donc

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}}) := (\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_\ell \rangle_{\text{us}})_{1 \leq k, \ell \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} = I_n,$$

comme il fallait le prouver. ■

Nous allons maintenant chercher une écriture matricielle pour le membre de droite de la formule (8.7). Cela nécessite d'introduire préalablement quelques nouvelles notations.

Notations 8.II.— Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{k\ell})_{1 \leq k, \ell \leq m} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$.

— On note \bar{A} la matrice de $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, obtenue à partir de la matrice A en remplaçant chaque coefficient de celle-ci par son conjugué complexe ; soit

$$\bar{A} := (\bar{a}_{k\ell})_{1 \leq k, \ell \leq m}.$$

— On note aussi A^* la transposée de \bar{A} ; soit

$$A^* := {}^t \bar{A} = (\bar{a}_{\ell k})_{1 \leq k, \ell \leq m}.$$

— On montre immédiatement que l'on a pour tous $A, B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$: $\overline{AB} = \bar{A} \bar{B}$ et $(AB)^* = B^* A^*$.

On a la proposition suivante :

PROPOSITION 8.3.— Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice associée à la forme sesquilinéaire f relativement à la base \mathcal{B} de E . Alors pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, on a :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X^* A Y.$$

Démonstration.— Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$. On a :

$$X^* A Y = {}^t \bar{X} A Y = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \begin{pmatrix} f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & \dots & f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) & \dots & f(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{k=1}^n f(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_1) \bar{x}_k, \sum_{k=1}^n f(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_2) \bar{x}_k, \dots, \sum_{k=1}^n f(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_n) \bar{x}_k \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{\ell=1}^n \left(\sum_{k=1}^n f(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_\ell) \bar{x}_k \right) y_\ell \\
&= \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} f(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_\ell) \bar{x}_k y_\ell \\
&= f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (\text{en vertu de (8.7)}).
\end{aligned}$$

Ce qui démontre la proposition. ■

De la proposition 8.3, on tire l'utile corollaire suivant :

COROLLAIRE 8.4.— Pour tous $X, Y \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$\langle X, Y \rangle_{us} = X^* Y.$$

Démonstration.— Il suffit de combiner les résultats de l'exemple 8.IV et de la proposition 8.3. ■

Exemple 8.V.— Déterminer l'expression algébrique de la forme sesquilinéaire de \mathbb{C}^3 dont la matrice associée relativement à la base canonique de \mathbb{C}^3 est :

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & i & 0 \\ 2+3i & 1 & -i \\ 2i & -1 & 5+i \end{pmatrix}.$$

Désignons par f la forme sesquilinéaire requise et par $a_{k\ell}$ ($1 \leq k, \ell \leq 3$) le coefficient de la matrice A qui se situe à l'intersection de sa $k^{\text{ème}}$ ligne avec sa $\ell^{\text{ème}}$ colonne.

D'après la formule (8.7), on a pour tous $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$:

$$\begin{aligned}
f(X, Y) &= \sum_{1 \leq k, \ell \leq 3} a_{k\ell} \bar{x}_k y_\ell \\
&= (1+i) \bar{x}_1 y_1 + i \bar{x}_1 y_2 + (2+3i) \bar{x}_2 y_1 + \bar{x}_2 y_2 - i \bar{x}_2 y_3 + 2i \bar{x}_3 y_1 - \bar{x}_3 y_2 + (5+i) \bar{x}_3 y_3. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Remarque 8.IV.— On a une correspondance bijective entre l'ensemble des formes sesquilinéaires sur E et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ce qui entraîne que l'on a pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$(\forall X, Y \in \mathbb{C}^n : X^* A Y = X^* B Y) \iff A = B.$$

8.4.2 L'équivalent matriciel d'une forme hermitienne sur E

Nous introduisons d'abord la définition suivante :

Définition 8.IX.— Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *hermitienne* si l'on a : $A^* = A$.

On a la proposition suivante :

PROPOSITION 8.5.— Soient \mathcal{B} une base de E et f une forme sesquilinéaire sur E dont la matrice associée relativement à \mathcal{B} est désignée par A . Alors f est hermitienne si et seulement si A est hermitienne.

Démonstration.— Pour $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, convenons de désigner par $X, Y \in \mathbb{C}^n$ les coordonnées respectives de \mathbf{x} et \mathbf{y} relativement à \mathcal{B} . On a (en vertu de la proposition 8.3) :

$$\begin{aligned} f \text{ est hermitienne} &\stackrel{\text{déf}}{\iff} \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E : \overline{f(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \\ &\iff \forall X, Y \in \mathbb{C}^n : \overline{X^* A Y} = Y^* A X \\ &\iff \forall X, Y \in \mathbb{C}^n : \overline{X^*} \overline{A} \overline{Y} = Y^* A X. \end{aligned}$$

Mais puisque $\overline{X^*} \overline{A} \overline{Y} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ ($\forall X, Y \in \mathbb{C}^n$), on a pour tous $X, Y \in \mathbb{C}^n$:

$$\overline{X^*} \overline{A} \overline{Y} = {}^t(\overline{X^*} \overline{A} \overline{Y}) = {}^t \overline{Y} {}^t \overline{A} {}^t \overline{X^*} = Y^* A^* (X^*)^* = Y^* A^* X.$$

D'où :

$$\begin{aligned} f \text{ est hermitienne} &\iff \forall X, Y \in \mathbb{C}^n : Y^* A^* X = Y^* A X \\ &\iff A^* = A \quad (\text{en vertu de la remarque 8.IV}) \\ &\iff A \text{ est hermitienne.} \end{aligned}$$

Ainsi s'achève cette démonstration. ■

Remarque 8.V.— L'ensemble $\mathbf{H}(E)$ des formes hermitiennes sur E est un \mathbb{R} -espace vectoriel mais ce n'est pas un \mathbb{C} -espace vectoriel ; idem pour l'ensemble $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ des matrices hermitiennes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. De plus, en fixant une base \mathcal{B} de E , on a une correspondance bijective $f \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ de $\mathbf{H}(E)$ dans $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ (en vertu de la proposition 8.5). Comme une telle correspondance est de toute évidence linéaire aussi, elle constitue un isomorphisme de \mathbb{R} -espaces vectoriels. D'où l'on tire que :

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{H}(E)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_n(\mathbb{C})).$$

Par ailleurs, on constate qu'une matrice hermitienne de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est entièrement caractérisée par ses n coefficients de la diagonale (qui sont obligatoirement réels) et ses coefficients complexes situés strictement au dessus de sa diagonale (qui sont en nombres de $\frac{n(n-1)}{2}$, chacun étant déterminé par ses deux parties réelle et imaginaire). On a par conséquent :

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_n(\mathbb{C})) = n + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n^2.$$

En conclusion, on a :

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{H}(E)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_n(\mathbb{C})) = n^2.$$

Nous présentons maintenant les analogues matriciels des définitions 8.IV :

Définitions 8.X.— Soit A une matrice hermitienne de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et f la forme hermitienne de \mathbb{C}^n qui lui est associée relativement à la base canonique ⁽¹⁾ de \mathbb{C}^n .

— On dit que A est *définie* si f est **définie** ; c'est-à-dire si :

$$\forall X \in \mathbb{C}^n : X^*AX = 0 \implies X = \mathbf{0}_{\mathbb{C}^n}$$

(en vertu de la proposition 8.3).

— On dit que A est *positive* si f est **positive** ; c'est-à-dire si :

$$\forall X \in \mathbb{C}^n : X^*AX \geq 0$$

(en vertu de la proposition 8.3).

— On dit que A est *définie positive* si f est **définie positive** ; c'est-à-dire si :

$$\forall X \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{C}^n}\} : X^*AX > 0$$

(en vertu de la proposition 8.3).

On voit immédiatement que A est **définie positive** si et seulement si A est à la fois **définie** et **positive**.

(1). Le choix d'une autre base n'influe pas ces définitions comme on pourrait le voir assez facilement. Plus généralement, on peut prendre f comme étant la forme hermitienne associée à A relativement à n'importe quel \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n relativement à n'importe quelle base de celui-ci.

8.4.3 Calcul pratique du noyau d'une forme hermitienne

La proposition suivante est l'analogue de la proposition 2.4 du §2. Elle nous permet de calculer le noyau d'une forme hermitienne à partir d'une matrice qui la représente comme on le fait pour un endomorphisme. Sa preuve (laissée au lecteur) est aussi la même que celle de la proposition 2.4 avec bien sûr les modifications évidentes qui s'y imposent.

PROPOSITION 8.6.— Soient f une forme hermitienne sur E et A la matrice qui la représente relativement à une certaine base \mathcal{B} de E . Soit aussi u l'endomorphisme de E dont A est la matrice associée relativement à \mathcal{B} . Alors on a :

$$\text{Ker } f = \text{Ker } u. \quad \blacksquare$$

De cette dernière proposition découle immédiatement le corollaire pratique suivant qui caractérise la non-dégénérescence d'une forme hermitienne de E à partir de sa représentation matricielle relativement à une base arbitraire de E . Il est l'analogue du corollaire 2.5 du §2.

COROLLAIRE 8.7.— Soient f une forme hermitienne de E et A la matrice qui la représente relativement à une certaine base \mathcal{B} de E . Alors f est non dégénérée si et seulement si A est inversible ; c'est-à-dire si et seulement si $\det A \neq 0$. \blacksquare

8.4.4 Formule de changement de base

La représentation matricielle d'une forme sesquilinéaire sur E change naturellement lorsqu'on effectue un changement de base de E . La proposition suivante fournit la formule matricielle décrivant ce changement. Il s'agit de l'analogue de la proposition 2.6 du §2 sur les formes bilinéaires ; comme elle s'obtient exactement de la même façon, on a préféré laisser sa preuve au soin du lecteur.

PROPOSITION 8.8.— Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E et P la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' . Soit aussi f une forme sesquilinéaire sur E , représentée dans la base \mathcal{B} par une matrice A et dans la base \mathcal{B}' par une matrice A' . Alors on a :

$$A' = P^* A P. \quad \blacksquare$$

La formule de changement de base établie par la proposition 8.8 nous amène à introduire une relation d'équivalence importante sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Cette relation met dans une même classe les matrices représentant une même forme sesquilinéaire d'un \mathbb{C} -espace vectoriel ⁽²⁾ de dimension n relativement aux différentes bases de celui-ci.

(2). Peu importe le \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n utilisé. Pour fixer les idées, on peut considérer comme \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C}^n .

Définition 8.XI.— Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont dites \star congruentes si elles représentent une même forme sesquilinéaire de \mathbb{C}^n relativement à deux bases (différentes ou identiques) de \mathbb{C}^n .

Compte tenu de la proposition 8.8, cette dernière définition se reformule matriciellement comme ceci :

Définition 8.XII (équivalente à la précédente).— Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont dites \star congruentes s'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que l'on ait :

$$B = P^*AP.$$

Remarque 8.VI.— Comme la multiplication d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par une matrice de $GL_n(\mathbb{C})$ (aussi bien à droite qu'à gauche) ne fait pas changer le rang de A , on déduit de la définition 8.XII que deux matrices \star congruentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ont forcément le même rang. Ce qui nous autorise à poser la définition suivante :

Définition 8.XIII.— Soit f une forme sesquilinéaire sur E . On définit le rang de f , que l'on note $\text{rg}(f)$, comme étant le rang d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui représente f relativement à une certaine base de E .

L'exemple suivant est l'analogie de l'exemple 2.IV du §2 sur les formes bilinéaires symétriques et se traite exactement de la même façon. Le résultat de sa seconde partie nous fournit particulièrement un critère pratique de la dégénérescence d'une forme hermitienne sur un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie.

Exemple 8.VI.— Soit f une forme hermitienne sur E .
— Montrer que l'on a :

$$\dim \text{Ker} f + \text{rg}(f) = n$$

(rappelons que n est la dimension de E).

— En déduire que f est non dégénérée si et seulement si l'on a : $\text{rg}(f) = n$.

8.5 Formes quadratiques hermitiennes et orthogonalité

Tout au long de cette section, un \mathbb{C} -espace vectoriel E est fixé.

8.5.1 Forme quadratique hermitienne associée à une forme hermitienne

Définition 8.XIV.— Soit f une forme hermitienne sur E . On appelle *forme quadratique hermitienne associée à f* l'application :

$$\begin{aligned} q : E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \mathbf{x} &\longmapsto q(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) . \end{aligned}$$

Exemple 8.VII.— Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, la forme quadratique associée au produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}}$ de \mathbb{C}^n (voir l'exemple 8.I) est donnée par :

$$\begin{aligned} q : \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} &\longmapsto q(\mathbf{z}) := \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle_{\text{us}} = \bar{z}_1 z_1 + \bar{z}_2 z_2 + \cdots + \bar{z}_n z_n \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 . \end{aligned}$$

On reconnaît le carré de la norme euclidienne de \mathbb{C}^n (notée $\|\cdot\|_2$). Plus loin, on montrera plus généralement que la forme quadratique associée à **n'importe quel** produit scalaire complexe d'un \mathbb{C} -espace vectoriel est le carré d'une certaine norme de celui-ci.

Définition 8.XV.— On appelle *forme quadratique hermitienne* de E toute application $q : E \rightarrow \mathbb{C}$ qui se présente sous la forme :

$$q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \quad (\forall \mathbf{x} \in E),$$

où f est une **forme hermitienne** sur E .

Par définition même, à toute forme hermitienne sur E est associée une unique forme quadratique hermitienne sur E , mais l'inverse n'est pas tout à fait clair. On se demande explicitement si, étant donnée une forme quadratique hermitienne q sur E , celle-ci est associée à une unique forme hermitienne f sur E . Et, dans l'affirmative, comment déterminer f ? La réponse à ces deux questions est l'objet de la proposition suivante :

PROPOSITION 8.9.— *Toute forme quadratique hermitienne q sur E est associée à une **unique** forme hermitienne f sur E , qui se présente par les formules :*

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{2} (q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + i q(i\mathbf{x} + \mathbf{y})) - \frac{1}{2} (1 + i) (q(\mathbf{x}) + q(\mathbf{y})) \\ &= \frac{q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{4} + i \frac{q(i\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(i\mathbf{x} - \mathbf{y})}{4} \quad (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E). \quad (8.8) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k q(i^k \mathbf{x} + \mathbf{y}) \end{aligned}$$

Démonstration.— Soient q une forme quadratique hermitienne sur E et f l'une des formes hermitiennes sur E qui lui est associée. En utilisant la sesquilinearité et la symétrie conjuguée de f , on a pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ et tout nombre complexe ξ de module 1 :

$$\begin{aligned} q(\xi\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= f(\xi\mathbf{x} + \mathbf{y}, \xi\mathbf{x} + \mathbf{y}) \\ &= \bar{\xi}\xi f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \bar{\xi}f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \xi f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \\ &= |\xi|^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \bar{\xi}f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \xi \overline{f(\mathbf{x}, \mathbf{y})} + f(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \\ &= f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{y}) + 2\Re(\bar{\xi}f(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \\ &= q(\mathbf{x}) + q(\mathbf{y}) + 2\Re(\bar{\xi}f(\mathbf{x}, \mathbf{y})); \end{aligned}$$

d'où l'on tire que :

$$\Re(\bar{\xi}f(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = \frac{1}{2}(q(\xi\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y})). \quad (8.9)$$

En appliquant (8.9) pour $\xi = 1$ puis pour $\xi = i$, tout en constatant que $\Re(-iz) = \Im(z)$ ($\forall z \in \mathbb{C}$), on obtient les formules :

$$\begin{aligned} \Re(f(\mathbf{x}, \mathbf{y})) &= \frac{1}{2}(q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y})) \\ \Im(f(\mathbf{x}, \mathbf{y})) &= \frac{1}{2}(q(i\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y})) \end{aligned} \quad (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E).$$

Mais puisque $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Re(f(\mathbf{x}, \mathbf{y})) + i\Im(f(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ ($\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$), il en découle que l'on a pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + iq(i\mathbf{x} + \mathbf{y})) - \frac{1}{2}(1 + i)(q(\mathbf{x}) + q(\mathbf{y})). \quad (8.10)$$

Ce qui donne la première égalité de (8.8). En appliquant par suite (8.10) au couple $(-\mathbf{x}, \mathbf{y})$ au lieu de (\mathbf{x}, \mathbf{y}) ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$), tout en constatant que $f(-\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $q(-\mathbf{x}) = q(\mathbf{x})$, on obtient la formule (valable pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$) :

$$-f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(q(-\mathbf{x} + \mathbf{y}) + iq(-i\mathbf{x} + \mathbf{y})) - \frac{1}{2}(1 + i)(q(\mathbf{x}) + q(\mathbf{y})). \quad (8.11)$$

Il ne reste qu'à soustraire (membre à membre) (8.11) de (8.10), simplifier et réarranger pour avoir :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4}(q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + iq(i\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(-\mathbf{x} + \mathbf{y}) - iq(-i\mathbf{x} + \mathbf{y})) \quad (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E).$$

Ce qui confirme les égalités restantes de (8.8). Enfin, les formules ainsi démontrées pour $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$) montrent l'unicité de f . Ainsi s'achève cette démonstration. ■

On vient d'établir ainsi une correspondance bijective entre l'ensemble des formes hermitiennes sur E et l'ensemble des formes quadratiques hermitiennes sur E .

Définition 8.XVI.— Soit q une forme quadratique hermitienne sur E . On appelle *forme polaire* associée à q , l'unique forme hermitienne f sur E dont q est la forme quadratique hermitienne associée. D'après la proposition 8.9, on peut définir f par exemple par la formule :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{4} + i \frac{q(i\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(i\mathbf{x} - \mathbf{y})}{4} \quad (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E),$$

que l'on appelle ⁽³⁾ *identité de polarisation*.

Définitions 8.XVII.— Soit q une forme quadratique hermitienne sur E .

1. Supposons que E est de dimension finie. On définit *le rang* de q , que l'on note $\text{rg}(q)$, comme étant le rang de sa forme polaire.
2. On dit que q est *non dégénérée* si sa forme polaire est non dégénérée.
3. On dit que q est *définie* si sa forme polaire est définie; c'est-à-dire si elle vérifie la propriété :

$$\forall \mathbf{x} \in E : q(\mathbf{x}) = 0 \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}_E.$$

4. On dit que q est *positive* si sa forme polaire est positive; c'est-à-dire si elle vérifie la propriété :

$$\forall \mathbf{x} \in E : q(\mathbf{x}) \geq 0.$$

5. On dit que q est *définie positive* si elle est à la fois définie et positive; c'est-à-dire si elle vérifie la propriété :

$$\forall \mathbf{x} \in E \setminus \{\mathbf{0}_E\} : q(\mathbf{x}) > 0.$$

6. On dit que q est *négative* si elle vérifie la propriété :

$$\forall \mathbf{x} \in E : q(\mathbf{x}) \leq 0.$$

7. On dit que q est *définie négative* si elle est à la fois définie et négative; c'est-à-dire si elle vérifie la propriété :

$$\forall \mathbf{x} \in E \setminus \{\mathbf{0}_E\} : q(\mathbf{x}) < 0.$$

Remarque 8.VII.— Par un argument de continuité, analogue à celui utilisé durant la démonstration du corollaire 4.6, on montre qu'une forme quadratique hermitienne définie de E est nécessairement ou bien définie positive ou bien définie négative.

(3). Plus généralement, on appelle *identité de polarisation* toute identité exprimant f en fonction de q .

8.5.2 Reconnaissance rapide d'une forme quadratique hermitienne et détermination rapide de sa forme polaire (en dimension finie)

Lorsque E est de dimension finie, on dispose d'une caractérisation très simple d'une forme quadratique hermitienne sur E à partir de son expression algébrique relativement à une certaine base de E . Cette caractérisation est donnée par la proposition suivante, qui est l'analogue de la proposition 3.2 du §3 sur les formes quadratiques. Encore une fois, on laisse la preuve (jugée très simple) au soin du lecteur!

PROPOSITION 8.10.— *Supposons que E est de dimension finie n (avec $n \geq 1$) et soient $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base de E et $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Alors q est une forme quadratique hermitienne sur E si et seulement si l'expression*

$$q(x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n) \quad (x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C})$$

est de la forme

$$\sum_{1 \leq k, \ell \leq n} a_{k\ell} \bar{x}_k x_\ell,$$

où les $a_{k\ell}$ ($1 \leq k, \ell \leq n$) sont des nombres complexes satisfaisant $\bar{a}_{k\ell} = a_{\ell k}$ ($\forall k, \ell \in \{1, 2, \dots, n\}$). Cette expression s'écrit aussi (de manière équivalente) sous la forme :

$$\sum_{k=1}^n a_{kk} |x_k|^2 + 2 \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} \Re(a_{k\ell} \bar{x}_k x_\ell)$$

(constater que les a_{kk} ($1 \leq k \leq n$) sont des nombres réels⁽⁴⁾).

— De plus, dans un tel cas, la forme polaire associée à q est donnée par :

$$\begin{aligned} f : E^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\longmapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} a_{k\ell} \bar{x}_k y_\ell \end{aligned}$$

où l'on a désigné par x_1, x_2, \dots, x_n et y_1, y_2, \dots, y_n les coordonnées respectives de deux vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} de E relativement à \mathcal{B} . ■

Définition 8.XVIII.— Supposons que E est de dimension finie et soient \mathcal{B} une base de E et q une forme quadratique hermitienne sur E . On définit la matrice associée à q relativement à \mathcal{B} , que l'on note $M_{\mathcal{B}}(q)$, comme étant la matrice associée à sa forme polaire relativement à la même base. Faisons remarquer que $M_{\mathcal{B}}(q)$ est une matrice **hermitienne** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (en vertu de la proposition 8.5).

(4). Puisque l'on a : $\bar{a}_{kk} = a_{kk}$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Exemple 8.VIII.— Soit

$$q : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \longmapsto q(\mathbf{z}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_3|^2 + (1+i)\bar{z}_1z_2 + i\bar{z}_1z_3 \\ + (1-i)\bar{z}_2z_1 + 5\bar{z}_2z_3 - i\bar{z}_3z_1 + 5\bar{z}_3z_2.$$

1. Montrer que q est une forme quadratique hermitienne sur \mathbb{C}^3 .
2. Déterminer la forme polaire associée à q puis la matrice associée à q relativement à la base canonique de \mathbb{C}^3 .

Désignons par \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{C}^3 et par ${}^t(z_1, z_2, z_3)$ et ${}^t(w_1, w_2, w_3)$ les coordonnées respectives de deux vecteurs \mathbf{z} et \mathbf{w} de \mathbb{C}^3 .

1. Étant donné $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^3$, en se servant du fait que $|z_k|^2 = \bar{z}_kz_k$ pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, on a :

$$q(\mathbf{z}) = \bar{z}_1z_1 + \bar{z}_2z_2 - 2\bar{z}_3z_3 + (1+i)\bar{z}_1z_2 + i\bar{z}_1z_3 + (1-i)\bar{z}_2z_1 + 5\bar{z}_2z_3 - i\bar{z}_3z_1 \\ + 5\bar{z}_3z_2 \\ = \sum_{1 \leq k, \ell \leq 3} a_{k\ell} \bar{z}_kz_\ell,$$

avec $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$, $a_{33} = -2$, $a_{12} = \bar{a}_{21} = 1+i$, $a_{13} = \bar{a}_{31} = i$ et $a_{23} = \bar{a}_{32} = 5$. La dernière expression de $q(\mathbf{z})$ confirme (en vertu de la proposition 8.10) que q est bien une forme quadratique hermitienne sur \mathbb{C}^3 .

2. D'après la proposition 8.10, la forme polaire associée à q est donnée par :

$$f : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \longmapsto f(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \sum_{1 \leq k, \ell \leq 3} a_{k\ell} \bar{z}_k w_\ell,$$

où les $a_{k\ell}$ sont les mêmes nombres complexes introduits ci-haut. D'où :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(q) := \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & i \\ 1-i & 1 & 5 \\ -i & 5 & -2 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

8.5.3 Orthogonalité

Dans cette sous-section, on fixe une forme hermitienne f sur E et on désigne par q la forme quadratique hermitienne associée à f .

Définitions 8.XIX.—

- Étant donnés deux vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} de E , on dit que \mathbf{x} est *orthogonal* à \mathbf{y} par rapport à f (ou par rapport à q) et on écrit $\mathbf{x} \perp_f \mathbf{y}$ (ou $\mathbf{x} \perp_q \mathbf{y}$) si :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

La symétrie conjuguée de f assure que la relation \perp_f est symétrique, ce qui rend légitime de remplacer, si on le désire, l'expression « x est orthogonal à y par rapport à f » par « x et y sont orthogonaux par rapport à f », ou plus simplement « x et y sont f -orthogonaux », ou encore « x et y sont q -orthogonaux ». S'il n'y a pas d'ambiguïté sur f (ou q), on peut omettre f (ou q) dans nos expressions, en disant simplement que x et y sont *orthogonaux* et en écrivant simplement $x \perp y$.

- Lorsqu'un vecteur x de E est orthogonal à lui-même, on dit qu'il est *isotrope* (on dit f -isotrope ou q -isotrope s'il y a ambiguïté sur f ou q).
- Etant donnée une partie A de E , on appelle *l'orthogonal* de A par rapport à f (ou par rapport à q) le sous-ensemble de E , noté $A^{\perp f}$ (ou $A^{\perp q}$) et constitué de tous les vecteurs de E qui sont f -orthogonaux à tous les vecteurs de A , soit

$$A^{\perp f} := \{x \in E : f(x, y) = 0, \forall y \in A\}.$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur f (ou q), on écrit A^\perp au lieu de $A^{\perp f}$ (ou $A^{\perp q}$).

Cas particuliers : On a :

$$\begin{aligned} \emptyset^{\perp f} &= \{\mathbf{0}_E\}^{\perp f} = E \\ E^{\perp f} &= \text{Ker } f. \end{aligned}$$

Les propriétés de la proposition suivante se démontrent exactement de la même manière que pour les formes bilinéaires symétriques (voir la proposition 3.3, page 26); elles sont laissées de ce fait au soin du lecteur.

PROPOSITION 8.11.—

1. Pour toute partie A de E , l'ensemble A^\perp est un sous-espace vectoriel de E .
2. Pour tous $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on a :

$$A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp.$$

3. Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on a :

$$A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp.$$

4. Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on a :

$$A \subset A^{\perp\perp}$$

(où $A^{\perp\perp} := (A^\perp)^\perp$). ■

Définitions 8.XX.—

- Une famille \mathcal{F} de E est dite *orthogonale* pour f (ou simplement *orthogonale* s'il n'y a pas d'ambiguïté sur f) si les vecteurs qu'elle constitue sont deux-à-deux orthogonaux ; c'est-à-dire si

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{F}, \text{ avec } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}).$$

- Lorsqu'une base \mathcal{B} de E est une famille orthogonale pour f , on dit que \mathcal{B} est une *base orthogonale* de E pour f (ou simplement une *base orthogonale* de E s'il n'y a pas d'ambiguïté sur f).
- L'expression « orthogonale pour f » est quelquefois remplacée par l'une des expressions suivantes : « orthogonale pour q », « f -orthogonale », « q -orthogonale ».

Tout comme les formes bilinéaires symétriques (voir le théorème 3.4, page 28), une base orthogonale pour une forme hermitienne d'un espace vectoriel complexe de dimension finie existe toujours !

THÉORÈME 8.12.— *Supposons que E est de dimension finie. Alors il existe au moins une base de E , orthogonale pour f .*

Démonstration.— Reprendre la démonstration du théorème 3.4 (page 28) en l'adaptant au cas d'une forme hermitienne. ■

Remarque 8.VIII.— Supposons que E est de dimension finie, notée n ($n \in \mathbb{N}^*$) et considérons une base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ de E qui soit orthogonale pour f (\mathcal{B} existe d'après le théorème 8.12). Pour tous $k, \ell \in \{1, 2, \dots, n\}$, posons $a_{k\ell} := f(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_\ell)$. Comme \mathcal{B} est f -orthogonale, on a $a_{k\ell} = 0$ pour tous $k, \ell \in \{1, 2, \dots, n\}$ tels que $k \neq \ell$. La matrice associée à f relativement à \mathcal{B} s'écrit alors :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & & \mathbf{(0)} \\ & \ddots & \\ \mathbf{(0)} & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

qui est donc diagonale. Nous retenons donc que :

La matrice associée à f relativement à une base f -orthogonale de E est une matrice diagonale.

Nous pouvons donc reformuler le théorème 8.12 de la façon remarquable suivante :

Toute forme hermitienne d'un espace vectoriel complexe de dimension finie est diagonalisable⁽⁵⁾.

Inversement, il est facile de voir que si la matrice associée à f relativement à une certaine base \mathcal{B}' de E est diagonale alors \mathcal{B}' est une base f -orthogonale.

Définitions 8.XXI.—

- Une famille \mathcal{F} de E est dite *orthonormée* pour f (ou simplement *orthonormée* s'il n'y a pas d'ambiguïté sur f) si l'on a pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{F}$:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{y} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

On voit qu'une famille orthonormée est un cas particulier d'une famille orthogonale.

- Lorsqu'une base \mathcal{B} de E est une famille orthonormée pour f , on dit que \mathcal{B} est une *base orthonormée* de E pour f (ou simplement une *base orthonormée* de E s'il n'y a pas d'ambiguïté sur f). Il est facile de montrer que toute famille orthonormée de E est libre. Donc pour qu'une famille orthonormée de E soit une base de E , il suffit qu'elle soit génératrice.
- L'expression « orthonormée pour f » est quelquefois remplacée par l'une des expressions suivantes : « orthonormée pour q », « f -orthonormée », « q -orthonormée ».

Remarques 8.IX.— Supposons que E est de dimension finie, notée n ($n \in \mathbb{N}^*$).

1. La matrice associée à la forme hermitienne f relativement à une base f -orthonormée est la matrice identité I_n .
2. L'existence d'une base f -orthonormée de E n'a pas toujours lieu. Pour le cas le plus important où f est un produit scalaire, une base orthonormée existe toujours comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 8.IX.— Supposons que E est de dimension finie, notée n ($n \in \mathbb{N}^*$) et que f est un produit scalaire sur E . Montrer que E possède une base f -orthonormée.

(5). Dans le sens « représentable par une matrice diagonale ».

Reprendre la solution de l'exemple 3.III (page 31) en l'adaptant aux produits scalaires complexes. ■

8.5.4 Réduction de Gauss des formes quadratiques hermitiennes

Pour toute cette sous-section, on considère que E est de dimension finie n ($n \in \mathbb{N}^*$) et on fixe q une forme quadratique hermitienne non identiquement nulle sur E . A la sous-section 8.5.3, on a vu que E possède au moins une base q -orthogonale $\mathcal{O} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ et que la matrice associée à q relativement à cette base est diagonale. En désignant cette matrice par $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a pour tout $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + \dots + x_n \mathbf{u}_n \in E$ (avec $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$) :

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) &= \lambda_1 \bar{x}_1 x_1 + \lambda_2 \bar{x}_2 x_2 + \dots + \lambda_n \bar{x}_n x_n \\ &= \lambda_1 |x_1|^2 + \lambda_2 |x_2|^2 + \dots + \lambda_n |x_n|^2. \end{aligned}$$

Une telle écriture de $q(\mathbf{x})$ (i.e., une combinaison linéaire de carrés de modules de formes linéaires sur E , lesquelles sont \mathbb{C} -linéairement indépendantes) s'appelle *réduction* (ou *réduite*) de q .

En partant de l'expression de q relativement à une base quelconque de E , la méthode de Gauss étudiée à la section 4.1 permet (en l'adaptant soigneusement) d'aboutir à une *réduite* de q . Détaillons cela brièvement en mettant l'accent sur la différence avec la méthode de Gauss concernant les formes quadratiques usuelles. Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base de E . D'après la proposition 8.10, l'expression de q relativement à \mathcal{B} s'écrit (pour tout $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n \in E$, avec $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$) :

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} a_{k\ell} \bar{x}_k x_\ell,$$

où les $a_{k\ell}$ sont des nombres complexes satisfaisant $\bar{a}_{k\ell} = a_{\ell k}$ pour tous $1 \leq k, \ell \leq n$ (en particulier, les a_{kk} sont réels pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$). La réduction de q se fait par itération en distinguant les deux cas suivants :

1^{er} cas : (si les a_{kk} ne sont pas tous nuls).

Quitte à permuter les coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n , on peut supposer que $a_{11} \neq 0$. On a alors pour tout $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n \in E$ (avec $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$) :

$$q(\mathbf{x}) = a_{11} \bar{x}_1 x_1 + \sum_{k=2}^n a_{1k} \bar{x}_1 x_k + \sum_{k=2}^n a_{k1} \bar{x}_k x_1 + \sum_{2 \leq k, \ell \leq n} a_{k\ell} \bar{x}_k x_\ell$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11} \left(x_1 + \sum_{k=2}^n \frac{a_{1k}}{a_{11}} x_k \right) \left(\bar{x}_1 + \sum_{k=2}^n \overline{\left(\frac{a_{1k}}{a_{11}} \right)} \bar{x}_k \right) - a_{11} \left(\sum_{k=2}^n \frac{a_{1k}}{a_{11}} x_k \right) \left(\sum_{k=2}^n \overline{\left(\frac{a_{1k}}{a_{11}} \right)} \bar{x}_k \right) \\
&\quad + \sum_{2 \leq k, \ell \leq n} a_{k\ell} \bar{x}_k x_\ell \\
&\quad \text{(rappelons que } a_{k1} = \bar{a}_{1k} \text{ pour tout } k \in \{2, 3, \dots, n\} \text{ et que } a_{11} \text{ est réel)} \\
&= a_{11} \left| x_1 + \sum_{k=2}^n \frac{a_{1k}}{a_{11}} x_k \right|^2 + q'(x_2, x_3, \dots, x_n),
\end{aligned}$$

avec

$$q'(x_2, x_3, \dots, x_n) := -a_{11} \left(\sum_{k=2}^n \frac{a_{1k}}{a_{11}} x_k \right) \left(\sum_{k=2}^n \overline{\left(\frac{a_{1k}}{a_{11}} \right)} \bar{x}_k \right) + \sum_{2 \leq k, \ell \leq n} a_{k\ell} \bar{x}_k x_\ell.$$

On réitère alors le procédé pour la nouvelle forme quadratique hermitienne q' aux $(n-1)$ variables x_2, x_3, \dots, x_n .

2nd cas : (si les a_{kk} sont tous nuls).

On sélectionne un coefficient non nul a_{rs} (forcément $r \neq s$) de l'expression de $q(\mathbf{x})$ et on effectue le changement de coordonnées :

$$\begin{cases} x_r = y_r + y_s \\ x_s = \frac{1}{a_{rs}} (y_r - y_s) \\ x_m = y_m \quad (\text{pour } m \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{r, s\}) \end{cases}.$$

Ce qui nous amène au premier cas avec les nouvelles coordonnées y_1, y_2, \dots, y_n et permet ainsi de réitérer le procédé.

Nous illustrons cette méthode avec l'exemple suivant :

Exemple 8.X.— Déterminer une forme réduite de Gauss de la forme quadratique hermitienne q de \mathbb{C}^3 , définie par :

$$\begin{aligned}
q(\mathbf{x}) := & \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 + 2 \bar{x}_3 x_3 + i \bar{x}_1 x_2 + (1+i) \bar{x}_1 x_3 - i \bar{x}_2 x_1 + (3-2i) \bar{x}_2 x_3 + (1-i) \bar{x}_3 x_1 \\
& + (3+2i) \bar{x}_3 x_2
\end{aligned}$$

(pour tout $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$).

— En déduire une base de \mathbb{C}^3 , orthogonale pour q .

On est dans le premier cas de l'algorithme de Gauss puisque le coefficient a_{11} de $\bar{x}_1 x_1$ est non nul (égale à 1). Comme le facteur (linéaire) de $\frac{1}{a_{11}} \bar{x}_1 = \bar{x}_1$ dans l'expression de $q(\mathbf{x})$ est $x_1 + i x_2 + (1+i) x_3$, on écrit

$$q(\mathbf{x}) = |x_1 + i x_2 + (1+i) x_3|^2 + q'(x_2, x_3),$$

avec $q'(x_2, x_3)$ est le terme correctif que donnent les calculs, soit

$$q'(x_2, x_3) = (2 - i)\bar{x}_2x_3 + (2 + i)\bar{x}_3x_2,$$

qui est à son tour une forme quadratique hermitienne sur \mathbb{C}^2 (aux deux coordonnées x_2 et x_3). Cependant, pour q' , on est dans le second cas de l'algorithme de Gauss. On effectue alors (comme le suggère l'algorithme) le changement de coordonnées :

$$\begin{cases} x_2 &= y_2 + y_3 \\ x_3 &= \frac{1}{2-i}(y_2 - y_3) \end{cases}.$$

Ce qui nous amène à :

$$\begin{aligned} q'(x_2, x_3) &= (\bar{y}_2 + \bar{y}_3)(y_2 - y_3) + (\bar{y}_2 - \bar{y}_3)(y_2 + y_3) \\ &= 2\bar{y}_2y_2 - 2\bar{y}_3y_3 \\ &= 2|y_2|^2 - 2|y_3|^2. \end{aligned}$$

Enfin, on obtient :

$$\begin{aligned} q(x) &= |x_1 + ix_2 + (1 + i)x_3|^2 + 2|y_2|^2 - 2|y_3|^2 \\ &= |x_1 + ix_2 + (1 + i)x_3|^2 + \frac{1}{2}|x_2 + (2 - i)x_3|^2 - \frac{1}{2}|x_2 - (2 - i)x_3|^2 \end{aligned}$$

(puisque l'on a $y_2 = \frac{1}{2}(x_2 + (2 - i)x_3)$ et $y_3 = \frac{1}{2}(x_2 - (2 - i)x_3)$). Il ne reste qu'à poser :

$$\begin{cases} L_1 &= x_1 + ix_2 + (1 + i)x_3 \\ L_2 &= x_2 + (2 - i)x_3 \\ L_3 &= x_2 - (2 - i)x_3 \end{cases},$$

pour avoir :

$$q(x) = |L_1|^2 + \frac{1}{2}|L_2|^2 - \frac{1}{2}|L_3|^2,$$

qui représente une forme réduite de Gauss pour q .

— Désignons par \mathcal{B} la base de \mathbb{C}^3 qui correspond à cette forme réduite de q ; c'est-à-dire la base de \mathbb{C}^3 dont les coordonnées de tout $x = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$ sont $L(x) = {}^t(L_1(x), L_2(x), L_3(x))$. Désignons aussi par P la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{C}^3 vers \mathcal{B} . On a donc pour tout $x \in \mathbb{C}^3$:

$$x = PL(x).$$

L'expression de x en fonction de $L(x)$ permet par conséquent d'en tirer P puis \mathcal{B} . Partant des expressions ci-dessus des L_k en fonction des x_k ($1 \leq k \leq 3$), les calculs donnent :

$$\begin{cases} x_1 &= L_1 - \frac{1+8i}{10}L_2 + \frac{1-2i}{10}L_3 \\ x_2 &= \frac{1}{2}(L_2 + L_3) \\ x_3 &= \frac{2+i}{10}(L_2 - L_3) \end{cases}.$$

D'où l'on tire que :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1+8i}{10} & \frac{1-2i}{10} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2+i}{10} & -\frac{2+i}{10} \end{pmatrix}$$

et enfin que $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, avec

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1+8i}{10} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{2+i}{10} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1-2i}{10} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{2+i}{10} \end{pmatrix},$$

qui est nécessairement q -orthogonale. ■

8.5.5 Une méthode alternative matricielle pour réduire une forme quadratique hermitienne

Pour cette sous-section, le \mathbb{C} -espace vectoriel E est supposé de dimension finie, notée n , avec $n \geq 1$. Supposons donnée une forme quadratique hermitienne q sur E dont la matrice associée relativement à une certaine base de E est désignée par A ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, hermitienne). Réduire q revient à trouver une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice produit P^*AP soit diagonale. On peut déterminer une telle matrice P en se basant simplement sur les faits suivants :

- Multiplier une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par une matrice $P = (p_{k\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à droite (c'est-à-dire former la matrice MP) revient à modifier les colonnes de M en changeant chacune d'elles par une certaine combinaison linéaire des colonnes de M . Plus précisément, la $k^{\text{ème}}$ colonne C_k de M ($1 \leq k \leq n$) sera changée par $\sum_{m=1}^n p_{mk} C_m$.
- Multiplier une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par une matrice $Q = (q_{k\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à gauche (c'est-à-dire former la matrice QM) revient à modifier les lignes de M en changeant chacune d'elles par une certaine combinaison linéaire des lignes de M . Plus précisément, la $k^{\text{ème}}$ ligne L_k de M ($1 \leq k \leq n$) sera changée par $\sum_{m=1}^n q_{km} L_m$. En prenant $Q = P^* = {}^t \bar{P}$ (avec $P = (p_{k\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), on en déduit que la matrice P^*M s'obtient en changeant chaque $k^{\text{ème}}$ ligne L_k de M ($1 \leq k \leq n$) par $\sum_{m=1}^n \bar{p}_{mk} L_m$. On constate alors que les combinaisons linéaires réalisant la transformation $M \rightarrow P^*M$ sont les conjuguées ⁽⁵⁾ des combinaisons linéaires réalisant la transformation $M \rightarrow MP$, sauf que pour l'une, ces combinaisons linéaires agissent sur les colonnes de M tandis que pour l'autre, elles agissent sur les lignes de M .

Il résulte de ces deux faits qu'étant donnée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, hermitienne, une matrice du type P^*AP ($P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$) s'obtient en changeant les colonnes de

(5). On voulait dire par « la conjuguée d'une combinaison linéaire complexe CL » la combinaison linéaire obtenue en changeant chaque coefficient de CL par son conjugué.

A par des combinaisons linéaires de toutes les colonnes de A , puis les lignes de la matrice obtenue par **les combinaisons linéaires conjuguées** ⁽⁶⁾ des lignes de cette matrice. On peut bien entendu inverser ces manipulations en commençant par transformer les lignes de A puis les colonnes de la matrice qui en résulte. Pour avoir $P \in GL_n(\mathbb{C})$, il faut veiller à ce que les combinaisons linéaires utilisées définissent un automorphisme de \mathbb{C}^n . En pratique, ces procédures seront répétées jusqu'à l'aboutissement d'une matrice diagonale. Par ailleurs, pour récupérer la matrice P (qui fait que P^*AP soit diagonale), il suffit d'appliquer à la matrice identité I_n toutes les transformations de la procédure concernant les colonnes (les colonnes seulement ⁽⁷⁾!). Nous illustrons cette méthode matricielle de réduction des formes quadratiques hermitiennes par l'exemple tout simple suivant :

Exemple 8.XI.— Réduire la forme quadratique hermitienne q de \mathbb{C}^3 , définie par :

$$q(\mathbf{x}) := |x_1|^2 + 3|x_2|^2 + 6|x_3|^2 + 2\Re((1+i)\bar{x}_1x_2) + 2\Re((2+i)\bar{x}_1x_3) + 2\Re((3-2i)\bar{x}_2x_3)$$

($\forall \mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$) et déterminer une base orthogonale de \mathbb{C}^3 pour q .

La matrice associée à q relativement à la base canonique de \mathbb{C}^3 est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2+i \\ 1-i & 3 & 3-2i \\ 2-i & 3+2i & 6 \end{pmatrix}.$$

La méthode matricielle décrite ci-dessus, visant à trouver une matrice diagonale *congruente à A , est constituée des étapes suivantes :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2+i \\ 1-i & 3 & 3-2i \\ 2-i & 3+2i & 6 \end{pmatrix}}_A \left| \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} \xrightarrow[L_3 \rightarrow L_3 - (2-i)L_1]{L_2 \rightarrow L_2 - (1+i)L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2+i \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[C_3 \rightarrow C_3 - (2+i)C_1]{C_2 \rightarrow C_2 - (1+i)C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \begin{pmatrix} 1 & -1-i & -2-i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(6). Toute combinaison linéaire (resp. ensemble de combinaisons linéaires) de colonnes doit être suivi(e) d'une combinaison linéaire (resp. ensemble de combinaisons linéaires) conjuguée(s) de lignes.

(7). En appliquant à I_n toutes les transformations concernant les colonnes (et uniquement celles-ci), I_n se transforme en $I_n P = P$. Ce qui permet de récupérer la matrice P .

$$\begin{array}{l}
 L_3 \xrightarrow{L_3 - iL_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1-i & -2-i \\ 0 & 1 & -i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 C_3 \xrightarrow{C_3 + iC_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1-i & -1-2i \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).
 \end{array}$$

En posant $D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, 1, 0)$ et $P := \begin{pmatrix} 1 & -1-i & -1-2i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a alors $P^*AP = D$. Une base q -orthogonale \mathcal{B} de \mathbb{C}^3 est constituée des vecteurs colonnes de P ; soit $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, avec $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1-i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -1-2i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$. En outre, pour tout $\mathbf{y} = y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2 + y_3\mathbf{u}_3 \in \mathbb{C}^3$ ($y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{C}$), on a :

$$q(\mathbf{y}) = y_1^2 + y_2^2,$$

ce qui est une forme réduite de q . ■

Remarque 8.X.— La méthode matricielle décrite ci-dessus pourrait nécessiter (pour un certain type de formes quadratiques hermitiennes) un nombre important d'étapes ; cela arrive essentiellement lorsque la réduction de Gauss présente un second cas de l'algorithme. A titre d'exemple, nous invitons le lecteur à traiter l'exemple 8.X par la méthode matricielle (en cas de difficultés, revoir attentivement la solution du second exemple traité à la section §4.2, relative aux formes quadratiques usuelles, et faire l'analogie).

8.5.6 Equivalence des formes quadratiques hermitiennes

Pour toute cette sous-section, on considère que E est de dimension finie n .

Définition 8.XXII.— Soient q et q' deux formes quadratiques hermitiennes sur E . On dit que q et q' sont *équivalentes*, et on écrit $q \sim q'$, s'il existe un automorphisme u de E tel que l'on ait pour tout $\mathbf{x} \in E$:

$$q'(\mathbf{x}) = q(u(\mathbf{x})).$$

Autrement dit, q et q' sont équivalentes s'il est possible de transformer l'une d'entre elles en l'autre par un changement de coordonnées (c'est-à-dire par un changement de variables linéaire et bijectif).

Remarques 8.XI.—

- Etant données q et q' deux formes quadratiques hermitiennes, il découle immédiatement de la définition 8.XXII précédente que q et q' sont équivalentes si et seulement si leurs matrices associées (relativement à une même base de E) sont *congruentes.
- La relation binaire \sim (sur l'ensemble des formes quadratiques hermitiennes sur E) constitue une relation d'équivalence.

La classification des formes quadratiques hermitiennes sur E modulo la relation d'équivalence \sim est donnée par le théorème suivant qui est l'analogie du théorème de Sylvester sur les formes quadratiques réelles (voir le théorème 4.3).

THÉORÈME 8.13.— Soit q une forme quadratique hermitienne sur E , de rang noté r . Il existe alors une base $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ de E et un couple $(p, m) \in \mathbb{N}^2$, vérifiant $p + m = r$, tel que l'on ait pour tout $\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n \in E$ (avec $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$) :

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^p |x_k|^2 - \sum_{k=p+1}^{p+m} |x_k|^2.$$

De plus, le couple (p, m) est le même pour toutes les bases de E jouissant de la même propriété. Autrement dit, (p, m) dépend uniquement de la forme quadratique hermitienne q .

Démonstration.— On reprend exactement la même démonstration du théorème 4.3 en lui portant les modifications évidentes. ■

Définition 8.XXIII.— Etant donnée q une forme quadratique hermitienne sur E , le couple $(p, m) \in \mathbb{N}^2$ fourni par le théorème 8.13 s'appelle la *signature* de q et se note $\text{sgn}(q)$.

Du théorème 8.13 découle le corollaire suivant qui est l'analogie du corollaire 4.4 sur les formes quadratiques réelles.

COROLLAIRE 8.14 (LE PRINCIPE D'INERTIE).— Deux formes quadratiques hermitiennes q et q' sur E sont équivalentes si et seulement si elles ont la même signature. ■

Tout comme les formes quadratiques réelles, la signature d'une forme quadratique hermitienne q sur E permet de détecter immédiatement certaines des caractéristiques de q , comme : sa positivité, sa définition, sa dégénérescence, etc. On a le corollaire suivant qui est l'analogie des corollaires 4.5 et 4.6 (tous deux réunis) sur les formes quadratiques réelles.

COROLLAIRE 8.15.— Soient q une forme quadratique hermitienne sur E et $(p, m) \in \mathbb{N}^2$ sa signature. Alors on a :

- q est positive $\iff m = 0$.
- q est négative $\iff p = 0$.
- q est définie positive $\iff (p, m) = (n, 0)$.
- q est définie négative $\iff (p, m) = (0, n)$.
- q est définie $\iff q$ est ou bien définie positive ou bien définie négative
 $\iff (p, m) \in \{(n, 0), (0, n)\}$.
- q est non dégénérée $\iff p + m = n$.

Démonstration.— Pour le premier, le troisième et le dernier point, reprendre la démonstration du corollaire 4.5 en lui portant les modifications évidentes. Les points restants découlent des précédents en constatant que $\text{sgn}(-q) = (m, p)$. ■

8.5.7 Calcul de la signature d'une forme quadratique hermitienne par la méthode des déterminants de Sylvester

On a le théorème suivant qui est l'analogie du théorème 4.7 sur les formes quadratiques réelles :

THÉORÈME 8.16.— Soient $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base de E et q une forme quadratique hermitienne sur E dont la matrice (hermitienne) associée relativement à \mathcal{B} est désignée par $A = (a_{k\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$. Considérons les mineurs principaux dominants de A , qui sont les nombres réels⁽⁶⁾ définis par :

$$D_0 := 1 \quad \text{et} \quad D_h := \det(a_{k\ell})_{1 \leq k, \ell \leq h} \quad \text{pour } h = 1, 2, \dots, n.$$

Supposons que $D_h \neq 0$ pour tout $h \in \{1, 2, \dots, n\}$ et considérons s le nombre de changements de signes dans la suite finie ordonnée D_0, D_1, \dots, D_n . Alors on a :

$$\text{sgn}(q) = (n - s, s).$$

Démonstration.— Reprendre la même démonstration du théorème 4.7 en lui portant les modifications évidentes. ■

(6). C'est le fait que A est hermitienne qui garantit que les nombres complexes D_h ($h = 1, 2, \dots, n$) sont en fait tous réels. En effet, pour tout $h \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a : $\overline{D_h} = \overline{\det(a_{k\ell})_{1 \leq k, \ell \leq h}} = \det(\overline{a_{k\ell}})_{1 \leq k, \ell \leq h} = \det(a_{\ell k})_{1 \leq k, \ell \leq h} = \det^t(a_{\ell k})_{1 \leq k, \ell \leq h} = \det(a_{k\ell})_{1 \leq k, \ell \leq h} = D_h$; d'où $D_h \in \mathbb{R}$.

Du théorème 8.16 découle le corollaire suivant qui caractérise d'une façon vraiment simple les formes quadratiques hermitiennes définies positives à partir de leurs représentations matricielles. Il est l'analogue du corollaire 4.8 sur les formes quadratiques réelles.

COROLLAIRE 8.17.— Soient \mathcal{B} une base de E et q une forme quadratique hermitienne sur E dont la matrice (hermitienne) associée relativement à \mathcal{B} est désignée par $A = (a_{k\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$. Alors q est définie positive si et seulement si tous les mineurs principaux dominants de A sont strictement positifs ; c'est-à-dire si et seulement si l'on a :

$$\det \left((a_{k\ell})_{1 \leq k, \ell \leq h} \right) > 0 \quad (\forall h \in \{1, 2, \dots, n\}).$$

Démonstration.— Reprendre la démonstration du corollaire 4.8 en lui portant les modifications nécessaires évidentes. ■

Exemple 8.XII.— Déterminer de deux façons différentes la signature de la forme quadratique hermitienne de \mathbb{C}^3 , introduite à l'exemple 8.X.

D'après la forme réduite de q trouvée à la solution de l'exemple 8.X, on a $\text{sgn}(q) = (2, 1)$. Retrouvons ce résultat en utilisant la méthode des déterminants de Sylvester (donc sans nous servir d'aucune réduction de q). La matrice (hermitienne) associée à q relativement à la base canonique de \mathbb{C}^3 est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 3-2i \\ 1-i & 3+2i & 2 \end{pmatrix}$$

et ses mineurs principaux dominants sont donc :

$$D_0 = 1, D_1 = \det(1) = 1, D_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} = 1 \text{ et } D_3 = \det A = -5 \text{ (après calcul).}$$

On voit alors que ces mineurs sont tous non nuls et que le nombre de changements de signes dans la suite réelle ordonnée $(D_0, D_1, D_2, D_3) = (1, 1, 1, -5)$ est $s = 1$. Ce qui entraîne (d'après le théorème 8.16) que la signature de q est égale à :

$$\text{sgn}(q) = (\dim \mathbb{C}^3 - s, s) = (3 - 1, 1) = (2, 1).$$

C'est bien le même résultat que l'on a établi au départ par la méthode de la réduction de Gauss. ■

Remarque 8.XII.— Comme pour les formes quadratiques réelles, on montre que lorsqu'une forme quadratique hermitienne d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie est **non dégénérée**, il est toujours possible de déterminer sa signature par la méthode des déterminants de Sylvester, et ce, en modifiant simplement (si c'est nécessaire) la base choisie initialement pour le \mathbb{C} -espace vectoriel en question.

8.6 Norme associée à un produit scalaire complexe

Définitions 8.XXIV.—

- On appelle *espace préhilbertien complexe* tout \mathbb{C} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire (complexe).
- On appelle *espace hermitien* tout espace préhilbertien complexe de dimension finie.
- Soient E un espace préhilbertien complexe et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire associé. On définit l'application :

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{x} &\longmapsto \|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} . \end{aligned}$$

On montrera plus loin que $\|\cdot\|$ constitue une norme sur E , ce qui justifie la notation qu'on lui a attribué. On dit que $\|\cdot\|$ est la *norme associée* au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de E .

Sauf mention contraire, le produit scalaire d'un espace préhilbertien complexe est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et sa norme associée est notée $\|\cdot\|$.

On commence par la proposition toute simple suivante :

PROPOSITION 8.18.— *Soit E un espace préhilbertien complexe. Alors l'application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ (définie ci-haut) satisfait les deux premiers axiomes d'une norme ; c'est-à-dire les propriétés :*

- (i) $\forall \mathbf{x} \in E : \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}_E$.
- (ii) $\forall \mathbf{x} \in E$ et $\forall \sigma \in \mathbb{C} : \|\sigma \mathbf{x}\| = |\sigma| \cdot \|\mathbf{x}\|$.

Démonstration.— La propriété (i) résulte immédiatement de la définition d'un produit scalaire complexe. Montrons la propriété (ii). En se servant de la sesquilinearité du produit scalaire, on a pour tout $\mathbf{x} \in E$ et tout $\sigma \in \mathbb{C}$:

$$\|\sigma \mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \sigma \mathbf{x}, \sigma \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\bar{\sigma} \sigma \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{|\sigma|^2 \cdot \|\mathbf{x}\|^2} = |\sigma| \cdot \|\mathbf{x}\| ,$$

comme il fallait le prouver. La proposition est démontrée. ■

Étant donné E un espace préhilbertien complexe, pour montrer que l'application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ (définie ci-haut) est une véritable norme sur E , il reste à montrer (compte tenu de la proposition 8.18) que $\|\cdot\|$ satisfait l'inégalité triangulaire. Pour ce faire, on doit passer par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (analogue à celle d'un espace préhilbertien réel, vue au chapitre 5). On a la

PROPOSITION 8.19 (INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ).— Soit E un espace préhilbertien complexe. Alors, pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, on a :

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|. \quad (8.12)$$

De plus, cette inégalité devient une égalité si et seulement si \mathbf{x} et \mathbf{y} sont colinéaires.

Appellation.— L'inégalité (8.12) est connue sous le nom de l'inégalité de Cauchy-Schwarz ou simplement l'inégalité de Schwarz.

Démonstration de la proposition 8.19.— Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ fixés. Lorsque \mathbf{x} et \mathbf{y} sont colinéaires, on vérifie aisément que l'on a $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$. D'autre part, lorsque $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$, l'inégalité (8.12) est trivialement satisfaite et devient une égalité si et seulement si $\mathbf{x} = \mathbf{0}_E$ ou $\mathbf{y} = \mathbf{0}_E$, entraînant que \mathbf{x} et \mathbf{y} sont colinéaires. Il reste donc à montrer l'inégalité (8.12) dans le cas où $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \neq 0$, et montrer (pour ce cas) que si elle est atteinte alors forcément \mathbf{x} et \mathbf{y} sont colinéaires. Soient donc $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ tels que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \neq 0$ (donc $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_E$) et définissons pour tout $\sigma \in \mathbb{C}$:

$$\varphi(\sigma) := \langle \sigma \mathbf{x} + \mathbf{y}, \sigma \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle.$$

La positivité du produit scalaire assure que l'on a $\varphi(\sigma) \geq 0$ ($\forall \sigma \in \mathbb{C}$). D'autre part, en utilisant la sesquilinearité et la symétrie conjuguée du produit scalaire, on a pour tout $\sigma \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma) &= \langle \sigma \mathbf{x}, \sigma \mathbf{x} \rangle + \langle \sigma \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \sigma \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \bar{\sigma} \sigma \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \bar{\sigma} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \sigma \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= |\sigma|^2 \cdot \|\mathbf{x}\|^2 + \bar{\sigma} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \sigma \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &= |\sigma|^2 \cdot \|\mathbf{x}\|^2 + 2\Re(\bar{\sigma} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) + \|\mathbf{y}\|^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$\forall \sigma \in \mathbb{C} : |\sigma|^2 \cdot \|\mathbf{x}\|^2 + 2\Re(\bar{\sigma} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) + \|\mathbf{y}\|^2 \geq 0. \quad (8.13)$$

En appliquant spécialement (8.13) pour les nombres complexes σ de la forme $\sigma = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), on tire que l'on a en particulier :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\mathbf{x}\|^2 \cdot |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \cdot \lambda^2 + 2|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \lambda + \|\mathbf{y}\|^2 \geq 0.$$

Le polynôme réel de second degré de la variable réelle λ , donné par :

$$P(\lambda) := \|\mathbf{x}\|^2 \cdot |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \cdot \lambda^2 + 2|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \lambda + \|\mathbf{y}\|^2$$

garde donc un signe constant (positif) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Ce qui entraîne que son discriminant réduit $\Delta' = |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^4 - \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2 \cdot |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2$ est négatif ; soit $\Delta' \leq 0$. Ce qui donne immédiatement l'inégalité requise :

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|.$$

— Maintenant, si l'inégalité ci-dessus est même une égalité, alors on a (en remontant) $\Delta' = 0$, ce qui entraîne que P possède une racine réelle double λ_0 . On a par suite :

$$0 = P(\lambda_0) = \varphi(\lambda_0 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) = \langle \lambda_0 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \lambda_0 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle.$$

Ce qui entraîne (en vertu de la définition du produit scalaire) que $\lambda_0 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}_E$; d'où \mathbf{x} et \mathbf{y} sont colinéaires, comme il fallait le prouver. Ceci complète la preuve de la proposition 8.19. ■

Comme dans le cas d'un espace préhilbertien réel, l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne l'inégalité de Minkowski donnée par la proposition suivante :

PROPOSITION 8.20 (INÉGALITÉ DE MINKOWSKI).— Soit E un espace préhilbertien complexe. Alors, pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, on a :

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|. \quad (8.14)$$

Appellation.— L'inégalité (8.14) est connue sous le nom de l'inégalité de Minkowski.

Démonstration de la proposition 8.20.— Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$. En se servant de la sesquilinearité et de la symétrie conjuguée du produit scalaire, on a :

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\Re \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

Mais comme $\Re \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq |\Re \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$ (en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz), il s'ensuit que :

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.$$

D'où :

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|,$$

comme il fallait le prouver. La proposition est démontrée. ■

Les deux propositions 8.18 et 8.20 confirment que l'application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ (définie précédemment) est bien une norme sur E . On a le

COROLLAIRE 8.21.— Soit E un espace préhilbertien complexe. L'application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie précédemment constitue une norme sur E . ■

Remarque 8.XIII.— Compte tenu du corollaire 8.21, on considère un espace préhilbertien complexe comme un cas particulier d'un \mathbb{C} -espace vectoriel normé.

Définition 8.XXV.— On appelle *espace de Hilbert complexe* tout espace préhilbertien complexe, complet pour la norme associée à son produit scalaire.

8.7 Orthogonalité dans un espace préhilbertien complexe

Les notions d'orthogonalité, de famille orthogonale (resp. orthonormée) et de base orthogonale (resp. orthonormée) d'un \mathbb{C} -espace vectoriel muni d'une forme hermitienne ont été déjà définies et étudiées au §8.5.3. Cependant, le cas le plus important où la forme hermitienne en question est un produit scalaire (complexe) mérite plus d'attention, notamment en ce qui concerne les propriétés des familles orthogonales et leurs constructions. On a par exemple le théorème suivant dont la démonstration (par récurrence par exemple) est laissée au soin du lecteur.

THÉORÈME 8.22 (LE THÉORÈME DE PYTHAGORE GÉNÉRALISÉ).— Soit E un espace préhilbertien complexe. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$, deux à deux orthogonaux, on a :

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2. \quad \blacksquare$$

Remarque 8.XIV.— Contrairement au cas d'un espace préhilbertien réel, lorsque E est un espace préhilbertien complexe et $x, y \in E$, on n'a pas équivalence entre $x \perp y$ et $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$; autrement dit, la réciproque du théorème de Pythagore est fautive. En effet, les calculs donnent :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff \Re \langle x, y \rangle = 0 \not\iff \langle x, y \rangle = 0.$$

8.7.1 Construction d'une base orthonormée pour un espace hermitien

Étant donné E un espace hermitien, la détermination d'une base orthogonale de E peut se faire par la méthode de réduction de Gauss, vue

au §8.5.4. Cependant, cette démarche purement algébrique peut être remplacée par une autre plus souple, plus rapide et plus efficace qui est l'*algorithme de Gram-Schmidt* (dont l'analogie réel est déjà étudié au chapitre 5). En revanche, l'algorithme de Gram-Schmidt ne peut être utilisé pour une forme hermitienne qui n'est pas un produit scalaire.

Description de l'algorithme de Gram-Schmidt

Comme l'algorithme dont il s'agit est identique à celui correspondant au cas d'un espace préhilbertien réel, nous contentons de le décrire brièvement et sans détail. Soient E un espace préhilbertien complexe et $\mathcal{F} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ ($n \geq 1$) une famille libre de E . L'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est un procédé récursif qui permet de construire (à partir de \mathcal{F}) une nouvelle famille libre $\mathcal{G} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ qui soit orthonormée et vérifie pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k) = \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k).$$

En particulier, \mathcal{G} engendre le même sous-espace vectoriel de E que \mathcal{F} . On dit que \mathcal{G} est l'*orthonormalisée de Gram-Schmidt* de \mathcal{F} . Les vecteurs de \mathcal{G} sont construits pas à pas de la façon suivante :

- On prend $\mathbf{u}_1 := \frac{\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{e}_1\|}$.
- Pour $k \in \{2, 3, \dots, n\}$, en supposant que $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}$ sont déjà construits, on définit

$$\widehat{\mathbf{u}}_k = \mathbf{e}_k - \sum_{m=1}^{k-1} \langle \mathbf{u}_m, \mathbf{e}_k \rangle \mathbf{u}_m \quad \text{puis} \quad \mathbf{u}_k = \frac{\widehat{\mathbf{u}}_k}{\|\widehat{\mathbf{u}}_k\|}.$$

Remarque 8.XV.— Lorsque E est de dimension finie (c'est-à-dire que E est un espace hermitien), l'algorithme de Gram-Schmidt permet de construire une base orthonormée de E .

8.7.2 Supplémentaire orthogonal et projection orthogonale

Soient E un espace préhilbertien complexe et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E .

PROPOSITION 8.23.— On a :

$$F \oplus F^\perp = E.$$

Démonstration.— On reprend la même démonstration de la proposition 6.2 (correspondant au cas d'un espace préhilbertien réel) avec la légère modification suivante : si $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k)$ ($k \in \mathbb{N}$) est une base orthonormée de F et $\mathbf{x} \in E$, on définit :

$$\mathbf{x}' := \sum_{m=1}^k \langle \mathbf{e}_m, \mathbf{x} \rangle \mathbf{e}_m \in F.$$

On a alors $\langle \mathbf{x}', \mathbf{e}_\ell \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_\ell \rangle$ pour tout $\ell \in \{1, 2, \dots, k\}$. Ce qui entraîne que $\mathbf{x} - \mathbf{x}' \in F^\perp$; d'où $\mathbf{x} \in F + F^\perp$. Ce qui montre l'égalité $E = F + F^\perp$. ■

COROLLAIRE 8.24.— Si E est de dimension finie (i.e., hermitien) alors on a : $F^{\perp\perp} = F$. ■

Appellations 8.II.—

1. Le sous-espace vectoriel F^\perp de E s'appelle *le supplémentaire orthogonal* de F .
2. La projection sur F parallèlement à son supplémentaire orthogonal F^\perp s'appelle *la projection orthogonale sur F* et se note π_F .

L'expression de la projection orthogonale sur un sous-espace

On a le théorème suivant :

THÉORÈME 8.25.— Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k)$ une base orthonormée de F . Alors on a pour tout $\mathbf{x} \in E$:

$$\pi_F(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^k \langle \mathbf{e}_m, \mathbf{x} \rangle \mathbf{e}_m.$$

Démonstration.— Ceci a été en fait établi durant la démonstration de la proposition 8.23. ■

Reformulation de l'algorithme de Gram-Schmidt

Soient $\mathcal{F} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ ($n \geq 1$) une famille libre de E et $\mathcal{G} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de \mathcal{F} . En se servant des projections orthogonales, on peut reformuler les expressions des vecteurs de \mathcal{G} en fonction des vecteurs de \mathcal{F} de la façon suivante :

- $\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{e}_1\|}$.

- Pour tout $k \in \{2, 3, \dots, n\}$:

$$\widehat{\mathbf{u}}_k = \mathbf{e}_k - \pi_{\text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{k-1})}(\mathbf{e}_k) \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_k = \frac{\widehat{\mathbf{u}}_k}{\|\widehat{\mathbf{u}}_k\|}$$

(en vertu du théorème 8.25).

8.7.3 Distance d'un vecteur par rapport à un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien complexe

Soient E un espace préhilbertien complexe et F un sous-espace **de dimension finie** de E . La distance d'un vecteur \mathbf{x} de E par rapport à F (notée $\mathbf{d}(\mathbf{x}, F)$) est définie comme étant l'infimum de la quantité positive $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, lorsque \mathbf{y} parcourt F . On montre (comme dans le cas d'un espace préhilbertien réel) que cet infimum est atteint (une et une seule fois) en $\mathbf{y} = \pi_F(\mathbf{x})$. On a le

THÉORÈME 8.26.— *Pour tout $\mathbf{x} \in E$, il existe un unique $\mathbf{y}_0 \in F$ tel que :*

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, F) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0\|.$$

De plus, on a précisément $\mathbf{y}_0 = \pi_F(\mathbf{x})$, de sorte que l'on ait :

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, F) = \|\mathbf{x} - \pi_F(\mathbf{x})\|.$$

Démonstration.— On reprend la même démonstration du théorème 6.4. ■

Matrice et déterminant de Gram

Définition 8.XXVI.— Soient n un entier strictement positif et $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ une famille ordonnée de vecteurs de E .

— On appelle **la matrice de Gram** associée à la famille $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ la matrice complexe carrée d'ordre n définie par :

$$\text{Gram}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) := (\langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_\ell \rangle)_{1 \leq k, \ell \leq n}.$$

— On appelle **le déterminant de Gram** associé à la famille $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$, que l'on note $G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$, le déterminant de la matrice de Gram associée à cette même famille ; soit

$$G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) := \det \text{Gram}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n).$$

En se servant des *déterminants de Gram* d'une famille ordonnée finie de vecteurs de E , on peut calculer facilement la distance d'un vecteur x de E par rapport à F sans calculer préalablement la projection orthogonale de x sur F . Le théorème suivant donne la formule appropriée à ce calcul après avoir englobé les propriétés fondamentales des matrices et des déterminants de Gram.

THÉORÈME 8.27.— Soient n un entier strictement positif et (x_1, x_2, \dots, x_n) une famille ordonnée de vecteurs de E . Les propriétés suivantes sont alors satisfaites :

1. La matrice $\text{Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est hermitienne positive. Elle est de plus définie positive si et seulement si la famille de vecteurs (x_1, x_2, \dots, x_n) est libre.
2. On a $\text{rg Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \dim \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
3. On a $G(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$. De plus, $G(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ si et seulement si la famille de vecteurs (x_1, x_2, \dots, x_n) est libre.
4. Le déterminant $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est invariant par permutation⁽⁸⁾ des vecteurs x_1, x_2, \dots, x_n et invariant également lorsqu'un certain vecteur x_k ($1 \leq k \leq n$) est remplacé par une somme de x_k et d'une combinaison linéaire des autres vecteurs x_ℓ ($1 \leq \ell \leq n, \ell \neq k$).
5. Supposons que $\dim F = n$ et soit (u_1, u_2, \dots, u_n) une base arbitraire de F . Alors pour tout $x \in E$, on a :

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{G(x, u_1, u_2, \dots, u_n)}{G(u_1, u_2, \dots, u_n)}}$$

(appelée *la formule de Gram*).

Démonstration.— Reprendre la démonstration du théorème 6.5 en lui portant les modifications nécessaires évidentes. ■

Remarques 8.XVI.—

1. Faisons remarquer que le cas particulier correspondant à $n = 2$ du point 3. du théorème 8.27 n'est autre que l'inégalité de Cauchy-Schwarz!
2. On peut montrer que toute matrice complexe carrée hermitienne positive est une matrice de Gram d'une certaine famille finie de vecteurs de E .



(8). Il est alors plus approprié de parler du déterminant de Gram d'une famille finie de vecteurs de E plutôt que d'une famille finie « ordonnée » de vecteurs de E .

Exercices

Exercice 8.1. Soit $\varphi : \mathbb{C}_2[X] \times \mathbb{C}_2[X] \rightarrow \mathbb{C}$, définie par :

$$\varphi(P, Q) := \overline{P(i)} Q(1+i) + \overline{P(1+i)} Q(i) \quad (\forall P, Q \in \mathbb{C}_2[X]).$$

1. Montrer que φ est une forme hermitienne sur $\mathbb{C}_2[X]$. Pour toute la suite, on désigne par q la forme quadratique hermitienne associée à φ .
2. Déterminer la matrice associée à φ relativement à la base canonique de $\mathbb{C}_2[X]$.
3. (a) Vérifier que la famille ordonnée

$$\mathcal{B} := (X - i, X - 1 - i, (X - i)(X - 1 - i))$$

constitue une base de $\mathbb{C}_2[X]$ puis déterminer de deux façons différentes la matrice associée à φ relativement à \mathcal{B} .

1^{ère} façon : Utiliser la définition de la matrice associée à une forme sesquilinéaire.

2nde façon : Utiliser la formule de changement de base relative aux formes sesquilinéaires.

- (b) En déduire rapidement le rang de q et le noyau de φ .
- (c) Montrer que q n'est ni positive ni négative et en déduire sa signature.
4. Soit $P_0(X) := (4 + 2i)X + 1 - 4i$.
— Déterminer $\{P_0\}^{\perp_q}$ et l'écrire sous la forme $\text{Vect}(R) \oplus \text{Ker } \varphi$, avec R est un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ que l'on demande de déterminer.

Exercice 8.2. Soit q la forme quadratique hermitienne de \mathbb{C}^3 donnée par :

$$q(\mathbf{z}) := |z_1|^2 + 2\Re((1+i)\bar{z}_1 z_2) + 2\Re((2+i)\bar{z}_1 z_3) + 4\Re((2+i)\bar{z}_2 z_3)$$

($\forall \mathbf{z} = {}^t(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$).

1. Déterminer la forme polaire f de q puis la matrice associée à q relativement à la base canonique de \mathbb{C}^3 .
2. (a) Déterminer $\text{Ker } f$ et sa dimension.
(b) En déduire le rang de q .

3. Calculer $q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $q \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et en déduire la signature de q (sans passer bien entendu par la réduction de Gauss).
4. Reprendre les mêmes questions précédentes avec la forme quadratique hermitienne de \mathbb{C}^4 donnée par :

$$\begin{aligned} q(\mathbf{z}) := & |z_1|^2 + |z_2|^2 - 39|z_4|^2 + 2\Re((1-i)\bar{z}_1z_2) + 2\Re(-i\bar{z}_1z_3) \\ & + 2\Re((3+i)\bar{z}_1z_4) + 2\Re((2-i)\bar{z}_2z_3) + 2\Re((2-3i)\bar{z}_2z_4) \\ & + 2\Re((-1+10i)\bar{z}_3z_4) \end{aligned}$$

($\forall \mathbf{z} = {}^t(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^3$), où pour la question 3, vous êtes sensé trouver vous-même deux vecteurs \mathbf{u}, \mathbf{v} de \mathbb{C}^4 tels que $q(\mathbf{u}) > 0$ et $q(\mathbf{v}) < 0$.

Exercice 8.3.

1. Réduire par la méthode de Gauss les formes quadratiques hermitiennes de \mathbb{C}^3 données par :

$$\begin{aligned} q_1(\mathbf{z}) &:= |z_1|^2 + 2|z_2|^2 + 3|z_3|^2 + 2\Re(\bar{z}_1z_2) + 4\Re(\bar{z}_1z_3) + 4\Re(i\bar{z}_2z_3), \\ q_2(\mathbf{z}) &:= 5|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + |z_3|^2 + 2\Re((2-i)\bar{z}_1z_2) + 2\Re(\bar{z}_1z_3) + 2\Re(\bar{z}_2z_3), \\ q_3(\mathbf{z}) &:= 2|z_1|^2 + |z_2|^2 + 4|z_3|^2 + 2\Re((1+i)\bar{z}_1z_2) - 6\Re(\bar{z}_1z_3) - 4\Re(\bar{z}_2z_3) \end{aligned}$$

($\forall \mathbf{z} = {}^t(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$).

2. Parmi ces formes quadratiques hermitiennes, quelles sont celles qui sont équivalentes ?

Exercice 8.4. Soit q la forme quadratique hermitienne de \mathbb{C}^4 donnée par :

$$\begin{aligned} q(\mathbf{z}) := & |z_1|^2 + 2|z_2|^2 + 5|z_3|^2 + 10|z_4|^2 + 2\Re((1+i)\bar{z}_1z_2) + 2\Re((2+i)\bar{z}_1z_3) \\ & + 2\Re((3+i)\bar{z}_1z_4) + 8\Re(\bar{z}_2z_3) + 4\Re((2+i)\bar{z}_2z_4) + 2\Re((7+3i)\bar{z}_3z_4) \end{aligned}$$

($\forall \mathbf{z} = {}^t(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$).

1. Réduire q par la méthode de Gauss.
2. (a) En déduire le rang et la signature de q .
(b) q est-elle non dégénérée ? positive ? Justifier.
3. Déterminer une base de \mathbb{C}^4 qui soit q -orthogonale.

Exercice 8.5. Etant donnés n et m deux entiers strictement positifs, montrer que le produit scalaire usuel de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ (où $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ est naturellement identifié à $\mathbb{C}^{n \times m}$) peut être défini par la formule matricielle pratique suivante :

$$\langle A, B \rangle_{\text{us}} = \text{tr}(A^*B) \quad (\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})).$$

Exercice 8.6. Soit $f : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par :

$$f\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \end{pmatrix}\right) := \bar{z}_1 z'_1 + 2\bar{z}_2 z'_2 + 2\bar{z}_3 z'_3 - i(\bar{z}_1 z'_2 - \bar{z}_2 z'_1) - i(\bar{z}_2 z'_3 - \bar{z}_3 z'_2)$$

($\forall {}^t(z_1, z_2, z_3), {}^t(z'_1, z'_2, z'_3) \in \mathbb{C}^3$).

— Montrer que f constitue un produit scalaire complexe sur \mathbb{C}^3 .

Exercice 8.7. Soit $\langle , \rangle : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par :

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \end{pmatrix} \right\rangle &:= \bar{z}_1 z'_1 + 2\bar{z}_2 z'_2 + 4\bar{z}_3 z'_3 + (\bar{z}_1 z'_2 + \bar{z}_2 z'_1) + i(\bar{z}_1 z'_3 - \bar{z}_3 z'_1) \\ &\quad + (-1+i)\bar{z}_2 z'_3 + (-1-i)\bar{z}_3 z'_2 \end{aligned}$$

($\forall {}^t(z_1, z_2, z_3), {}^t(z'_1, z'_2, z'_3) \in \mathbb{C}^3$).

1. Montrer que \langle , \rangle constitue un produit scalaire complexe sur \mathbb{C}^3 .
2. Déterminer une base de \mathbb{C}^3 qui soit orthonormée pour ce produit scalaire.

Exercice 8.8. Pour ce qui suit, le \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C}^4 est muni de son produit scalaire usuel. Considérons dans \mathbb{C}^4 le plan P défini par le système de deux équations

$$\begin{cases} x - iy + iz + t & = 0 \\ x + iy + (2+i)z - t & = 0 \end{cases}$$

et le vecteur $\mathbf{v} := {}^t(1, 1, 1, 1)$.

1. Déterminer une base orthonormée de P .
2. Déterminer la projection orthogonale de \mathbf{v} sur P puis calculer la distance de \mathbf{v} par rapport à P .



Chapitre 9

Endomorphismes spéciaux d'un espace préhilbertien complexe et théorèmes spectraux

Sommaire

9.1	Adjoint d'un endomorphisme	168
9.2	Endomorphismes hermitiens	170
9.3	Endomorphismes antihermitiens	172
9.4	Endomorphismes unitaires	173
9.5	Endomorphismes normaux	176
9.6	Le théorème spectral pour les endomorphismes hermitiens	177
9.7	Le théorème spectral pour les endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien	182
9.8	Le théorème spectral pour les endomorphismes normaux	184
9.9	Le théorème de trigonalisation de Schur	187
	Exercices	194

Ce chapitre est sans doute le plus important de ce polycopié, étant donné qu'il comporte *les théorèmes spectraux* (complexe et réel). Sa première partie est l'analogue du chapitre 7.

Pour tout ce qui suit, on fixe E un espace préhilbertien complexe et on désigne respectivement par \langle , \rangle et $\| \cdot \|$ le produit scalaire ambiant et la norme qui lui est associée.

9.1 Adjoint d'un endomorphisme

Définition 9.I.— Soit f un endomorphisme de E . On appelle *adjoint* de f tout endomorphisme g de E , vérifiant la propriété :

$$\langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, g(\mathbf{y}) \rangle \quad (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E).$$

On commence par traiter les questions d'existence et d'unicité de l'endomorphisme adjoint d'un endomorphisme donné de E .

PROPOSITION 9.1 (UNICITÉ DE L'ENDOMORPHISME ADJOINT).— Soit f un endomorphisme de E . Si f possède un adjoint alors cet adjoint est forcément unique.

Démonstration.— On reprend la même démonstration de la proposition 7.1. ■

Notation 9.I.— L'endomorphisme adjoint d'un endomorphisme donné f de E (lorsqu'il existe) est noté f^* .

La proposition suivante fournit quelques propriétés des endomorphismes adjoints et de leurs liaisons avec les opérations de base sur les endomorphismes (addition, multiplication par un scalaire, composition, etc).

PROPOSITION 9.2.— Soient f et g deux endomorphismes de E qui possèdent des adjoints (i.e., f^* et g^* existent) et λ un nombre complexe. Alors les endomorphismes Id_E , $f + g$, λf , $f \circ g$, f^{-1} (lorsque f est bijectif) et f^* de E possèdent tous des adjoints et on a précisément :

- (i) $(\text{Id}_E)^* = \text{Id}_E$,
- (ii) $(f + g)^* = f^* + g^*$,
- (iii) $(\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^*$,
- (iv) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$,
- (v) $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$ (lorsque f est bijectif),
- (vi) $(f^*)^* = f$.

Démonstration.— Reprendre la démonstration de la proposition 7.2 en remplaçant la bilinéarité (du produit scalaire réel en question) par la sesquilinearité (du produit scalaire complexe de E) et la symétrie (du produit scalaire réel en question) par la symétrie conjuguée (du produit scalaire complexe de E). ■

La proposition suivante assure l'existence de l'endomorphisme adjoint de tout endomorphisme de E lorsque E est de dimension finie.

PROPOSITION 9.3 (SUR L'EXISTENCE DE L'ENDOMORPHISME ADJOINT).— *Supposons que E est hermitien (i.e., $\dim E < +\infty$). Alors tout endomorphisme de E possède un endomorphisme adjoint. Plus précisément, si f est un endomorphisme de E et A est la matrice associée à f relativement à une base **orthonormée** \mathcal{B} de E alors la matrice associée à f^* relativement à la même base \mathcal{B} de E est A^* .*

Démonstration.— Reprendre la démonstration de la proposition 7.3 en lui portant les modifications évidentes. ■

Remarque 9.I.— En fait, l'existence de l'adjoint d'un endomorphisme donné f de E a même lieu dans le cadre plus général où E est **de Hilbert** (i.e., **complet**) et f est **continu**. Constaté que la proposition 9.3 précédente en devient un cas particulier.

Une importante propriété spectrale de l'endomorphisme adjoint est proposée dans l'exemple anticipé suivant :

Exemple 9.I.— Supposons que E est hermitien (i.e., $\dim E < +\infty$) et soit f un endomorphisme de E . Montrer que l'on a : $\sigma_{\mathbb{C}}(f^*) = \overline{\sigma_{\mathbb{C}}(f)}$ (où $\sigma_{\mathbb{C}}(f)$ désigne le spectre de f et $\overline{\sigma_{\mathbb{C}}(f)}$ désigne l'ensemble des conjugués des éléments de $\sigma_{\mathbb{C}}(f)$).

Posons $n := \dim E$ et fixons une base orthonormée \mathcal{B} de E . Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice associée à f relativement à \mathcal{B} . D'après la proposition 9.3, la matrice associée à f^* relativement à \mathcal{B} est A^* . On a alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} P_{f^*}(\lambda) &= P_{A^*}(\lambda) = \det(A^* - \lambda I_n) \\ &= \det({}^t \overline{A} - \lambda I_n) \\ &= \det({}^t (\overline{A} - \lambda I_n)) \\ &= \det(\overline{A} - \lambda I_n) \\ &= \det(\overline{A - \lambda I_n}) \\ &= \overline{\det(A - \lambda I_n)} \\ &= \overline{P_A(\lambda)} \\ &= P_f(\overline{\lambda}) \end{aligned}$$

(où dans cette série d'égalités, on a utilisé les faits que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a : $\det({}^t M) = \det M$ et $\det(\overline{M}) = \overline{\det M}$). Il résulte de cela que l'on a pour tout

$\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma_{\mathbb{C}}(f^*) &\iff P_{f^*}(\lambda) = 0 \\ &\iff \overline{P_f(\bar{\lambda})} = 0 \\ &\iff P_f(\bar{\lambda}) = 0 \\ &\iff \bar{\lambda} \in \sigma_f(\mathbb{C}) \\ &\iff \lambda \in \overline{\sigma_{\mathbb{C}}(f)}. \end{aligned}$$

Ce qui confirme l'égalité requise $\sigma_{\mathbb{C}}(f^*) = \overline{\sigma_{\mathbb{C}}(f)}$. ■

La stabilité d'un sous-espace vectoriel de E par un endomorphisme donné de E est aussi une propriété qui se transporte (via l'orthogonalité) à l'endomorphisme adjoint. On a la proposition suivante :

PROPOSITION 9.4.— Soient f un endomorphisme de E admettant un adjoint et F un sous-espace vectoriel de E , stable par f . Alors F^\perp est stable par f^* .

Démonstration.— Soit $\mathbf{x} \in F^\perp$ et montrons que $f^*(\mathbf{x}) \in F^\perp$. Puisque (par hypothèse) F est stable par f , on a pour tout $\mathbf{u} \in F$: $f(\mathbf{u}) \in F$; par conséquent :

$$\langle f^*(\mathbf{x}), \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{x}, f(\mathbf{u}) \rangle = 0$$

(vu que $\mathbf{x} \in F^\perp$ et $f(\mathbf{u}) \in F$). Ce qui montre que $f^*(\mathbf{x}) \perp \mathbf{u}$ ($\forall \mathbf{u} \in F$); autrement dit $f^*(\mathbf{x}) \in F^\perp$, comme il fallait le prouver. ■

9.2 Endomorphismes hermitiens

Les endomorphismes hermitiens sont l'analogue des endomorphismes autoadjoints des espaces préhilbertiens réels (voir §7.2).

Définition 9.II.— Un endomorphisme f de E est dit *hermitien* s'il est l'adjoint de lui-même, c'est-à-dire si $f^* = f$. De manière équivalente, f est hermitien si pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, on a :

$$\langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, f(\mathbf{y}) \rangle.$$

La caractérisation matricielle d'un endomorphisme hermitien d'un espace hermitien, relativement à une base orthonormée de celui-ci, se déduit immédiatement de la proposition 9.3. On a la

PROPOSITION 9.5.— Supposons que E est hermitien de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$) et soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base *orthonormée* de E . Soient aussi f un endomorphisme de E et A la matrice associée à f relativement à \mathcal{B} . Alors f est hermitien si et seulement si A est hermitienne (i.e., $A^* = A$). ■

Parmi les endomorphismes hermitiens de E , on cite « les projections orthogonales » et « les symétries orthogonales ⁽¹⁾ ». Inversement, une projection de E qui est hermitienne (en tant qu'endomorphisme) est nécessairement une projection orthogonale. De même, une symétrie de E qui est hermitienne (en tant qu'endomorphisme) est nécessairement une symétrie orthogonale. Toutes ces assertions se démontrent exactement de la même manière que pour les espaces euclidiens (voir §7.2) et sont laissées, de ce fait, au soin du lecteur.

Une autre propriété caractérisant les endomorphismes hermitiens est donnée par la proposition suivante :

PROPOSITION 9.6.— *Un endomorphisme f de E est hermitien si et seulement s'il vérifie la propriété suivante :*

$$\forall \mathbf{x} \in E : \langle \mathbf{x}, f(\mathbf{x}) \rangle \in \mathbb{R}.$$

Démonstration.— Soit f un endomorphisme de E . Supposons d'abord que f est hermitien et montrons la propriété requise sur f . Etant donné $\mathbf{x} \in E$, on a (puisque f est supposé hermitien) :

$$\langle \mathbf{x}, f(\mathbf{x}) \rangle = \langle f^*(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle = \langle f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, f(\mathbf{x}) \rangle}.$$

Ce qui montre que le nombre complexe $\langle \mathbf{x}, f(\mathbf{x}) \rangle$ est réel (vu qu'il est égale à son conjugué).

Inversement, Supposons que pour tout $\mathbf{u} \in E$, on a $\langle \mathbf{u}, f(\mathbf{u}) \rangle \in \mathbb{R}$ et montrons que f est hermitien. Etant donnés $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, on a (par hypothèse) :

$$\langle \mathbf{x}, f(\mathbf{x}) \rangle, \langle \mathbf{y}, f(\mathbf{y}) \rangle, \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \rangle, \langle \mathbf{x} + i\mathbf{y}, f(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) \rangle \in \mathbb{R}.$$

Mais les développements de $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \rangle$ et $\langle \mathbf{x} + i\mathbf{y}, f(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) \rangle$ en se servant de la linéarité de f et de la sesquilinearité du produit scalaire donnent :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \rangle &= \langle \mathbf{x}, f(\mathbf{x}) \rangle + \langle \mathbf{x}, f(\mathbf{y}) \rangle + \langle \mathbf{y}, f(\mathbf{x}) \rangle + \langle \mathbf{y}, f(\mathbf{y}) \rangle \\ \text{et} \\ \langle \mathbf{x} + i\mathbf{y}, f(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) \rangle &= \langle \mathbf{x}, f(\mathbf{x}) \rangle + i\langle \mathbf{x}, f(\mathbf{y}) \rangle - i\langle \mathbf{y}, f(\mathbf{x}) \rangle + \langle \mathbf{y}, f(\mathbf{y}) \rangle. \end{aligned}$$

Il en découle donc que :

(1). Comme dans le cas d'un espace euclidien, une symétrie orthogonale de E est un endomorphisme de E de la forme $s = 2p - \text{Id}_E$, où p est une projection de E . Lorsque p est particulièrement une projection orthogonale, on dira que s est une symétrie orthogonale.

$$\langle \mathbf{x}, f(\mathbf{y}) \rangle + \langle \mathbf{y}, f(\mathbf{x}) \rangle \in \mathbb{R}$$

et

$$\langle \mathbf{x}, f(\mathbf{y}) \rangle - \langle \mathbf{y}, f(\mathbf{x}) \rangle \in i\mathbb{R}.$$

En posant par suite $\langle \mathbf{x}, f(\mathbf{y}) \rangle + \langle \mathbf{y}, f(\mathbf{x}) \rangle = a$ et $\langle \mathbf{x}, f(\mathbf{y}) \rangle - \langle \mathbf{y}, f(\mathbf{x}) \rangle = bi$ (où $a, b \in \mathbb{R}$), il en résulte que :

$$\langle \mathbf{x}, f(\mathbf{y}) \rangle = \frac{1}{2}(a + bi) \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{y}, f(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{2}(a - bi).$$

D'où l'on tire que :

$$\overline{\langle \mathbf{y}, f(\mathbf{x}) \rangle} = \langle \mathbf{x}, f(\mathbf{y}) \rangle;$$

soit

$$\langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, f(\mathbf{y}) \rangle.$$

Comme cela est visiblement vrai pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, l'endomorphisme f est bien hermitien. Ceci complète la preuve de la proposition. ■

9.3 Endomorphismes antihermitiens

Les endomorphismes antihermitiens sont l'analogie des endomorphismes antisymétriques des espaces préhilbertiens réels (voir §7.3).

Définition 9.III.— Un endomorphisme f de E est dit *antihermitien* s'il est l'opposé de son adjoint; c'est-à-dire si $f^* = -f$. De manière équivalente, f est antihermitien si pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, on a :

$$\langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = -\langle \mathbf{x}, f(\mathbf{y}) \rangle.$$

Définition 9.IV.— Etant donné n un entier strictement positif, une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *antihermitienne* si elle satisfait la propriété : $A^* = -A$.

La caractérisation matricielle d'un endomorphisme antihermitien d'un espace hermitien, relativement à une base orthonormée de celui-ci, se déduit immédiatement de la proposition 9.3. On a la

PROPOSITION 9.7.— *Supposons que E est hermitien de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$) et soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base orthonormée de E . Soient aussi f un endomorphisme de E et A la matrice associée à f relativement à \mathcal{B} . Alors f est antihermitien si et seulement si A est antihermitienne.* ■

9.4 Endomorphismes unitaires

La notion d'*endomorphisme unitaire* est l'analogue de la notion d'endomorphisme orthogonal d'un espace préhilbertien réel (voir §7.4). On a la

Définition 9.V.— Un endomorphisme f de E est dit *unitaire* s'il conserve les produits scalaires; c'est-à-dire s'il vérifie la propriété :

$$\langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E).$$

Puisque la norme et la distance de E sont définies à partir du produit scalaire ambiant de E , il découle de la définition précédente qu'un endomorphisme unitaire de E conserve aussi les normes et les distances. Cela fait qu'un endomorphisme unitaire d'un espace préhilbertien complexe est un cas particulier d'une *isométrie* d'un espace métrique.

Notation 9.II.— L'ensemble des endomorphismes unitaires de E se note $U(E)$.

Les résultats qui vont suivre fournissent les propriétés fondamentales des endomorphismes unitaires d'un espace préhilbertien complexe, en mettant plus l'accent sur le cas de la dimension finie (i.e., le cas d'un espace hermitien).

PROPOSITION 9.8.— Soit f un endomorphisme de E . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) f est un endomorphisme unitaire,
- (ii) f conserve les normes; c'est-à-dire que l'on a :

$$\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\| \quad (\forall \mathbf{x} \in E).$$

Démonstration.— Reprendre la démonstration de la proposition 7.7 en utilisant (en vu d'établir l'implication (ii) \Rightarrow (i)) les formules appropriées (8.8) au lieu de la formule inappropriée (3.1). ■

PROPOSITION 9.9.— Supposons que E est hermitien (i.e., $\dim E < +\infty$) et soit f un endomorphisme de E . Si f est unitaire alors il transforme toute base orthonormée de E en une base orthonormée de E . Inversement, si f transforme une certaine base orthonormée de E en une base orthonormée de E alors f est unitaire.

Démonstration.— Reprendre la démonstration de la proposition 7.8 (relative au cas d'un espace euclidien) en lui effectuant les modifications évidentes. ■

PROPOSITION 9.10 (CARACTÉRISATION MATRICIELLE).— Supposons que E est hermitien de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$) et soit \mathcal{B} une base *orthonormée* de E . Soient aussi f un endomorphisme de E et A la matrice associée à f relativement à \mathcal{B} . Alors f est unitaire si et seulement si l'on a : $A^*A = I_n$.

Démonstration.— Reprendre la démonstration de la proposition 7.9 (relative au cas d'un espace euclidien) et lui effectuer les modifications nécessaires et évidentes. ■

Définition 9.VI.— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *unitaire* si elle représente un endomorphisme unitaire d'un espace hermitien relativement à une base orthonormée de celui-ci. De manière équivalente (compte tenu de la proposition 9.10), $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *unitaire* si elle satisfait $A^*A = I_n$.

Les matrices unitaires peuvent être caractérisées aussi par leurs vecteurs lignes ou colonnes. On a la

PROPOSITION 9.11.— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est unitaire si et seulement si ses vecteurs colonnes (resp. lignes) constituent une base orthonormée de $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{us})$.

Démonstration.— Reprendre la démonstration de la proposition 7.10 (relative aux matrices réelles) en lui portant les modifications nécessaires évidentes. ■

Remarque 9.II.— Une démonstration alternative de la proposition 9.11 consiste à associer à la matrice considérée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'endomorphisme de \mathbb{C}^n qu'elle représente relativement à la base canonique de \mathbb{C}^n , puis à utiliser la proposition 9.9 pour f .

Le résultat de l'exemple suivant généralise celui de la proposition 9.11, bien qu'on peut le déduire d'elle :

Exemple 9.II.— Supposons que E est hermitien et soient \mathcal{B} une base orthonormée de E et \mathcal{B}' une base arbitraire de E . Soit aussi P la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' .

— Montrer que \mathcal{B}' est orthonormée si et seulement si P est unitaire.

Écrivons $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ et désignons par u l'isomorphisme de E dans $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{us})$ qui envoie tout vecteur \mathbf{v}_k ($1 \leq k \leq n$) vers le $k^{\text{ème}}$ vecteur \mathbf{e}_k de la base canonique \mathcal{B}_c de \mathbb{C}^n . Comme \mathcal{B} est une base orthonormée de E et \mathcal{B}_c est une base orthonormée de $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{us})$, on vérifie immédiatement que u conserve les produits scalaires. Par conséquent, \mathcal{B}' est une base orthonormée de E équivaut à dire que $u(\mathcal{B}')$ est une base orthonormée de $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{us})$. Mais $u(\mathcal{B}')$ est visiblement constituée des vecteurs colonnes de P . D'où \mathcal{B}' est une base orthonormée de E si et seulement si les vecteurs colonnes de P constituent une base orthonormée de $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{us})$, ce qui revient à dire (en vertu de la proposition 9.11) que P est unitaire. ■

COROLLAIRE 9.12.— *Supposons que E est hermitien (i.e., $\dim E < +\infty$). Alors un endomorphisme f de E est unitaire si et seulement s'il est l'inverse de son adjoint (i.e., $f^* = f^{-1}$).*

Démonstration.— Il suffit de combiner les résultats des deux propositions 9.10 et 9.3. ■

PROPOSITION 9.13.— *La composition de deux endomorphismes unitaires de E reste un endomorphisme unitaire de E et l'inverse de tout endomorphisme unitaire de E (lorsqu'il existe ⁽²⁾) est unitaire.*

Démonstration.— Reprendre la démonstration de la proposition 7.12 (relative aux endomorphismes orthogonaux d'un espace préhilbertien réel). ■

On tire immédiatement de la proposition 9.13 l'important corollaire suivant :

COROLLAIRE 9.14.— *Supposons que E est hermitien. Alors l'ensemble des endomorphismes unitaires de E , muni de la loi de composition des endomorphismes, constitue un groupe, qui est en fait un sous-groupe du groupe linéaire $GL(E)$. ■*

Définitions et notations 9.VII.—

1. Supposons que E est hermitien. L'ensemble des endomorphismes unitaires de E , muni de la loi de composition des endomorphismes (qui est un groupe d'après le corollaire 9.14), s'appelle *le groupe unitaire* de E et se note $U(E)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des matrices unitaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (qui constitue un sous-groupe du groupe linéaire $GL_n(\mathbb{C})$) s'appelle *le groupe unitaire de degré n sur \mathbb{C}* (ou *le groupe unitaire complexe de degré n*) et se note $U_n(\mathbb{C})$.

PROPOSITION 9.15.— *Supposons que E est hermitien et soit f un endomorphisme unitaire de E . Alors on a :*

$$|\det f| = 1.$$

(2). L'existence est automatique dans le cas où E est hermitien (en vertu du corollaire 9.12).

Démonstration.— Posons $n := \dim E$ et soient \mathcal{B} une base orthonormée de E et A la matrice associée à f relativement à \mathcal{B} . D'après la proposition 9.10, on a $A^*A = I_n$. Ce qui entraîne que $\det(A^*A) = \det(I_n) = 1$. Mais par ailleurs, on a $\det(A^*A) = \det(A^*) \cdot \det(A) = \det({}^t\overline{A}) \cdot \det(A) = \det(\overline{A}) \cdot \det(A) = \overline{\det A} \cdot \det A = |\det A|^2 = |\det f|^2$. En comparant les deux résultats, on tire que $|\det f| = 1$, comme il fallait le prouver. ■

Définitions et notations 9.VIII.—

1. L'ensemble des **endomorphismes unitaires** de E , de **déterminant égale à 1**, constitue clairement un sous-groupe du groupe unitaire $U(E)$ de E . Ce sous-groupe particulier de $U(E)$ est appelé *le groupe spécial unitaire* de E et est noté $SU(E)$.
2. (Analogie matriciel du point 1). Etant donné $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des **matrices unitaires de déterminant 1** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ constitue un groupe de $U_n(\mathbb{C})$ que l'on appelle *le groupe spécial unitaire de degré n sur \mathbb{C}* (ou *le groupe spécial unitaire complexe de degré n*) et l'on désigne par $SU_n(\mathbb{C})$.

En fait, nous pouvons détailler la proposition 9.15 en analysant ce qu'il en est pour toute valeur propre d'un endomorphisme unitaire de E . Ceci est proposé dans l'exemple suivant :

Exemple 9.III.— Montrer que toute valeur propre complexe d'un endomorphisme unitaire de E est de module égale à 1. En déduire une autre démonstration de la proposition 9.15.

Soient f un endomorphisme unitaire de E et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de f . Il existe donc $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $f(x) = \lambda x$. En prenant les normes, il vient que $\|f(x)\| = |\lambda| \cdot \|x\|$. Mais puisque f est unitaire, on a (en vertu de la proposition 9.8) $\|f(x)\| = \|x\|$. D'où $\|x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$. Enfin, puisque $\|x\| \neq 0$ (car $x \neq 0_E$), on en tire que $|\lambda| = 1$, comme il fallait le prouver.

Lorsque E est hermitien (i.e., de dimension finie), on sait que le déterminant de f est égale au produit de ses valeurs propres. Ce qui permet d'aboutir (d'une autre façon) au résultat de la proposition 9.15. ■

9.5 Endomorphismes normaux

La classe des **endomorphismes normaux** d'un espace préhilbertien complexe inclut toutes les classes d'endomorphismes spéciaux présentées précédemment, à savoir les endomorphismes hermitiens, antihermitiens et unitaires. Elle constitue en outre (lorsque l'espace en question est hermitien) la classe la plus étendue pour laquelle **le théorème spectral** s'applique,

c'est-à-dire pour laquelle il y a possibilité de diagonaliser tout endomorphisme de la classe dans une base orthonormée de l'espace en question (voir §9.8 pour les détails).

Définition 9.IX.— Un endomorphisme de E est dit *normal* s'il possède un adjoint et commute avec cet adjoint; c'est-à-dire si f^* existe et l'on a : $f \circ f^* = f^* \circ f$.

Supposons maintenant que E est hermitien et soient \mathcal{B} une base **orthonormée** de E et f un endomorphisme de E représenté par une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ relativement à \mathcal{B} . D'après la proposition 9.3, la matrice associée à f^* relativement à \mathcal{B} est A^* . Les matrices associées aux endomorphismes composés $f \circ f^*$ et $f^* \circ f$ relativement à \mathcal{B} sont donc respectivement AA^* et A^*A . Par conséquent, f est normal si et seulement si $AA^* = A^*A$. Ce qui nous conduit à la définition suivante :

Définition 9.X.— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *normale* si elle commute avec son adjointe; c'est-à-dire si $AA^* = A^*A$.

Le raisonnement ci-haut établit alors la proposition suivante :

PROPOSITION 9.16.— *Supposons que E est hermitien. Un endomorphisme de E est normal si et seulement si sa matrice associée relativement à une base orthonormée de E est normale.* ■

La proposition qui suit fournit quelques propriétés caractérisant les endomorphismes normaux d'un espace préhilbertien complexe.

PROPOSITION 9.17.— *Soit f un endomorphisme de E possédant un adjoint. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) f est normal.
- (ii) $\langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \rangle = \langle f^*(\mathbf{x}), f^*(\mathbf{y}) \rangle, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$.
- (iii) $\|f(\mathbf{x})\| = \|f^*(\mathbf{x})\|, \forall \mathbf{x} \in E$.

Démonstration.— Reprendre la démonstration de la proposition 7.16 en lui portant les modifications nécessaires et évidentes. ■

9.6 Le théorème spectral pour les endomorphismes hermitiens

Dans toute cette section, on suppose que E est hermitien et on désigne par n ($n \in \mathbb{N}^*$) sa dimension. **Le théorème spectral** pour une certaine classe

d'endomorphismes énonce que tout endomorphisme f de E , de la classe considérée, est **diagonalisable** dans une base **orthonormée** de E ; c'est-à-dire qu'il existe une base **orthonormée** \mathcal{B} de E tel que la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ soit **diagonale**. La classe d'endomorphismes la plus étendue où le théorème spectral est valable est celle des endomorphismes **normaux**. Cependant, la classe des endomorphismes hermitiens, qui est une sous-classe de la classe des endomorphismes normaux, occupe une place primordiale dans ce contexte. Pour commencer, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 9.18.— Soit f un endomorphisme hermitien de E . Alors on a :

- (1) Les valeurs propres (complexes) de f sont toutes réelles.
- (2) L'orthogonal de tout sous-espace vectoriel de E , stable par f , reste stable par f .
- (3) Les sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes de f sont orthogonaux.

Démonstration.—

• Démontrons la propriété (1). Soit λ une valeur propre complexe arbitraire de f et montrons que λ est nécessairement réelle. Il existe par hypothèse $\mathbf{x} \in E \setminus \{\mathbf{0}_E\}$ tel que $f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$. D'où

$$\langle \mathbf{x}, f(\mathbf{x}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \lambda\mathbf{x} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \lambda \|\mathbf{x}\|^2.$$

Ce qui donne :

$$\lambda = \frac{\langle \mathbf{x}, f(\mathbf{x}) \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2}.$$

Mais puisque $\langle \mathbf{x}, f(\mathbf{x}) \rangle \in \mathbb{R}$ (en vertu de la proposition 9.6) et $\|\mathbf{x}\|^2 \in \mathbb{R}_+$, il en résulte que $\lambda \in \mathbb{R}$, comme il fallait le prouver.

• La propriété (2) est une conséquence immédiate de la proposition 9.4.

• Démontrons la propriété (3). Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes de f et E_1 et E_2 les espaces propres qui leurs sont respectivement associés. Il s'agit de montrer que $E_1 \perp E_2$; c'est-à-dire que tout vecteur de E_1 est orthogonal à tout vecteur de E_2 . Soient donc \mathbf{x}_1 un vecteur de E_1 et \mathbf{x}_2 un vecteur de E_2 et montrons que $\mathbf{x}_1 \perp \mathbf{x}_2$. Comme $\mathbf{x}_1 \in E_1$ et $\mathbf{x}_2 \in E_2$, on a : $f(\mathbf{x}_1) = \lambda_1\mathbf{x}_1$ et $f(\mathbf{x}_2) = \lambda_2\mathbf{x}_2$; ce qui fait que :

$$\langle f(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_2 \rangle = \langle \lambda_1\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = \overline{\lambda_1} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = \lambda_1 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle$$

(puisque $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, en vertu de la propriété (1) déjà démontrée) et

$$\langle \mathbf{x}_1, f(\mathbf{x}_2) \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \lambda_2\mathbf{x}_2 \rangle = \lambda_2 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle.$$

Mais puisque f est hermitien, on a en fait $\langle f(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_2 \rangle = \langle \mathbf{x}_1, f(\mathbf{x}_2) \rangle$; soit $\lambda_1 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = \lambda_2 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle$. D'où $(\lambda_1 - \lambda_2) \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = 0$. Ce qui entraîne (puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$) que $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = 0$, signifiant que $\mathbf{x}_1 \perp \mathbf{x}_2$, comme il fallait le prouver. Ceci complète la preuve du théorème. ■

Nous enchaînons avec le théorème spectral pour les endomorphismes hermitiens :

THÉORÈME 9.19 (LE THÉORÈME SPECTRAL POUR LES ENDOMORPHISMES HERMITIENS).—
Tout endomorphisme hermitien de E est diagonalisable dans une base orthonormée de E . Plus explicitement, pour tout endomorphisme hermitien f de E , il existe une base orthonormée \mathcal{B} de E tel que la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale réelle.

Il existe (à notre connaissance) trois démonstrations différentes de cet important théorème 9.19 dans la littérature mathématique. La plus répandue utilise la récurrence sur la dimension de E , une deuxième se sert du polynôme minimal de l'endomorphisme hermitien en question, et une troisième passe par le théorème de trigonalisation de Schur. Dans ce polycopié, nous avons opté d'en apporter une démonstration nouvelle, bien qu'elle s'inspire de la première mentionnée.

Démonstration du Théorème 9.19.— Soit f un endomorphisme hermitien de E et désignons par $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) les valeurs propres complexes (en fait réelles, en vertu du point (1) du théorème 9.18) deux à deux distinctes de f . Comme les espaces propres $E(\lambda_1), E(\lambda_2), \dots, E(\lambda_p)$ de f sont tous stables par f alors leur somme (directe) $F := E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus \dots \oplus E(\lambda_p)$ est aussi stable par f . Ce qui entraîne (d'après le point (2) du théorème 9.18) que F^\perp est également stable par f . Suite à cela, introduisons $g := f|_{F^\perp}$, qui est alors un endomorphisme du sous-espace F^\perp de E . Procédons maintenant par l'absurde pour montrer que F^\perp est nécessairement le sous-espace nul de E . Supposons que $F^\perp \neq \{0_E\}$; autrement dit $\dim F^\perp \geq 1$. Dans cette situation, l'endomorphisme g de F^\perp possède au moins une valeur propre λ , qui est nécessairement une valeur propre de f (puisque g est une restriction de f); soit $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$. Il existe donc $\mathbf{x} \in F^\perp \setminus \{0_E\}$ tel que $g(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$; soit $f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$. D'où

$$\mathbf{x} \in E(\lambda) \subset E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus \dots \oplus E(\lambda_p) = F.$$

Par conséquent, on a :

$$\mathbf{x} \in F^\perp \cap F = \{0_E\}.$$

Ce qui contredit le fait que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_E$. Cette contradiction assure que $F^\perp = \{\mathbf{0}_E\}$, ce qui équivaut à $F = E$; soit

$$E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_p) = E.$$

Enfin, puisque les espaces propres $E(\lambda_1), E(\lambda_2), \dots, E(\lambda_p)$ de f sont deux à deux orthogonaux (en vertu du point (3) du théorème 9.18), il suffit de fixer une base orthonormée \mathcal{B}_k de tout espace propre $E(\lambda_k)$ ($k = 1, 2, \dots, p$) de f et prendre $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$, qui est nécessairement une base orthonormée de E suivant laquelle f est représentée par une matrice diagonale (réelle). Ceci achève la démonstration du théorème. ■

La version matricielle du théorème 9.19 est présentée par le corollaire suivant :

COROLLAIRE 9.20 (LE THÉORÈME SPECTRAL POUR LES MATRICES HERMITIENNES).—

*Pour toute matrice hermitienne A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice unitaire P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que la matrice produit $P^{-1}AP = P^*AP$ soit diagonale réelle.*

Démonstration.— Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, hermitienne. On considère l'espace hermitien $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}})$ et l'endomorphisme f de \mathbb{C}^n dont la matrice associée relativement à la base canonique \mathcal{B}_c de \mathbb{C}^n est A . Comme la base canonique \mathcal{B}_c de \mathbb{C}^n est orthonormée par rapport au produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}}$ de \mathbb{C}^n et A est une matrice hermitienne alors l'endomorphisme f est hermitien (en vertu de la proposition 9.7). Il existe alors (d'après le théorème 9.19) une base orthonormée \mathcal{B} de $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}})$ tel que la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale réelle. Mais en désignant par P la matrice de passage de \mathcal{B}_c vers \mathcal{B} (qui est unitaire, en vertu de l'exemple 9.II), on a d'après la formule de changement de base (relative aux endomorphismes) : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1}AP = P^*AP$ (puisque P est unitaire). Ce qui démontre le corollaire. ■

Vocabulaire 9.I.— On dit d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, satisfaisant la propriété « $\exists P \in U_n(\mathbb{C})$ tel que $P^{-1}AP$ soit diagonale », qu'elle est *diagonalisable dans une base orthonormée*, ou encore qu'elle est *unitairement semblable à une matrice diagonale*. Le résultat du corollaire 9.20 précédent s'exprime littéralement alors en disant que « toute matrice hermitienne de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est unitairement semblable à une matrice diagonale réelle ».

Le corollaire 9.20 a pour conséquences les remarquables résultats suivants sur les formes hermitiennes sur un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie.

COROLLAIRE 9.21.— *Pour toute forme hermitienne f sur E , il existe une base orthonormée de E qui soit f -orthogonale.*

Démonstration.— Soit f une forme hermitienne sur E . Fixons une base orthonormée \mathcal{B} de E et désignons par A la matrice associée à f relativement à \mathcal{B} . D'après la proposition 8.5, la matrice A est hermitienne. Il s'ensuit, d'après le corollaire 9.20, qu'il existe $P \in U_n(\mathbb{C})$ tel que la matrice produit $P^{-1}AP = P^*AP$ soit diagonale (réelle). En désignant par suite par \mathcal{B}' la nouvelle base de E , choisie de sorte que P soit la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' , on a en vertu de l'exemple 9.II : \mathcal{B}' est orthonormée. De plus, on a d'après la formule de changement de base (relative aux formes hermitiennes) : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = P^*AP$, qui est diagonale; ce qui montre que \mathcal{B}' est f -orthogonale. Le corollaire est démontré. ■

COROLLAIRE 9.22.— Soient f une forme hermitienne sur un \mathbb{C} -espace vectoriel \mathcal{E} de dimension finie et q la forme quadratique hermitienne associée à f . Soient aussi \mathcal{B} une base arbitraire de \mathcal{E} et A la matrice associée à f relativement à \mathcal{B} . Alors la signature de q est égale au couple (p, m) , avec p et m désignent respectivement le nombre de valeurs propres strictement positives et le nombre de valeurs propres strictement négatives de A . En particulier, f définit un produit scalaire sur \mathcal{E} si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes (réelles) strictement positives.

Démonstration.— Posons $d := \dim \mathcal{E}$ et supposons que $d \geq 1$ (le cas $d = 0$ est banal et sans intérêt). On applique le corollaire 9.20 à la matrice $A := \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ (qui est hermitienne, puisqu'elle est associée à une forme hermitienne). On trouve qu'il existe $P \in U_d(\mathbb{C})$ tel que la matrice produit $P^*AP = P^{-1}AP$ soit diagonale réelle. Mais en désignant par \mathcal{B}' la nouvelle base de \mathcal{E} qui fait que P soit la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' , la matrice diagonale P^*AP n'est autre que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(q)$ (d'après la formule de changement de base relative aux formes hermitiennes). Par conséquent, la signature de la forme quadratique hermitienne q est égale au couple (p, m) , avec p et m désignent respectivement le nombre de coefficients diagonaux strictement positifs et le nombre de coefficients diagonaux strictement négatifs de la matrice diagonale P^*AP . Enfin, puisque P^*AP est diagonale et $P^*AP = P^{-1}AP \sim A$, les coefficients diagonaux de P^*AP sont simplement les valeurs propres de A . Ce qui permet de conclure au résultat de la première partie du corollaire.

Pour la seconde partie du corollaire, rappelons que f définit un produit scalaire sur \mathcal{E} revient à dire que f (ou q) est définie positive, ce qui revient à dire (en vertu du corollaire 8.15) que $\text{sgn}(q) = (d, 0)$. Grâce au résultat de la première partie (déjà démontré), on conclut donc que f est un produit scalaire sur \mathcal{E} si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes strictement positives. Ceci complète la preuve du corollaire. ■

9.7 Le théorème spectral pour les endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien

Nous présentons dans cette section les analogues des théorèmes 9.18 et 9.19 pour les endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien. En ce qui concerne l'analogue du théorème 9.19, nous obtenons même, pour un endomorphisme donné d'un espace euclidien, l'équivalence entre « être autoadjoint » et « être diagonalisable dans une base orthonormée ». Il est à signaler par contre que pour les endomorphismes d'un espace hermitien, la diagonalisabilité dans une base orthonormée n'est pas caractérisante des endomorphismes hermitiens mais plutôt des endomorphismes normaux, comme on le verra à la section prochaine.

THÉORÈME 9.23.— *Soit f un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien \mathcal{E} . Alors on a :*

- (1) *Le polynôme caractéristique de f est scindé sur \mathbb{R} .*
- (2) *L'orthogonal de tout sous-espace vectoriel de \mathcal{E} , stable par f , reste stable par f .*
- (3) *Les sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes de f sont orthogonaux.*

Démonstration.—

- Démontrons la propriété (1). Posons $d := \dim \mathcal{E}$ que nous supposons non nul (le cas $d = 0$ est banal). Fixons une base orthonormée \mathcal{B} de \mathcal{E} et considérons $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ la matrice associée à f relativement à \mathcal{B} . Comme f est autoadjoint alors (d'après la proposition 7.4) A est symétrique. Par conséquent, vue comme matrice de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, la matrice A est hermitienne. Ce qui entraîne (d'après le corollaire 9.20) que les valeurs propres (complexes) de A sont toutes réelles; autrement dit, le polynôme caractéristique de A (donc de f) est scindé sur \mathbb{R} , comme il fallait le prouver.

- Démontrons la propriété (2). Soit F un sous-espace vectoriel de \mathcal{E} , stable par f , et montrons que F^\perp est aussi stable par f . Soit donc $\mathbf{x} \in F^\perp$ et montrons que $f(\mathbf{x}) \in F^\perp$ aussi. Pour tout $\mathbf{u} \in F$, on a $f(\mathbf{u}) \in F$ (puisque F est stable par f); d'où (puisque f est autoadjoint) :

$$\langle f(\mathbf{x}), \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{x}, f(\mathbf{u}) \rangle = 0$$

(vu que $\mathbf{x} \in F^\perp$ et $f(\mathbf{u}) \in F$). Ce raisonnement montre que $f(\mathbf{x}) \perp \mathbf{u}$, $\forall \mathbf{u} \in F$; autrement dit $f(\mathbf{x}) \in F^\perp$, comme il fallait le prouver.

- Pour la propriété (3), reprendre exactement la même démonstration de la propriété (3) du théorème 9.18. Ainsi s'achève cette démonstration. ■

THÉORÈME 9.24.— Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien \mathcal{E} . Alors f est diagonalisable dans une base orthonormée si et seulement s'il est autoadjoint.

Démonstration.—

• (\Rightarrow) Supposons que f est diagonalisable dans une base orthonormée de \mathcal{E} ; c'est-à-dire qu'il existe une base orthonormée \mathcal{B} de \mathcal{E} tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale. Donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ est à fortiori symétrique; ce qui entraîne (d'après la proposition 7.4) que f est autoadjoint.

• (\Leftarrow) Reprendre la démonstration du théorème 9.19 en se servant du théorème 9.23 plutôt que du théorème 9.18. Ceci étant, un détail important concernant l'endomorphisme $g := f|_{F^\perp}$ (selon les notations introduites durant la démonstration du théorème 9.19) pourrait échapper au lecteur. Il s'agit de voir pourquoi g doit posséder au moins une valeur propre (réelle). Comme g est une restriction de f alors $P_g(X)$ divise $P_f(X)$; par suite, comme $P_f(X)$ est scindé sur \mathbb{R} (en vertu du point (1) du théorème 9.23) alors $P_g(X)$ est également scindé sur \mathbb{R} ; ce qui assure que g possède effectivement au moins une valeur propre réelle λ . Vu que \mathbb{C} est algébriquement clos, ce raisonnement (supplémentaire) n'était pas nécessaire dans le cas d'un espace vectoriel complexe (c'est-à-dire durant la démonstration du théorème 9.19). Ainsi s'achève cette démonstration. ■

La version matricielle du théorème 9.24 est présentée par le corollaire suivant :

COROLLAIRE 9.25 (LE THÉORÈME SPECTRAL POUR LES MATRICES SYMÉTRIQUES RÉELLES).—

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est symétrique si et seulement s'il existe $P \in O_m(\mathbb{R})$ tel que la matrice produit $P^{-1}AP = {}^tPAP$ soit diagonale.

Démonstration.— Soit $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$. On considère l'espace euclidien $(\mathbb{R}^m, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}})$ et l'endomorphisme f de \mathbb{R}^m dont la matrice associée relativement à la base canonique \mathcal{B}_c de \mathbb{R}^m est A . Comme la base canonique \mathcal{B}_c de \mathbb{R}^m est orthonormée par rapport au produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}}$ de \mathbb{R}^m alors (d'après la proposition 7.4) on a équivalence entre « A est symétrique » et « f est autoadjoint ». Mais d'après le théorème 9.24, « f est autoadjoint » équivaut à l'existence d'une base orthonormée \mathcal{B} de \mathbb{R}^m tel que la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale; ce qui équivaut matriciellement (en vertu de la proposition 7.10 et de la formule de changement de base pour les endomorphismes) à l'existence d'une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ tel que la matrice produit $P^{-1}AP (= {}^tPAP)$ soit diagonale. D'où le résultat du corollaire. ■

Vocabulaire 9.II.— Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On dit d'une matrice $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, satisfaisant la propriété « $\exists P \in O_m(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}AP$ soit diagonale », qu'elle est *diagonalisable dans une base orthonormée*, ou encore qu'elle est *orthogonalement semblable à une matrice diagonale*. Le résultat du corollaire 9.25 précédent s'exprime littéralement alors comme ceci : « Une matrice $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est symétrique si et seulement si elle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale ».

Du corollaire 9.25 résultent les deux corollaires suivants qui sont respectivement les analogues des corollaires 9.21 et 9.22 pour les formes bilinéaires symétrique d'un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. Vu que les preuves de ces corollaires sont essentiellement identiques aux preuves de leurs analogues ⁽³⁾, à savoir les corollaires 9.21 et 9.22, elles sont laissées au soin du lecteur.

COROLLAIRE 9.26.— *Pour toute forme bilinéaire symétrique f sur un espace euclidien \mathcal{E} , il existe une base orthonormée de \mathcal{E} qui soit f -orthogonale.* ■

COROLLAIRE 9.27.— *Soient f une forme bilinéaire symétrique sur un \mathbb{R} -espace vectoriel \mathcal{E} de dimension finie et q la forme quadratique associée à f . Soient aussi \mathcal{B} une base arbitraire de \mathcal{E} et A la matrice associée à f relativement à \mathcal{B} . Alors la signature de q est égale au couple (p, m) , avec p et m désignent respectivement le nombre de valeurs propres strictement positives et le nombre de valeurs propres strictement négatives de A . En particulier, f définit un produit scalaire sur \mathcal{E} si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes strictement positives.* ■

9.8 Le théorème spectral pour les endomorphismes normaux

Dans toute cette section, on suppose que E est hermitien et on désigne par n ($n \in \mathbb{N}^*$) sa dimension. Nous allons voir que les endomorphismes normaux de E constituent la classe la plus étendue d'endomorphismes de E où la diagonalisation dans une base orthonormée est réalisable. Pour parvenir à ce résultat, nous avons besoin de quelques propositions préliminaires que voici :

PROPOSITION 9.28.— *Soit f un endomorphisme normal de E . Alors, on a :*

- (i) $\text{Ker } f = \text{Ker } f^*$.

(3). Reprendre les preuves des corollaires 9.21 et 9.22 en leur portant les modifications nécessaires évidentes ; en particulier, utiliser le corollaire 9.25 plutôt que le corollaire 9.20.

(ii) $\sigma_{\mathbb{C}}(f^*) = \overline{\sigma_{\mathbb{C}}(f)}$ et pour tout $\lambda \in \sigma_{\mathbb{C}}(f)$, on a :

$$E_f(\lambda) = E_{f^*}(\overline{\lambda}).$$

Démonstration.—

• Démontrons (i). D'après la propriété (iii) de la proposition 9.17, on a pour tout $\mathbf{x} \in E$: $\|f(\mathbf{x})\| = \|f^*(\mathbf{x})\|$. D'où

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{\mathbf{x} \in E : f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_E\} \\ &= \{\mathbf{x} \in E : \|f(\mathbf{x})\| = 0\} \\ &= \{\mathbf{x} \in E : \|f^*(\mathbf{x})\| = 0\} \\ &= \{\mathbf{x} \in E : f^*(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_E\} \\ &= \text{Ker } f^*, \end{aligned}$$

comme il fallait le prouver.

• Démontrons (ii). L'égalité $\sigma_{\mathbb{C}}(f^*) = \overline{\sigma_{\mathbb{C}}(f)}$ est même vraie pour un endomorphisme quelconque de E , comme on l'a vu à l'exemple 9.I. Etant donné maintenant $\lambda \in \sigma_{\mathbb{C}}(f)$ (donc $\overline{\lambda} \in \overline{\sigma_{\mathbb{C}}(f)} = \sigma_{\mathbb{C}}(f^*)$), on a : $(f - \lambda \text{Id}_E)^* = f^* - \overline{\lambda} \text{Id}_E$. Mais comme f commute avec f^* (car f est normal) et Id_E commute avec tous les endomorphismes de E alors $(f - \lambda \text{Id}_E)$ commute avec $f^* - \overline{\lambda} \text{Id}_E = (f - \lambda \text{Id}_E)^*$; autrement dit, l'endomorphisme $(f - \lambda \text{Id}_E)$ de E est normal. Ce qui entraîne (d'après le point (i) déjà démontré) que $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)^* = \text{Ker}(f^* - \overline{\lambda} \text{Id}_E)$; soit $E_f(\lambda) = E_{f^*}(\overline{\lambda})$, comme il fallait le prouver. Ceci complète la preuve de la proposition. ■

PROPOSITION 9.29.— Soit f un endomorphisme normal de E . Alors les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

Démonstration.— Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres (complexes) distinctes de f et montrons que les sous-espaces propres de f qui leurs sont respectivement associés $E_f(\lambda_1)$ et $E_f(\lambda_2)$ sont orthogonaux; c'est-à-dire que tout vecteur de $E_f(\lambda_1)$ est orthogonal à tout vecteur de $E_f(\lambda_2)$. Soient donc $\mathbf{x} \in E_f(\lambda_1)$ et $\mathbf{y} \in E_f(\lambda_2)$ et montrons que $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$; c'est-à-dire que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. D'une part, on a :

$$\langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \lambda_1 \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\lambda_1} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

D'autre part, puisque $E_f(\lambda_2) = E_{f^*}(\overline{\lambda_2})$ (en vertu du point (ii) de la proposition 9.28), on a $\mathbf{y} \in E_{f^*}(\overline{\lambda_2})$; d'où :

$$\langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, f^*(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \overline{\lambda_2} \mathbf{y} \rangle = \overline{\lambda_2} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

En comparant les deux résultats, on tire que :

$$\overline{\lambda_1} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\lambda_2} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle;$$

soit

$$\overline{(\lambda_1 - \lambda_2)} \cdot \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0.$$

Ce qui entraîne (puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$) que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$, comme il fallait le prouver. La proposition est démontrée. ■

Nous sommes maintenant prêts à énoncer et démontrer le théorème spectral pour les endomorphismes normaux. La démonstration que nous exposons est une adaptation de celle du théorème 9.19, laquelle, comme indiqué au §9.6, est spécifique à l'auteur.

THÉORÈME 9.30 (LE THÉORÈME SPECTRAL POUR LES ENDOMORPHISMES NORMAUX).—
Un endomorphisme de E est diagonalisable dans une base orthonormée si et seulement s'il est normal.

Démonstration.— Soit f un endomorphisme de E .

• (\Rightarrow) Supposons que f est diagonalisable dans une base orthonormée \mathcal{B} de E . La matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ (de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) est donc diagonale. Mais comme \mathcal{B} est orthonormée, on a (en vertu de la proposition 9.3) $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f^*) = (\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f))^*$, qui est donc aussi diagonale. Enfin, comme les matrices diagonales (de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) commutent entre elles, on a : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ commute avec $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f^*)$. Ce qui entraîne que f commute avec f^* ; autrement dit, f est normal.

• (\Leftarrow) Inversement, supposons que f est normal et soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) les valeurs propres (complexes) deux à deux distinctes de f . Posons

$$F := E_f(\lambda_1) \oplus E_f(\lambda_2) \oplus \dots \oplus E_f(\lambda_p).$$

D'après le point (ii) de la proposition 9.28, on a aussi :

$$F = E_{f^*}(\overline{\lambda_1}) \oplus E_{f^*}(\overline{\lambda_2}) \oplus \dots \oplus E_{f^*}(\overline{\lambda_p}).$$

Par suite, comme tout espace propre de f^* est stable par f^* alors F est stable par f^* . Ce qui entraîne (d'après la proposition 9.4) que F^\perp est stable par $(f^*)^* = f$. Considérons alors l'endomorphisme restreint $g := f|_{F^\perp}$ de F^\perp . Procédons maintenant par l'absurde pour montrer que F^\perp est nécessairement le sous-espace nul de E . Supposons que $F^\perp \neq \{0_E\}$; autrement dit, $\dim F^\perp \geq 1$. Dans cette situation, l'endomorphisme g de F^\perp possède au moins une valeur propre complexe λ , qui est nécessairement une valeur propre de f (puisque g est une restriction de f); soit $\lambda \in$

$\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$. Il existe donc $\mathbf{x} \in F^\perp \setminus \{\mathbf{0}_E\}$ tel que $g(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$; soit $f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$. D'où

$$\mathbf{x} \in E_f(\lambda) \subset E_f(\lambda_1) \oplus E_f(\lambda_2) \oplus \dots \oplus E_f(\lambda_p) = F.$$

Par conséquent, on a :

$$\mathbf{x} \in F^\perp \cap F = \{\mathbf{0}_E\}.$$

Ce qui contredit le fait que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_E$. Cette contradiction assure que $F^\perp = \{\mathbf{0}_E\}$; ce qui équivaut à $F = E$; soit

$$E_f(\lambda_1) \oplus E_f(\lambda_2) \oplus \dots \oplus E_f(\lambda_p) = E.$$

Enfin, puisque les espaces propres $E_f(\lambda_1), E_f(\lambda_2), \dots, E_f(\lambda_p)$ de f sont deux à deux orthogonaux (en vertu de la proposition 9.29), il suffit de fixer une base orthonormée \mathcal{B}_k de tout espace propre $E_f(\lambda_k)$ ($k = 1, 2, \dots, p$) de f et prendre $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$, qui est nécessairement une base orthonormée de E suivant laquelle f est représenté par une matrice diagonale. D'où f est diagonalisable dans une base orthonormée de E . La démonstration du théorème est ainsi complète. ■

La version matricielle du théorème 9.30 est présentée par le corollaire suivant :

COROLLAIRE 9.31 (LE THÉORÈME SPECTRAL POUR LES MATRICES NORMALES).—

*Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est normale si et seulement si il existe $P \in U_n(\mathbb{C})$ tel que la matrice produit $P^{-1}AP = P^*AP$ soit diagonale.*

Démonstration.— Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'espace hermitien $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}})$ et l'endomorphisme f de \mathbb{C}^n dont la matrice associée relativement à la base canonique \mathcal{B}_c de \mathbb{C}^n est A . Comme la base canonique \mathcal{B}_c de \mathbb{C}^n est orthonormée par rapport au produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}}$ de \mathbb{C}^n alors (d'après la proposition 9.16) on a équivalence entre « A est normale » et « f est normal ». Mais d'après le théorème 9.30, « f est normal » équivaut à l'existence d'une base orthonormée \mathcal{B} de \mathbb{C}^n tel que la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale; ce qui équivaut matriciellement (en vertu de l'exemple 9.II et de la formule de changement de base pour les endomorphismes) à l'existence d'une matrice unitaire P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que la matrice produit $P^{-1}AP$ ($= P^*AP$) soit diagonale. D'où le résultat du corollaire. ■

9.9 Le théorème de trigonalisation de Schur

Le théorème de trigonalisation de Schur énonce qu'il est toujours possible de **trigonaliser dans une base orthonormée** tout endomorphisme d'un

espace hermitien. Curieusement, lorsque l'endomorphisme en question est normal, cette trigonalisation de Schur devient nécessairement une diagonalisation! Ce qui permet de retrouver le théorème spectral pour les endomorphismes normaux, sans avoir recours à examiner leurs espaces propres. Matriciellement, le théorème de Schur s'énonce comme suit :

THÉORÈME 9.32 (LE THÉORÈME DE TRIGONALISATION DE SCHUR).— *Etant donné $n \in \mathbb{N}^*$, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est unitairement semblable à une matrice triangulaire supérieure. Plus explicitement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $U \in U_n(\mathbb{C})$ tel que la matrice produit $U^{-1}AU$ soit triangulaire supérieure.*

Démonstration.— On procède par récurrence sur n .

- Pour $n = 1$, le résultat du théorème est trivial (prendre simplement $U = I_n$).
- Soit $n \geq 2$ un entier. Supposons que le résultat du théorème est vrai pour toute matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ et montrons qu'il reste vrai pour toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et montrons l'existence de $U \in U_n(\mathbb{C})$ tel que la matrice produit $U^{-1}AU$ soit triangulaire supérieure. Comme \mathbb{C} est algébriquement clos, le polynôme caractéristique P_A de A est scindé sur \mathbb{C} et possède, par conséquent, au moins un zéro complexe; autrement dit, A possède au moins une valeur propre complexe. Fixons $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{C}^n}\}$ un vecteur propre qui lui est associé (donc $A\mathbf{x}_1 = \lambda\mathbf{x}_1$). On complète \mathbf{x}_1 par des vecteurs $\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \dots, \mathbf{y}_n$ de \mathbb{C}^n pour avoir une base $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \dots, \mathbf{y}_n)$ de \mathbb{C}^n . Par suite, on applique le procédé de Gram-Schmidt à la base $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \dots, \mathbf{y}_n)$ de l'espace hermitien $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}})$ afin d'obtenir une base orthonormée $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ de cet espace. On a en particulier $\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|}$; ce qui montre que \mathbf{v}_1 est (tout comme \mathbf{x}_1) un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ . Posons maintenant :

$$R := (\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Puisque $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ est une base orthonormée de $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}})$ alors R est une matrice unitaire (en vertu de la proposition 9.11). De plus, on a :

$$\begin{aligned} R^{-1}AR &= R^*AR = R^*A(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_n) \\ &= R^*(A\mathbf{v}_1 | A\mathbf{v}_2 | \dots | A\mathbf{v}_n) \\ &= R^*(\lambda\mathbf{v}_1 | A\mathbf{v}_2 | A\mathbf{v}_3 | \dots | A\mathbf{v}_n) \\ &= (\lambda R^*\mathbf{v}_1 | R^*A\mathbf{v}_2 | R^*A\mathbf{v}_3 | \dots | R^*A\mathbf{v}_n). \end{aligned}$$

Mais vu que $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ est une base orthonormée de $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}})$, on a :

$$R^* \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{v}_1^*}{\|\mathbf{v}_1\|} \\ \frac{\mathbf{v}_2^*}{\|\mathbf{v}_2\|} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{v}_n^*}{\|\mathbf{v}_n\|} \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \|\mathbf{v}_1\|^2 \\ \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle_{\text{us}} \\ \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 \rangle_{\text{us}} \\ \vdots \\ \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_1 \rangle_{\text{us}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'où :

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ \mathbf{0} & Q \end{pmatrix},$$

avec $L \in \mathcal{M}_{1,(n-1)}(\mathbb{C})$, $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{(n-1),1}$ et $Q \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. En appliquant par suite notre hypothèse de récurrence à la matrice Q de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$, on trouve qu'il existe $S \in U_{n-1}(\mathbb{C})$ tel que la matrice produit $T_1 := S^{-1}QS$ (de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$) soit triangulaire supérieure. En posant alors

$$S' := \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),$$

qui est (tout comme S) unitaire, on a :

$$S'^{-1}R^{-1}ARS' = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & L \\ \mathbf{0} & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & LS \\ \mathbf{0} & S^{-1}QS \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & LS \\ \mathbf{0} & T_1 \end{pmatrix},$$

qui est visiblement une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il ne reste qu'à poser $U = RS' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, qui est unitaire (en tant que produit de deux matrices unitaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), pour avoir $U^{-1}AU = S'^{-1}R^{-1}ARS'$ triangulaire supérieure. Ceci achève cette récurrence et cette démonstration. ■

Comme première application du théorème de trigonalisation de Schur, nous proposons de redémontrer le théorème spectral pour les matrices hermitiennes ; c'est-à-dire le corollaire 9.20.

Redémonstration du corollaire 9.20.— Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice hermitienne de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Nous devons montrer que A est unitairement semblable à une matrice diagonale réelle. D'après le théorème 9.32, il existe $U \in U_n(\mathbb{C})$ tel que la matrice produit $T := U^{-1}AU = U^*AU$ soit triangulaire supérieure ; c'est-à-dire qu'elle s'écrit sous la forme :

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & t_{n-1,n} \\ \mathbf{0} & & & t_{nn} \end{pmatrix}$$

(avec $t_{k\ell} \in \mathbb{C}$ pour tous k, ℓ tels que $1 \leq k \leq \ell \leq n$). Ce qui donne :

$$T^* = \begin{pmatrix} \overline{t_{11}} & & & \\ \overline{t_{12}} & \ddots & & \mathbf{(0)} \\ \vdots & & \ddots & \\ \overline{t_{1n}} & \dots & \overline{t_{n-1,n}} & \overline{t_{n,n}} \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, nous affirmons que T est hermitienne. En effet, on a :

$$\begin{aligned} T^* &= (U^*AU)^* \\ &= U^*A^*U \\ &= U^*AU \quad (\text{puisque } A \text{ est hermitienne}) \\ &= T. \end{aligned}$$

Les formes précédentes de T et T^* sont par conséquent identiques, ce qui équivaut à $t_{k\ell} = 0$ pour tous k, ℓ tels que $1 \leq k < \ell \leq n$ et $\overline{t_{kk}} = t_{kk}$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$; autrement dit, T est diagonale réelle. D'où A est unitairement semblable à une matrice diagonale réelle (qui est en l'occurrence T), comme il fallait le prouver. ■

Comme deuxième application du théorème de trigonalisation de Schur, nous proposons de redémontrer le théorème spectral pour les matrices normales; c'est-à-dire le corollaire 9.31. Il est à noter que cette démonstration requiert un effort plus important que la précédente redémonstration du corollaire 9.20. En effet, nous sommes contraints de nous servir du lemme technique clé suivant :

LEMME 9.33.— Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et T une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors T est normale si et seulement si elle est diagonale.

Démonstration.— Si T est diagonale alors T^* l'est également et on a par conséquent $TT^* = T^*T$; autrement dit, T est normale. Inversement, supposons que T est normale et montrons qu'elle est nécessairement diagonale. Puisque T est triangulaire supérieure, elle s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \mathbf{(0)} & \ddots & t_{n-1,n} \\ & & & & t_{nn} \end{pmatrix}$$

(avec $t_{k\ell} \in \mathbb{C}$ pour tous k, ℓ tels que $1 \leq k \leq \ell \leq n$). Ce qui donne :

$$T^* = \begin{pmatrix} \overline{t_{11}} & & & \\ \overline{t_{12}} & \ddots & & \mathbf{(0)} \\ \vdots & & \ddots & \\ \overline{t_{1n}} & \dots & \overline{t_{n-1,n}} & \overline{t_{n,n}} \end{pmatrix}.$$

En posant alors

$$(a_{k\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n} := TT^* \quad \text{et} \quad (b_{k\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n} := T^*T,$$

on a (vu que T est supposée normale) $a_{k\ell} = b_{k\ell}$ pour tous $k, \ell \in \{1, 2, \dots, n\}$. On verra que les égalités $a_{kk} = b_{kk}$ ($1 \leq k \leq n$) suffisent pour conclure que T est diagonale. Pour $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a :

$$a_{kk} = \sum_{\ell=k}^n t_{k\ell} \overline{t_{k\ell}} = \sum_{\ell=k}^n |t_{k\ell}|^2$$

et

$$b_{kk} = \sum_{m=1}^k \overline{t_{mk}} t_{mk} = \sum_{m=1}^k |t_{mk}|^2.$$

Les égalités $a_{kk} = b_{kk}$ ($k \in \{1, 2, \dots, n\}$) sont donc équivalentes à :

$$\sum_{k < \ell \leq n} |t_{k\ell}|^2 = \sum_{1 \leq m < k} |t_{mk}|^2 \quad (\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}). \quad (9.1)$$

En prenant $k = 1$ dans (9.1), on obtient que :

$$\sum_{1 < \ell \leq n} |t_{1\ell}|^2 = 0;$$

ce qui entraîne que :

$$t_{1\ell} = 0 \quad \text{pour tout } \ell \text{ tel que } 1 < \ell \leq n. \quad (9.2)$$

Nous allons montrer par une récurrence forte que l'on a pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$t_{k\ell} = 0 \quad \text{pour tout } \ell \text{ tel que } k < \ell \leq n, \quad (9.3)$$

ce qui entraînera que T est effectivement diagonale.

- Pour $k = 1$, (9.3) n'est autre que (9.2); elle est donc vraie.
- Soit $k_0 \in \{2, 3, \dots, n\}$. Supposons que (9.3) est vraie pour tout

$k \in \{1, 2, \dots, k_0 - 1\}$ et montrons qu'elle reste vraie pour $k = k_0$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$t_{mk_0} = 0 \quad \text{pour tout } m \text{ tel que } 1 \leq m < k_0;$$

ce qui entraîne d'après (9.1) que :

$$\sum_{k_0 < \ell \leq n} |t_{k_0 \ell}|^2 = \sum_{1 \leq m < k_0} |t_{mk_0}|^2 = 0;$$

d'où l'on tire que $t_{k_0 \ell} = 0$ pour tout ℓ tel que $k_0 < \ell \leq n$. Ce qui confirme la validité de (9.3) pour $k = k_0$. Ainsi s'achève cette récurrence qui montre que la matrice T est bien diagonale. Le lemme est démontré. ■

Redémonstration du corollaire 9.31.— Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

• (\Leftarrow) (Presque trivial). Supposons que A est unitairement semblable à une matrice diagonale; c'est-à-dire qu'il existe une matrice $U \in U_n(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que l'on ait $D = U^{-1}AU = U^*AU$. On a alors $A = UDU^{-1} = UDU^*$. Ce qui donne $A^* = (UDU^*)^* = UD^*U^* = U\bar{D}U^{-1}$ (puisque D est diagonale et U est unitaire). Il s'ensuit des égalités $A = UDU^{-1}$ et $A^* = U\bar{D}U^{-1}$ que :

$$AA^* = (UDU^{-1})(U\bar{D}U^{-1}) = U\bar{D}DU^{-1}$$

et

$$A^*A = (U\bar{D}U^{-1})(UDU^{-1}) = U\bar{D}DU^{-1}.$$

Enfin, puisque D et \bar{D} commutent (car elles sont toutes les deux diagonales), on en conclut que $AA^* = A^*A$; autrement dit, A est normale, comme il fallait le prouver.

• (\Rightarrow) (Non trivial). Supposons que A est normale et montrons qu'elle est unitairement semblable à une matrice diagonale. D'après le théorème 9.32; A est unitairement semblable à une matrice triangulaire supérieure; autrement dit, il existe $T, U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec T triangulaire supérieure et U unitaire, pour lesquelles on ait $T = U^{-1}AU = U^*AU$. Ce qui donne $T^* = (U^*AU)^* = U^*A^*U = U^{-1}A^*U$. D'où :

$$TT^* = (U^{-1}AU)(U^{-1}A^*U) = U^{-1}(AA^*)U$$

et

$$T^*T = (U^{-1}A^*U)(U^{-1}AU) = U^{-1}(A^*A)U.$$

Mais puisque $AA^* = A^*A$ (car A est supposée normale), il en résulte que $TT^* = T^*T$; autrement dit, T est normale. Enfin, vu que T est triangulaire

supérieure, on en conclut par le lemme 9.33 que T est nécessairement diagonale. Par conséquent, A est unitairement semblable à une matrice diagonale (en l'occurrence T), comme il fallait le prouver. Ainsi se complète cette démonstration. ■

Nous concluons cette section en présentant l'analogue du théorème de trigonalisation de Schur pour les matrices réelles.

THÉORÈME 9.34 (L'ANALOGUE DU THÉORÈME 9.32 POUR LES MATRICES RÉELLES).—

Etant donné $n \in \mathbb{N}^$, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont le polynôme caractéristique est scindé sur \mathbb{R} , est orthogonalement semblable à une matrice triangulaire supérieure. Plus explicitement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur \mathbb{R} , il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ tel que la matrice produit $O^{-1}AO$ soit triangulaire supérieure.*

Démonstration.— Reprendre la démonstration du théorème 9.32 en lui portant les modifications nécessaires. Cependant, un détail important pourrait échapper à l'attention du lecteur. Il s'agit (en utilisant les mêmes notations que dans la démonstration du théorème 9.32) de prouver que le polynôme caractéristique de la matrice Q (de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$) est nécessairement scindé sur \mathbb{R} (afin de pouvoir appliquer à Q l'hypothèse de récurrence en question). En se servant de l'égalité

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ \mathbf{0} & Q \end{pmatrix},$$

on a :

$$\begin{aligned} P_A(X) = P_{R^{-1}AR}(X) &= \det \begin{pmatrix} \lambda - X & L \\ \mathbf{0} & Q - X I_{n-1} \end{pmatrix} = (\lambda - X) \det(Q - X I_{n-1}) \\ &= (\lambda - X) P_Q(X). \end{aligned}$$

Ce qui montre que P_Q divise P_A . Mais puisque P_A est supposé scindé sur \mathbb{R} , on en conclut qu'il en est de même de P_Q , prouvant ainsi l'information requise. ■

Remarque 9.III.— Nous pouvons nous servir du théorème 9.34 pour redémontrer le théorème spectral pour les matrices symétriques réelles⁽⁴⁾; c'est-à-dire le corollaire 9.25. Ceci est laissé au soin du lecteur.



(4). De la même manière dont nous nous sommes servi du théorème 9.32 pour redémontrer le corollaire 9.20.

Exercices

Exercice 9.1. Diagonaliser dans une base orthonormée de $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}})$ les deux matrices réelles symétriques d'ordre 3 suivantes :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 24 & -5 & -15 \\ -5 & 0 & 3 \\ -15 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9.2. Diagonaliser dans une base orthonormée de $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}})$ les deux matrices réelles symétriques d'ordre 4 suivantes :

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9.3. Diagonaliser dans une base orthonormée de $(\mathbb{C}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}})$ les deux matrices hermitiennes d'ordre 3 suivantes :

$$A := \begin{pmatrix} 6 & 1+3i & -2-i \\ 1-3i & 3 & -1+i \\ -2+i & -1-i & 2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 4 & -1+3i & -1-2i \\ -1-3i & 1 & -1+i \\ -1+2i & -1-i & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9.4. Diagonaliser dans une base orthonormée de $(\mathbb{C}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}})$ la matrice hermitienne d'ordre 4 suivante :

$$A := \begin{pmatrix} 16 & -3+5i & -8+2i & 3+12i \\ -3-5i & 1 & 2+2i & 3-3i \\ -8-2i & 2-2i & 3 & -6i \\ 3-12i & 3+3i & 6i & 8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9.5. Vérifier pour chacune des deux matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qu'elle est normale puis la diagonaliser dans une base orthonormée de $(\mathbb{C}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}})$.

$$A := \begin{pmatrix} 2+3i & 2-2i & 2i \\ 2-2i & 2+3i & 2i \\ -2 & -2 & 1+4i \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 3+i & -2+i \\ -1+3i & -1-2i & 3+i \\ 2-i & -1+3i & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9.6. Réduire dans une base orthonormée de $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}})$ les deux formes quadratiques de \mathbb{R}^3 données par :

$$\begin{aligned} q_1(X) &:= -3x^2 + 4xy - 4xz + 2yz, \\ q_2(X) &:= x^2 + y^2 + 4xy + 2\sqrt{2}(xz + yz) \end{aligned}$$

($\forall X = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$).

Exercice 9.7. Réduire dans une base orthonormée de $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}})$ la forme quadratique de \mathbb{R}^4 donnée par :

$$q(X) := 8x^2 + 3y^2 - 12xy - 6xz - 6xt + 4yz + 4yt + 2zt$$

($\forall X = {}^t(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$).

Exercice 9.8. Réduire dans une base orthonormée de $(\mathbb{C}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}})$ les deux formes quadratiques hermitiennes de \mathbb{C}^3 données par :

$$\begin{aligned} q_1(Z) &:= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\Im(\bar{z}_1 z_2) + 2\Im((1-i)\bar{z}_1 z_3) - 2\Im((1+i)\bar{z}_2 z_3), \\ q_2(Z) &:= 4|z_1|^2 + 4|z_2|^2 + 2\Re((4+3i)\bar{z}_1 z_2) + 2\Re((-2+i)\bar{z}_1 z_3) \\ &\quad + 2\Re((-1+2i)\bar{z}_2 z_3) \end{aligned}$$

($\forall Z = {}^t(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$).

Exercice 9.9. Réduire dans une base orthonormée de $(\mathbb{C}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}})$ la forme quadratique hermitienne de \mathbb{C}^4 donnée par :

$$\begin{aligned} q(Z) &:= 4|z_1|^2 - 2\Im(\bar{z}_1 z_3) + 2\Re(\bar{z}_1 z_4) + 2\Re((1-2i)\bar{z}_2 z_3) + 2\Re((2+i)\bar{z}_2 z_4) \\ &\quad + 6\Im(\bar{z}_3 z_4) \end{aligned}$$

($\forall Z = {}^t(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$).

Exercice 9.10. Trigonaliser dans une base orthonormée de $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}})$ ($n = 3$ ou 4 selon le cas) chacune des matrices réelles carrées suivantes :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9.11. Trigonaliser dans une base orthonormée de $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}})$ ($n = 3$ ou 4 selon le cas) chacune des matrices complexes carrées suivantes :

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1+i & 2 \\ 2+i & -1+i & 1-4i \\ -2+2i & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -3+4i & -4+i & 3-4i \\ -4 & -1-i & 4 \\ -6+i & -4-i & 6-i \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$C := \begin{pmatrix} -i & 1+i & -1+i & -1+i \\ -3+3i & -1-4i & 4-2i & 5-2i \\ -1-5i & 3 & 1+3i & 4i \\ -2 & 3 & 3i & 1+3i \end{pmatrix}.$$

Exercice 9.12. Soient E un espace hermitien et f un endomorphisme de E .

1. Montrer les deux égalités suivantes :

$$\text{Ker } f^* = (\text{Im } f)^\perp \quad \text{et} \quad \text{Im } f^* = (\text{Ker } f)^\perp.$$

2. En déduire les deux équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f \text{ est injectif} &\iff f^* \text{ est surjectif,} \\ f \text{ est surjectif} &\iff f^* \text{ est injectif.} \end{aligned}$$

Exercice 9.13. Soient E un espace hermitien et F et G deux sous-espaces supplémentaires de E . Désignons par p la projection sur F parallèlement à G .

1. Montrer alors que p^* est la projection sur G^\perp parallèlement à F^\perp .
☞ Montrer d'abord que p^* est une projection de E , puis se servir du résultat du point 1 de l'exercice 9.12.
2. Retrouver le résultat selon lequel « une projection de E est un endomorphisme hermitien si et seulement si elle est une projection orthogonale ».

Exercice 9.14. Soit f un endomorphisme normal d'un espace hermitien E , vérifiant $f^5 = f^4$.

— Montrer que f est nécessairement une projection orthogonale de E .

Exercice 9.15. Soit f un endomorphisme d'un espace hermitien E , satisfaisant $f^* \circ f = f$.

— Montrer que f est nécessairement une projection orthogonale de E .


Exercice 9.16. Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme auto-adjoint de E . Soient aussi $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Supposons qu'il existe $\mathbf{x} \in E$ tel que $\|\mathbf{x}\| = 1$ et $\|f(\mathbf{x}) - \lambda\mathbf{x}\| < \varepsilon$.

— Montrer alors que f possède au moins une valeur propre réelle μ , satisfaisant $|\mu - \lambda| < \varepsilon$.

Exercice 9.17. Soient n un entier strictement positif et A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I_n$. Montrer alors que l'on a nécessairement $A^2 = I_n$.

Exercice 9.18. Soient n un entier strictement positif et A et B deux matrices hermitiennes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec B est définie positive.


— Montrer que les matrices AB et BA sont toutes les deux diagonalisables à valeurs propres réelles et que l'on a $\sigma(AB) = \sigma(BA)$.

 Désignons par \mathcal{B}_c la base canonique de \mathbb{C}^n , par f l'endomorphisme de \mathbb{C}^n dont la matrice associée relativement à \mathcal{B}_c est AB et par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de \mathbb{C}^n dont la matrice associée relativement à \mathcal{B}_c est B . Montrer que f est hermitien relativement au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exercice 9.19. Etant donné n un entier strictement positif, montrer que toute matrice symétrique positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède une racine carrée symétrique positive.

Exercice 9.20. Soit n un entier strictement positif.

1. Montrer que toute matrice inversible A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $A = PO$, avec $P, O \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, P est symétrique positive et O est orthogonale⁽⁴⁾.

 Appliquer le résultat de l'exercice 9.19 à la matrice A^tA .

2. Montrer l'unicité d'une telle décomposition⁽⁴⁾.
3. Dédire du résultat de la question 1. que toute matrice inversible A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $A = O_1DO_2$, avec $D, O_1, O_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, D est diagonale et O_1 et O_2 sont orthogonales.
4. Énoncer et démontrer les résultats analogues pour les matrices complexes.

(4). Une telle décomposition de A s'appelle « la décomposition polaire de A ». Elle demeure possible même quand A est non inversible ; néanmoins, on perd son unicité dans ce cas. Noter aussi que cette décomposition est l'analogie de la représentation polaire d'un nombre complexe z ; c'est-à-dire de l'écriture $z = re^{i\theta}$, avec r et θ sont respectivement le module et l'argument de z .

Exercice 9.21. Etant donné n un entier strictement positif, on munit le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par :

$$\langle P, Q \rangle := \int_0^1 P(t)Q(t) dt \quad (\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X])$$

et on considère φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\varphi(P)(X) := \int_0^1 (X+t)^n P(t) dt \quad (\forall P \in \mathbb{R}_n[X]).$$

1. Montrer que φ est autoadjoint et bijectif.
2. En déduire l'existence d'une base orthonormée (P_0, P_1, \dots, P_n) de $(\mathbb{R}_n[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et de nombres réels non nuls $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$, satisfaisant :

$$\varphi(P_k) = \lambda_k P_k \quad (\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}).$$

3. Etablir l'identité polynomiale (aux deux indéterminées X et Y) :

$$(X+Y)^n = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(X) P_k(Y).$$

4. En déduire la valeur de chacun des deux nombres réels $\text{tr}(\varphi)$ et $\text{tr}(\varphi^2)$.

Exercice 9.22. Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme autoadjoint de E .

1. Justifier que les deux extremums

$$\lambda_{\min}(f) := \inf_{\substack{\mathbf{x} \in E \\ \|\mathbf{x}\|=1}} \langle f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle \quad \text{et} \quad \lambda_{\max}(f) := \sup_{\substack{\mathbf{x} \in E \\ \|\mathbf{x}\|=1}} \langle f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle$$

existent (i.e., appartiennent à \mathbb{R}) et qu'ils sont tous les deux atteints.

2. Montrer de deux façons différentes que $\lambda_{\min}(f)$ et $\lambda_{\max}(f)$ représentent respectivement la plus petite valeur propre et la plus grande valeur propre de f .

1^{ère} façon : Utiliser le théorème spectral des endomorphismes autoad-joints d'un espace euclidien (c'est-à-dire le théorème 9.24).


2^{nde} façon : Si par exemple λ_{\min} est atteint en \mathbf{x}_0 ($\mathbf{x}_0 \in E, \|\mathbf{x}_0\| = 1$) alors on devrait avoir pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $\mathbf{y} \in E$: $\langle f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{y}), \mathbf{x}_0 + t\mathbf{y} \rangle \geq \lambda_{\min}(f) \|\mathbf{x}_0 + t\mathbf{y}\|^2$. En développant cette inégalité tout en se servant du fait que f est autoadjoint, conclure que λ_{\min} est une valeur propre de f . Pour montrer que λ_{\max} est également une valeur propre de f , il suffit de remarquer que $\lambda_{\max}(f) = -\lambda_{\min}(-f)$. Constater par ailleurs que toute valeur propre de f s'écrit sous la forme $\langle f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle$ ($\mathbf{x} \in E, \|\mathbf{x}\| = 1$).

3. Énoncer et démontrer les résultats analogues pour le cas d'un espace hermitien E et d'un endomorphisme hermitien f de E .

Exercice 9.23. Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E .

1. Montrer que l'endomorphisme $(f^* \circ f)$ de E est autoadjoint à valeurs propres positives. **Pour la suite, on désigne respectivement par $\lambda_{\min}(f^* \circ f)$ et $\lambda_{\max}(f^* \circ f)$ la plus petite et la plus grande valeur propre de $(f^* \circ f)$.**
2. Montrer que l'on a pour tout $\mathbf{x} \in E$:

$$\lambda_{\min}(f^* \circ f) \cdot \|\mathbf{x}\|^2 \leq \|f(\mathbf{x})\|^2 \leq \lambda_{\max}(f^* \circ f) \cdot \|\mathbf{x}\|^2.$$

 S'appuyer sur le résultat du point 2. de l'exercice 9.22.

3. En déduire qu'étant donnés g et h deux endomorphismes de E , toute valeur propre μ de l'endomorphisme composé $(g \circ h)$ de E satisfait

$$\lambda_{\min}(g^* \circ g) \cdot \lambda_{\min}(h^* \circ h) \leq |\mu|^2 \leq \lambda_{\max}(g^* \circ g) \cdot \lambda_{\max}(h^* \circ h).$$

4. Énoncer et démontrer les résultats analogues pour le cas des endomorphismes hermitiens d'un espace hermitien.

Exercice 9.24 (Décomposition spectrale d'un endomorphisme normal).

Soient E un espace hermitien et f un endomorphisme normal de E . Pour toute valeur propre λ de f , on désigne par π_λ la projection orthogonale de E sur l'espace propre $E_f(\lambda)$ de f associé à λ . Démontrer les propriétés suivantes :

1. $\forall \lambda, \mu \in \sigma(f)$, avec $\lambda \neq \mu$, on a : $\pi_\lambda \circ \pi_\mu = \mathbf{0}_{\mathcal{L}(E)}$.
2. $\text{Id}_E = \sum_{\lambda \in \sigma(f)} \pi_\lambda$.
3. $f = \sum_{\lambda \in \sigma(f)} \lambda \pi_\lambda$.
4. **(Plus général que 2. et 3.).** Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a :

$$P(f) = \sum_{\lambda \in \sigma(f)} P(\lambda) \pi_\lambda.$$

5. Toutes les projections orthogonales π_λ ($\lambda \in \sigma(f)$) s'obtiennent comme application de polynômes complexes à l'endomorphisme f .

Exercice 9.25 (Complément pour l'exercice 9.24).

Soient E un espace hermitien et f un endomorphisme normal de E . Soient aussi p_1, p_2, \dots, p_k ($k \in \mathbb{N}^*$) des projections non identiquement nulles de E , satisfaisant les propriétés suivantes :

- (i) $\forall \alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, k\}$, avec $\alpha \neq \beta$, on a : $p_\alpha \circ p_\beta = \mathbf{0}_{\text{End}(E)}$.
- (ii) $\text{Id}_E = p_1 + p_2 + \dots + p_k$.
- (iii) $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$, deux à deux distincts, tels que : $f = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_k p_k$.

— Montrer alors que l'on a $k = \text{Card } \sigma(f)$ et que pour tout $\ell \in \{1, 2, \dots, k\}$, p_ℓ est précisément la projection orthogonale sur l'espace propre de f associé à la valeur propre λ_ℓ (il y a donc unicité des projections de E , satisfaisant aux conditions (i), (ii) et (iii)).





Exercice 9.26. Soient E un espace préhilbertien complexe et f un endomorphisme de E .

— Montrer que f est antihermitien si et seulement s'il vérifie la propriété :

$$\forall \mathbf{x} \in E : \langle \mathbf{x}, f(\mathbf{x}) \rangle \in i\mathbb{R}.$$

 S'inspirer de la démonstration de la proposition 9.6, laquelle est relative aux endomorphismes hermitiens.


Exercice 9.27. Soient E un espace hermitien et f un endomorphisme de E .

1. Montrer que f est normal si et seulement s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ pour lequel on ait : $f^* = P(f)$.
 Utiliser la décomposition spectrale de f (voir l'exercice 9.24).
2. Montrer que f est hermitien si et seulement s'il est normal et que toutes ses valeurs propres (complexes) sont réelles.
 Même indication.
3. Montrer que f est antihermitien si et seulement s'il est normal et que toutes ses valeurs propres (complexes) sont imaginaires pures.
 Se servir du résultat de l'exercice 9.26 pour le sens direct et de la même indication que pour les questions précédentes pour le sens indirect. Vous pouvez également remarquer que l'on a équivalence entre « f est antihermitien » et « if est hermitien » et conclure en s'appuyant sur le résultat de la question précédente.
4. Montrer que f est unitaire si et seulement s'il est normal et que toutes ses valeurs propres sont de module 1.
 Même indication que pour les questions 1 et 2.

Exercice 9.28 (Diagonalisation simultanée de deux endomorphismes normaux).


Soient f et g deux endomorphismes normaux d'un espace hermitien E . Supposons que f et g commutent.

— Montrer alors que f et g sont diagonalisables dans une **même** base orthonormée de E .

 Utiliser le fait que tout espace propre de f est invariant par g (après l'avoir démontré).

Exercice 9.29. Soient n un entier strictement positif et A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que les valeurs propres complexes de A sont toutes des nombres imaginaires purs.

 Raisonner sur la matrice iA .

2. En déduire que le rang de A est forcément pair.

 Constater que A est normale.

Exercice 9.30. Soit n un entier strictement positif.

1. Montrer que si S est une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors la matrice $O := (I_n - S)(I_n + S)^{-1}$ est orthogonale et on a $S = (I_n - O)(I_n + O)^{-1}$.
2. En déduire une façon simple de construire des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Énoncer et démontrer le résultat analogue pour les matrices antihermitiennes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

N.B : La transformation $S \mapsto (I_n - S)(I_n + S)^{-1}$ est connue sous le nom de « transformation de Cayley ».

Exercice 9.31 (Formule d'al-Karaji via les matrices antisymétriques).

1. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que pour toute matrice antisymétrique S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout vecteur X de \mathbb{R}^n , on a :

$$\langle SX, X \rangle_{\text{us}} = 0.$$

2. En déduire la formule d'al-Karaji :

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

 Appliquer le résultat de la question précédente pour

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}) \text{ et } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \\ -\frac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

($n \in \mathbb{N}$).

Exercice 9.32. Soient n un entier strictement positif et A et B deux matrices hermitiennes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

— Montrer que la matrice $(A + iB)$ est normale si et seulement si les deux matrices A et B commutent.

Exercice 9.33. Soient n un entier strictement positif et A et B deux matrices normales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les images (dans \mathbb{C}^n) sont orthogonales (relativement au produit scalaire usuel de \mathbb{C}^n).

— Montrer que la matrice $(A + B)$ est normale.

Exercice 9.34. Soient n un entier strictement positif et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose

$$B := AA^* - A^*A.$$


1. Montrer que si B est nilpotente alors elle est nulle.
2. Montrer que $\text{rg } B \neq 1$.

Exercice 9.35 (Généralisation du corollaire 9.26).

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et f et g deux formes bilinéaires symétriques de E , avec f est non dégénérée.

1. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme u de E tel que l'on ait pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$:

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(u(\mathbf{x}), \mathbf{y}).$$


 Raisonner matriciellement.

2. Montrer que les espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux pour chacune des formes bilinéaires symétriques f et g .
3. En déduire la généralisation suivante du corollaire 9.26 :

Il existe une base de E qui soit orthogonale pour chacune des deux formes bilinéaires symétriques f et g si et seulement si l'endomorphisme u est diagonalisable.

Exercice 9.36. Soient n un entier strictement positif et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ deux matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

— Montrer que la matrice $C := (a_{ij}b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est également symétrique définie positive.

 Diagonaliser la matrice A dans une base orthonormée de $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{us}})$ (utiliser plus précisément les corollaires 9.25 et 9.27).

Exercice 9.37. Soient E un espace hermitien et f un endomorphisme normal de E . Montrer que les deux sous-espaces $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ de E sont orthogonaux.

Exercice 9.38. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{kl})_{1 \leq k, l \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Désignons par $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres complexes de A (chacune étant répétée un nombre de fois égale à sa multiplicité algébrique).

— Montrer l'inégalité de Schur suivante :

$$\sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2 \leq \sum_{1 \leq k, l \leq n} |a_{kl}|^2.$$

 Utiliser le théorème de trigonalisation de Schur (i.e., le théorème 9.32).

Exercice 9.39. Etant donné n un entier strictement positif, montrer que toute matrice non nulle A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ satisfait l'inégalité :

$$\text{rg}(A) \geq \frac{|\text{tr } A|^2}{\text{tr}(A^*A)}.$$

 Utiliser le théorème de trigonalisation de Schur (i.e., le théorème 9.32).



Quelques sujets d'examens des années précédentes

Examen de l'année 2022-2023

Établissement : NHSM^a

Durée : 3h

a. National Higher School of Mathematics - Algiers.

Exercise 1 (10 marks) :

For what follows, k denotes a real parameter. Let us consider the **real** quadratic form q_k of \mathbb{R}^3 , defined by :

$$q_k(X) := kx^2 + (k+1)y^2 + (k+2)z^2 + (2k+1)xy + (2k+2)xz + (2k+5)yz$$

($\forall X = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$).

1. Determine a Gauss reduced form of q_k (distinguish the values of k if necessary).
2. Deduce the rank and the signature of q_k by distinguishing the values of k .
3. (a) Determine the values of k for which q_k is nondegenerate.
(b) Are there values of k for which q_k is positive semidefinite? Justify your answer.
4. Find a basis of \mathbb{R}^3 which is orthogonal with respect to the quadratic form $q_{1/2}$.
5. Let q'_k be the real quadratic form of \mathbb{R}^3 , defined by :

$$q'_k(X) := xy + xz + (1-k)yz \quad (\forall X = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

- (a) Justify the existence of three real linear forms L_1, L_2 , and L_3 in x, y, z (\mathbb{R} -linearly independent which possibly depend on k) so that we have :

$$q_k(L_1, L_2, L_3) = q'_k(x, y, z).$$

- (b) Determine such forms L_1, L_2 , and L_3 in the particular case $k = 0$.

Exercise 2 (6 marks) :

Let $\langle , \rangle : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$ be the map defined by :

$$\langle P, Q \rangle := P(0)Q(0) + (P(1) - P(0))(Q(1) - Q(0)) + (P(2) - P(1))(Q(2) - Q(1))$$

($\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$).

1. Show that \langle , \rangle is an inner product on $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Let $H := \{P \in \mathbb{R}_2[X] : P(1) = 0\}$.
— Determine H^\perp together with its dimension.

Exercise 3 (4 marks) :

Let E be an \mathbb{R} -vector space and let f be a *definite symmetric bilinear form* on E and q be its associated quadratic form. Next, let $n \in \mathbb{N}$ and $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ be vectors of E satisfying the two following properties :

- (i) $q(\mathbf{e}_i) = 1$ for all $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.
- (ii) $\sum_{i=1}^n f(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)^2 = q(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in E$.

— Show that $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ constitutes an f -orthonormal basis of E .

Good job and good luck
B. FARHI

Examen de remplacement de l'année 2022-2023
Établissement : NHSM
Durée : 2h

Exercise 1 (14 marks) :

For what follows, k denotes a real parameter. Let us consider the **real** quadratic form q_k of \mathbb{R}^3 , defined by :

$$q_k(X) := 2kx^2 + (2k + 3)y^2 + (2k - 3)z^2 + 4xy + 4xz - 2kyz$$

($\forall X = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$).

1. Determine a Gauss reduced form of q_k (distinguish the values of k if necessary).
2. Deduce the rank and the signature of q_k by distinguishing the values of k .
3. (a) Determine the values of k for which q_k is nondegenerate.
 (b) Determine the values of k for which q_k is positive definite.
4. Find a basis of \mathbb{R}^3 which is orthogonal with respect to the quadratic form q_1 .
5. Let q' be the real quadratic form of \mathbb{R}^3 , defined by :

$$q'(X) := \sum_{i=1}^{100} (-1)^i (x + iy + (i+1)z)^2 \quad (\forall X = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

— Determine the values of k for which q_k is equivalent to q' .

Exercise 2 (6 marks) :

For what follows the \mathbb{R} -vector space $\mathbb{R}[X]$ is equipped with the inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ defined by :

$$\langle P, Q \rangle := \int_0^1 P(X)Q(X) dX \quad (\forall P, Q \in \mathbb{R}[X]).$$

Let $(P_n(X))_{n \in \mathbb{N}_0}$ be an **orthonormal** sequence⁽⁵⁾ of $\mathbb{R}[X]$ such that **deg** $P_n = n$ ($\forall n \in \mathbb{N}_0$).

— Show the existence of three real sequences $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, and

$(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ for which we have the following recurrent polynomial identity :

$$P_{n+2}(X) = (a_n X + b_n) P_{n+1}(X) + c_n P_n(X) \quad (\forall n \in \mathbb{N}_0).$$

Good job and good luck
B. FARHI

(5). In other words, the polynomials $P_n(X)$ ($n \in \mathbb{N}_0$) are pairwise orthogonal and we have $\langle P_n(X), P_n(X) \rangle = 1$ for all $n \in \mathbb{N}_0$.

Interrogation de l'année 2016-2017
Établissement : Université de Béjaia
Durée : 1h15mn

Pour tout ce qui suit, k désigne un paramètre réel et q_k désigne la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 (dépendant de k), définie par :

$$q_k(\mathbf{x}) := kx^2 + (k+3)y^2 + z^2 + 6xy + 2xz + 4yz \quad (\forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3).$$

1. Réduire q_k par la méthode de Gauss en distinguant les valeurs de k .
2. Déterminer le rang et la signature de q_k en distinguant les valeurs de k .
3. En déduire les valeurs de k pour lesquelles q_k est **non dégénérée**, puis les valeurs de k pour lesquelles q_k est **positive** et enfin les valeurs de k pour lesquelles q_k est **définie positive**.
4. On prend dans cette question $k = 0$.
 - (a) Ecrire l'expression de la forme polaire f associée à q_0 .
 - (b) Ecrire la matrice associée à f relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 .
 - (c) Déterminer $\text{Ker } f$ et préciser sa dimension.
5. On prend dans cette question $k = 3/2$.
— Déterminer une base de \mathbb{R}^3 qui soit $q_{3/2}$ -orthogonale.
6. Déterminer les valeurs du paramètre k pour lesquelles la forme quadratique q_k est équivalente (sur \mathbb{R}) à la forme quadratique q' de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q'(\mathbf{x}) := 4xy - z^2 \quad (\forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3).$$

Bon travail
B. FARHI

Examen de l'année 2016-2017
Établissement : Université de Béjaia
Durée : 2h

Exercice 1 (5 points) :

Posons $E := \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et soit $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\varphi(f, g) := \int_0^1 f(x)g(x)(3x - 1) dx \quad (\forall f, g \in E).$$

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E .
2. Montrer que φ n'est pas positive.
3. Montrer que φ est non dégénérée.

Exercice 2 (7 points) :

Soit

$$f : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(P, Q) \longmapsto \frac{1}{2}(P(1+i)Q(1-i) + P(1-i)Q(1+i))$$

(où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$).

1. Montrer que f prend ses valeurs dans \mathbb{R} .
2. Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Montrer que f est positive mais qu'elle n'est pas définie positive.
4. Donner la matrice associée à f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Calculer le cône isotrope C de $\mathbb{R}_2[X]$ pour f et montrer que l'on a : $C = \mathbb{R}_2[X]^\perp$.

Exercice 3 (8 points) :

Pour tout ce qui suit, k désigne un paramètre réel. On considère q_k la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q_k(X) := k^2 x^2 + y^2 + (k+1)z^2 + 2xy + 2yz + 2(k^2 + k + 1)xz \quad (\forall X = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

1. Réduire q_k par la méthode de Gauss en distinguant, si nécessaire, les valeurs de k .

2. En déduire le rang et la signature de q_k en distinguant les valeurs de k .
3. (a) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles q_k est non dégénérée.
(b) Existe-t-il des valeurs de k pour lesquelles q_k est positive? Justifier.
4. Soit q' la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q'(X) := xy + xz - yz \quad (\forall X = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

- (a) Réduire q' par la méthode de Gauss.
- (b) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles q_k est équivalente à q' .
- (c) Justifier l'existence de trois formes linéaires L_1, L_2 et L_3 en x, y, z (\mathbb{R} -linéairement indépendantes) tel que l'on ait :

$$q_1(L_1, L_2, L_3) = q'(x, y, z).$$

- (d) **Question supplémentaire** ⁽⁶⁾ : Déterminer telles formes L_1, L_2 et L_3 .

Bon travail
B. FARHI

(6). Cette question ne fait pas partie de l'examen.

Examen de remplacement de l'année 2016-2017
Établissement : Université de Béjaia
Durée : 2h

Exercice 1 (5 points) :

Posons $E := \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et soit $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\varphi(f, g) := \int_0^1 f(x)g(x) \sin(3\pi x) dx + f\left(\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{2}\right) \quad (\forall f, g \in E).$$

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E .
2. Montrer que φ n'est pas positive.
3. Montrer que φ est non dégénérée.

Exercice 2 (7 points) :

Soit

$$f : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(P, Q) \longmapsto P(i)Q(-i) + P(-i)Q(i) + (P(1) - P''(1))(Q(1) - Q''(1))$$

(où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$).

1. Montrer que f prend ses valeurs dans \mathbb{R} .
2. Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Montrer que f est positive mais qu'elle n'est pas définie positive.
4. Donner la matrice associée à f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Calculer le cône isotrope C de $\mathbb{R}_2[X]$ pour f et montrer que l'on a : $C = \mathbb{R}_2[X]^\perp$.

Exercice 3 (8 points) :

Pour tout ce qui suit, k désigne un paramètre réel. On considère q_k la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q_k(X) := (k+1)x^2 + 8k^2y^2 + z^2 + 4(1-k)xy - 2xz - 4yz \quad (\forall X = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

1. Réduire q_k par la méthode de Gauss en distinguant, si nécessaire, les valeurs de k .
2. En déduire le rang et la signature de q_k en distinguant les valeurs de k .
3. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles q_k est non dégénérée, puis les valeurs de k pour lesquelles q_k est positive et enfin les valeurs de k pour lesquelles q_k est définie positive.
4. Soit q' la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q'(X) := xy - xz - yz \quad (\forall X = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

- (a) Réduire q' par la méthode de Gauss.
- (b) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles q_k est équivalente à q' .
- (c) Justifier l'existence de trois formes linéaires L_1, L_2 et L_3 en x, y, z (\mathbb{R} -linéairement indépendantes) tel que l'on ait :

$$q_{-\frac{1}{3}}(L_1, L_2, L_3) = q'(x, y, z).$$

Bon travail
B. FARHI

Examen de rattrapage de l'année 2016-2017
Établissement : Université de Béjaia
Durée : 1h30mn

Exercice (5 points) :

On considère $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\varphi(P, Q) := P(0)Q(0) + P(1)Q(1) - P(2)Q(2) \quad (\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X]).$$

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que φ n'est pas positive.
3. Montrer que φ est non dégénérée.

Problème (15 points) :

Pour tout ce qui suit, k désigne un paramètre réel. On considère q_k la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q_k(X) := (k+1)x^2 + y^2 + (k+1)z^2 - 2xy + 2k yz \quad (\forall X = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

1. Réduire q_k par la méthode de Gauss en distinguant, si nécessaire, les valeurs de k .
2. En déduire le rang et la signature de q_k en distinguant les valeurs de k .
3. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles q_k est **non dégénérée**, puis les valeurs de k pour lesquelles q_k est **positive** et enfin les valeurs de k pour lesquelles q_k est **définie positive**.
4. On prend dans cette question $k = 1$.
 - (a) Écrire l'expression de la forme polaire f associée à q_1 .
 - (b) Écrire la matrice associée à f relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 .
 - (c) Déterminer $\text{Ker } f$ et préciser sa dimension.
5. Soit q' la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q'(X) := xy - xz + yz \quad (\forall X = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

- (a) Réduire q' par la méthode de Gauss.
- (b) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles q_k est équivalente à q' .

(c) Justifier l'existence de trois formes linéaires L_1, L_2 et L_3 en x, y, z (\mathbb{R} -linéairement indépendantes) tel que l'on ait :

$$q_2(L_1, L_2, L_3) = q'(x, y, z).$$

Bon travail
B. FARHI

Interrogation de l'année 2015-2016
Établissement : Université de Béjaia
Durée : 1h15mn

Pour tout ce qui suit, k désigne un paramètre réel et q_k désigne la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 (dépendant de k), définie par :

$$q_k(\mathbf{x}) := x^2 + (k+1)y^2 + (k+1)z^2 + 2xy + 2xz \quad (\forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3).$$

1. Réduire q_k par la méthode de Gauss en distinguant les valeurs de k .
2. Déterminer le rang et la signature de q_k en distinguant les valeurs de k .
3. En déduire les valeurs de k pour lesquelles q_k est **non dégénérée**, puis les valeurs de k pour lesquelles q_k est **positive** et enfin les valeurs de k pour lesquelles q_k est **définie positive**.
4. On prend dans cette question $k = 1$.
 - (a) Ecrire l'expression de la forme polaire f associée à q_1 .
 - (b) Ecrire la matrice associée à f relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 .
 - (c) Déterminer $\text{Ker } f$ et préciser sa dimension.
5. On prend dans cette question $k = 2$.
 - Déterminer une base de \mathbb{R}^3 qui soit q_2 -orthogonale.
6. Déterminer les valeurs du paramètre k pour lesquelles la forme quadratique q_k est équivalente (sur \mathbb{R}) à la forme quadratique q' de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q'(\mathbf{x}) := x^2 + y^2 - z^2 \quad (\forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3).$$

Bon travail
B. FARHI

Examen de l'année 2015-2016
Établissement : Université de Béjaia
Durée : 2h

Exercice 1 (5 points) :

Posons $E := \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ et soit $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\varphi(f, g) := \int_{-1}^1 f(x)g(x)x \, dx \quad (\forall f, g \in E).$$

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E .
2. Montrer que φ n'est pas positive.
3. Montrer que φ est non dégénérée.

Exercice 2 (4 points) :

Soit $\langle , \rangle : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\langle P, Q \rangle := P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1) \quad (\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X]).$$

1. Montrer que \langle , \rangle est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $H(X) := 3X^2 - 14X + 15$.
 — Calculer $\{H\}^\perp$ en lui précisant une base.

Exercice 3 (11 points) :

Pour tout ce qui suit, k désigne un paramètre réel. On considère q_k la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q_k(X) := -x^2 - y^2 + kxy + xz + \frac{k^2 - 1}{4} z^2 \quad (\forall X = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

1. Réduire q_k par la méthode de Gauss en distinguant, si nécessaire, les valeurs de k .
2. En déduire le rang et la signature de q_k en distinguant les valeurs de k .
3. (a) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles q_k est non dégénérée.
 (b) Existe-t-il des valeurs de k pour lesquelles q_k est positive? négative? Justifier.

4. Soit q' la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q'(X) := xy + xz + yz \quad (\forall X = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

- (a) Réduire q' par la méthode de Gauss.
- (b) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles q_k est équivalente à q' .
- (c) Justifier l'existence de trois formes linéaires L_1, L_2 et L_3 en x, y, z (\mathbb{R} -linéairement indépendantes) tel que l'on ait :

$$q_1(L_1, L_2, L_3) = q'(x, y, z).$$

- (d) Déterminer telles formes L_1, L_2 et L_3 .

Bon travail
B. FARHI

Examen de remplacement de l'année 2015-2016
Établissement : Université de Béjaia
Durée : 2h

Exercice 1 (5 points) :

Posons $E := \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et soit $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\varphi(f, g) := \int_0^1 f(x)g(x) \sin(3\pi x) dx + f\left(\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{2}\right) \quad (\forall f, g \in E).$$

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E .
2. Montrer que φ n'est pas positive.
3. Montrer que φ est non dégénérée.

Exercice 2 (4 points) :

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\langle P, Q \rangle := P(0)Q(0) + P'(1)Q'(1) + P''(2)Q''(2) \quad (\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X]).$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $H := \{P \in \mathbb{R}_2[X] : P(1) = 0\}$.
 — Calculer H^\perp en lui précisant une base.

Exercice 3 (11 points) :

Pour tout ce qui suit, k désigne un paramètre réel. On considère q_k la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q_k(X) := kx^2 + (k+1)y^2 + (k+2)z^2 + (2k+1)xy + (2k+2)xz + yz$$

$(\forall X = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3)$.

1. Réduire q_k par la méthode de Gauss en distinguant, si nécessaire, les valeurs de k .
2. En déduire le rang et la signature de q_k en distinguant les valeurs de k .
3. (a) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles q_k est non dégénérée.
 (b) Existe-t-il des valeurs de k pour lesquelles q_k est positive? Justifier.

4. Soit $q'_{a,b}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q'_{a,b}(X) := xy + a xz + b yz \quad (\forall X = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

- (a) Réduire $q'_{a,b}$ par la méthode de Gauss.
- (b) En déduire le rang et la signature de $q'_{a,b}$ en distinguant les valeurs de a et b .
- (c) En posant $q' := q'_{1,-1}$, déterminer les valeurs de k pour lesquelles q_k est équivalente à q' .
- (d) Justifier l'existence de trois formes linéaires L_1, L_2 et L_3 en x, y, z (\mathbb{R} -linéairement indépendantes) tel que l'on ait :

$$q_0(L_1, L_2, L_3) = q'(x, y, z).$$

- (e) Déterminer telles formes L_1, L_2 et L_3 .

Bon travail
B. FARHI

Examen de rattrapage de l'année 2015-2016
Établissement : Université de Béjaia
Durée : 2h

Exercice 1 (5 points) :

Posons $E := \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et soit $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\varphi(f, g) := \int_0^1 f(x)g(x)(2x-1) dx \quad (\forall f, g \in E).$$

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E .
2. Montrer que φ n'est pas positive.
3. Montrer que φ est non dégénérée.

Exercice 2 (4 points) :

Soit $\langle , \rangle : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\langle P, Q \rangle := P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) \quad (\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X]).$$

1. Montrer que \langle , \rangle est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $H(X) := X^2 - X$ et $L(X) := X^2 - 4X + 2$.
 — Calculer $\{H, L\}^\perp$ en lui précisant une base.

Exercice 3 (11 points) :

Pour tout ce qui suit, k désigne un paramètre réel. On considère q_k la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q_k(X) := x^2 + (k^2 + k)y^2 + 2kz^2 + 2kxy - 2xz \quad (\forall X = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

1. Réduire q_k par la méthode de Gauss (distinguer, si nécessaire, les valeurs de k).
2. En déduire le rang et la signature de q_k en distinguant les valeurs de k .
3. (a) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles q_k est non dégénérée.
 (b) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles q_k est définie positive.

4. Soit q' la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q'(X) := xy + xz + 2yz \quad (\forall X = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

- (a) Réduire q' par la méthode de Gauss.
- (b) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles q_k est équivalente à q' .
- (c) Justifier l'existence de trois formes linéaires L_1, L_2 et L_3 en x, y, z (\mathbb{R} -linéairement indépendantes) tel que l'on ait :

$$q_{-1}(L_1, L_2, L_3) = q'(x, y, z).$$

- (d) Déterminer telles formes L_1, L_2 et L_3 .

Bon travail
B. FARHI

Interrogation de l'année 2014-2015
Établissement : Université de Béjaia
Durée : 1h

Pour ce qui suit, k désigne un paramètre réel et q désigne la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 définie par :

$$q(\mathbf{x}) := x^2 + (k+1)y^2 + (k+1)z^2 + 2xy + 2yz + (2-2k)xz \quad (\forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3).$$

1. Réduire q par la méthode de Gauss.
2. Déterminer le rang et la signature de q en distinguant les valeurs du paramètre réel k .
3. Déterminer une base de \mathbb{R}^3 qui soit q -orthogonale.
4. Déterminer les valeurs du paramètre k pour lesquelles la forme quadratique q est équivalente (sur \mathbb{R}) à la forme quadratique q' de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q'(\mathbf{x}) := xy + xz - yz \quad (\forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3).$$

Bon travail
B. FARHI

Examen de l'année 2014-2015
Établissement : Université de Béjaia
Durée : 2h

Exercice 1 (8 points) :

Pour tout ce qui suit, k désigne un paramètre réel. On considère q_k la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q_k(X) := x^2 - k y^2 + k xz - k yz \quad (\forall X = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

1. Réduire q_k par la méthode de Gauss.
2. En déduire le rang et la signature de q_k en distinguant les valeurs du paramètre réel k .
3. (a) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles q_k est non dégénérée.
 (b) Existe-t-il des valeurs de k pour lesquelles q_k est le carré d'une norme de \mathbb{R}^3 ? Justifier.
4. Déterminer une base de \mathbb{R}^3 qui soit q_k -orthogonale.
5. Soit q' la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q'(X) = (x + y)(y + z) \quad (\forall X = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

- (a) Montrer qu'il existe une unique valeur de k pour laquelle q_k est équivalente à q' .
- (b) Pour cette valeur précise de k , déterminer trois formes linéaires L_1, L_2 et L_3 en x, y, z (\mathbb{R} -linéairement indépendantes) tel que l'on ait :

$$q_k(L_1, L_2, L_3) = q'(x, y, z).$$

Exercice 2 (7 points) :

On munit le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ de l'application $\langle , \rangle : \mathbb{R}[x]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\langle P, Q \rangle := P(1)Q(1) - \int_0^1 P'(x)Q'(x) \ln x \, dx \quad (\forall P, Q \in \mathbb{R}[x]).$$

1. Montrer que \langle , \rangle constitue un produit scalaire de $\mathbb{R}[x]$.

2. Etablir la formule :

$$\int_0^1 x^n \ln x \, dx = -\frac{1}{(n+1)^2} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

3. En utilisant le procédé de Gram-Schmidt, déterminer une base de $\mathbb{R}_2[x]$ qui soit orthonormée pour le produit scalaire ci-dessus.

4. Calculer

$$\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \left\{ (a+b-1)^2 - \int_0^1 (2x-a)^2 \ln x \, dx \right\}.$$

Exercice 3 (5 points) :

Soient E un espace euclidien de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$) et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de E . Soit aussi f un automorphisme de E (i.e., un endomorphisme bijectif de E). On suppose que f conserve l'orthogonalité; c'est-à-dire que f vérifie la propriété :

$$\forall x, y \in E : \quad x \perp y \implies f(x) \perp f(y).$$

1. Montrer que la famille $(f(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ constitue une base orthogonale de E .

2. Montrer que pour tous $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a :

$$(f(e_i) + f(e_j)) \perp (f(e_i) - f(e_j)).$$

3. En déduire que les vecteurs $f(e_i)$ ($1 \leq i \leq n$) sont tous de même norme. **Désignons par k cette norme commune.**

4. Montrer que pour tout $x \in E$, on a :

$$\|f(x)\| = k \|x\|.$$

(On dit que f est une similitude de rapport k).

Bon travail
B. FARHI

Examen de remplacement de l'année 2014-2015
Établissement : Université de Béjaia
Durée : 2h

Exercice 1 (8 points) :

Pour tout ce qui suit, k désigne un paramètre réel. On considère q_k la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q_k(X) := x^2 + (k+1)y^2 + (k^2+1)z^2 + 2xy + 2xz + 2(1-k)yz$$

(pour tout $X = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$).

1. Réduire q_k par la méthode de Gauss.
2. Déterminer le rang et la signature de q_k en discutant suivant les valeurs de k .
3. (a) Quelles sont les valeurs de k pour lesquelles q_k est non dégénérée? Justifier.
 (b) Quelles sont les valeurs de k pour lesquelles $\sqrt{q_k}$ devient une norme sur \mathbb{R}^3 ? Justifier.
4. Déterminer une base de \mathbb{R}^3 qui soit q_k -orthogonale.
5. Soit q' la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q'(X) = (x+y)^2 + (x+z)^2 + (y-z)^2 \quad (\forall X = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

- (a) Montrer qu'il existe une unique valeur de k pour laquelle q_k est équivalente à q' .
- (b) Pour cette valeur précise de k , déterminer trois formes linéaires L_1, L_2 et L_3 en x, y, z (\mathbb{R} -linéairement indépendantes) tel que l'on ait :

$$q_k(L_1, L_2, L_3) = q'(x, y, z).$$

Exercice 2 (8 points) :

On munit le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ de l'application $\langle , \rangle : \mathbb{R}[x]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\langle P, Q \rangle := \int_0^1 \frac{P'(x)Q'(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx + P(1)Q(1) \quad (\forall P, Q \in \mathbb{R}[x]).$$

1. Montrer que \langle , \rangle constitue un produit scalaire de $\mathbb{R}[x]$.
2. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n := \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

- (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

- (b) En déduire l'expression de I_n en fonction de n (distinguer les cas « n pair » et « n impair »).
3. En utilisant le procédé de Gram-Schmidt, déterminer une base de $\mathbb{R}_2[x]$ qui soit orthonormée pour le produit scalaire ci-dessus.
 4. Calculer

$$\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \left\{ \int_0^1 \frac{(2ax+b)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx + (a+b-1)^2 \right\}.$$

Exercice 3 (4 points) :

Soient E un espace euclidien et f et g deux applications de E dans E , vérifiant :

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle.$$

— Montrer que f et g sont linéaires.

Bon travail
B. FARHI

Examen de rattrapage de l'année 2014-2015
Établissement : Université de Béjaia
Durée : 1h30mn

Exercice 1 (13 points) :

Pour tout ce qui suit, k désigne un paramètre réel. On considère q_k la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q_k(X) := x^2 + k^2 y^2 + z^2 + kxy + kxz + 2k^2 yz \quad (\forall X = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

1. Réduire q_k par la méthode de Gauss.
2. En déduire le rang et la signature de q_k en distinguant les valeurs du paramètre réel k .
3. (a) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles q_k est non dégénérée.
 (b) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles q_k est le carré d'une norme de \mathbb{R}^3 .
4. Déterminer une base de \mathbb{R}^3 qui soit q_k -orthogonale.
5. Soit q' la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q'(X) := x^2 - 3yz \quad (\forall X = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

- (a) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles q_k est équivalente à q' .
- (b) On prend dans cette question $k = 2$ et on pose $q = q_2$.
 Déterminer trois formes linéaires L_1, L_2 et L_3 en x, y, z (\mathbb{R} -linéairement indépendantes) tel que l'on ait :

$$q(L_1, L_2, L_3) = q'(x, y, z).$$

Exercice 2 (7 points) :

On munit le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}_2[x]$ de l'application $\langle , \rangle : \mathbb{R}_2[x]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\langle P, Q \rangle := P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1) \quad (\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[x]).$$

1. Montrer que \langle , \rangle constitue un produit scalaire de $\mathbb{R}_2[x]$.

2. Si l'on remplace $\mathbb{R}_2[x]$ par $\mathbb{R}_3[x]$, obtient-on un produit scalaire? Justifier.
3. En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt, déterminer une base de $\mathbb{R}_2[x]$ qui soit orthonormée pour le produit scalaire ci-dessus.
4. Proposer (sans démonstration) un prolongement du produit scalaire de $\mathbb{R}_2[x]$ ci-dessus à l'espace vectoriel plus large $\mathbb{R}[x]$.

Bon travail
B. FARHI

Interrogation du groupe 1 de l'année 2013-2014
Établissement : Université de Béjaia
Durée : 1h

Pour ce qui suit, k désigne un paramètre réel et q désigne la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 définie par :

$$q(\mathbf{x}) := x^2 + k y^2 + (2k^2 - k - 1) z^2 + 2xy + 2kxz + 2yz \quad (\forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3).$$

1. Réduire q par la méthode de Gauss.
2. Déterminer le rang et la signature de q en distinguant les valeurs du paramètre réel k .
3. Déterminer une base de \mathbb{R}^3 qui soit q -orthogonale.
4. Déterminer les valeurs du paramètre k pour lesquelles la forme quadratique q est équivalente à la forme quadratique q' de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q'(\mathbf{x}) := xy - z^2 \quad (\forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3).$$

Bon travail
B. FARHI

Interrogation du groupe 2 de l'année 2013-2014**Établissement : Université de Béjaia****Durée : 1h**

Pour ce qui suit, k désigne un paramètre réel et q désigne la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 définie par :

$$q(\mathbf{x}) := x^2 + (k^2 + k)(y^2 + z^2) + 2k(xy + xz) \quad (\forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3).$$

1. Réduire q par la méthode de Gauss.
2. Déterminer le rang et la signature de q en distinguant les valeurs du paramètre réel k .
3. Déterminer une base de \mathbb{R}^3 qui soit q -orthogonale.
4. Déterminer les valeurs du paramètre k pour lesquelles la forme quadratique q est équivalente à la forme quadratique q' de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q'(\mathbf{x}) := x^2 - 4yz \quad (\forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3).$$

Bon travail
B. FARHI

Examen de l'année 2013-2014
Établissement : Université de Béjaia
Durée : 2h

Exercice 1 (10 points) :

Pour ce qui suit, k désigne un paramètre réel. On considère q_k la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q_k(\mathbf{x}) := x^2 + 2y^2 + kz^2 + 2xy + 2yz \quad (\forall \mathbf{x} = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

1. Réduire q_k par la méthode de Gauss.
2. En déduire le rang et la signature de q_k en distinguant les valeurs du paramètre réel k .
3. Quelles sont les valeurs du paramètre réel k pour lesquelles la fonction $\sqrt{q_k} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$ constitue une norme sur \mathbb{R}^3 ? Justifier.
4. Déterminer une base de \mathbb{R}^3 qui soit q_k -orthogonale.
5. Soit q' la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q'(\mathbf{x}) := 2xy + 2xz - yz \quad (\forall \mathbf{x} = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

- (a) Réduire q' par la méthode de Gauss.
- (b) En déduire les valeurs de k pour lesquelles q_k et q' sont équivalentes.
- (c) On prend dans cette question $k = 0$. Déterminer trois formes linéaires L_1, L_2 et L_3 en x, y, z (\mathbb{R} -linéairement indépendantes) tel que l'on ait :

$$q_0(L_1, L_2, L_3) = q'(x, y, z).$$

Exercice 2 (5 points) :

On munit le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ de l'application $\langle , \rangle : \mathbb{R}[x]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\langle P, Q \rangle := \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x} dx \quad (\forall P, Q \in \mathbb{R}[x]).$$

1. Montrer que \langle , \rangle constitue un produit scalaire de $\mathbb{R}[x]$.

2. Dans cette question, on admet la formule : $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$
($\forall n \in \mathbb{N}$).

— En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt, déterminer une base de $\mathbb{R}_2[x]$ qui soit orthonormée pour le produit scalaire ci-dessus.

Exercice 3 (5 points) :

Soient E un espace euclidien et e_1, e_2, \dots, e_n ($n \in \mathbb{N}^*$) des vecteurs unitaires (c'est-à-dire tous de norme 1) de E . On suppose que l'on a pour tout $x \in E$:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2.$$

— Montrer que la famille (e_1, e_2, \dots, e_n) constitue une base orthonormée de E .

Bonne chance

B. FARHI

Examen de rattrapage l'année 2013-2014**Établissement : Université de Béjaia****Durée : 2h****Exercice 1 (7 points) :**

Pour ce qui suit, k désigne un paramètre réel. On considère q_k la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q_k(\mathbf{x}) := x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + kyz \quad (\forall \mathbf{x} = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

1. Réduire q_k par la méthode de Gauss.
2. En déduire le rang et la signature de q_k en distinguant les valeurs du paramètre réel k .
3. Déterminer une base de \mathbb{R}^3 qui soit q_k -orthogonale.
4. Soit q' la forme quadratique réelle de \mathbb{R}^3 , définie par :

$$q'(\mathbf{x}) := (x+y)^2 + (x+z)^2 - (y+z)^2 - (x+y+z)^2 \quad (\forall \mathbf{x} = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

- (a) Développer puis réduire q' par la méthode de Gauss.
- (b) En déduire les valeurs de k pour lesquelles q_k et q' sont équivalentes.

Exercice 2 (6,5 points) :

On considère l'application $\langle , \rangle : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\langle P, Q \rangle := P(1)Q(1) + 2P(2)Q(2) + P(3)Q(3) \quad (\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[x]).$$

1. Montrer que \langle , \rangle constitue un produit scalaire de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt, déterminer une base de $\mathbb{R}_2[x]$ qui soit orthonormée pour ce produit scalaire.

Exercice 3 (6,5 points) :

Soit E un espace préhilbertien réel.

1. Montrer que pour tous $x, y, z \in E$, on a :

$$\|x + y\|^2 + \|x + z\|^2 \leq 2\|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y + z\|. \quad (\star)$$

2. Décrire précisément (en justifiant bien sûr) les cas où l'inégalité (\star) devient une égalité.

3. Qu'obtient-on exactement si l'on prend dans (★) : $z = -y$?
4. En déduire que le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^2 muni de la norme $\|\cdot\|_1$, définie par :

$$\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|_1 := |a| + |b| \quad \left(\forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right)$$

n'est pas euclidien (c'est-à-dire que cette norme $\|\cdot\|_1$ n'est associée à aucun produit scalaire de \mathbb{R}^2).

Bonne chance
B. FARHI

Interrogation de l'année 2012-2013
Établissement : Université de Béjaia
Durée : 1h

Exercice 1 : Soit $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$q(\mathbf{x}) := x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \quad (\forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3).$$

1. Justifier rapidement le fait que q est une forme quadratique sur \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer la forme polaire de q puis la matrice associée à q relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 .
3. Réduire q par la méthode de Gauss.
4. En déduire le rang et la signature de q .
— Cette forme quadratique q est-elle positive ? justifier.
5. Déterminer une base de \mathbb{R}^3 qui soit orthogonale pour q .
6. Soit $q' : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par :

$$q'(\mathbf{x}) := x_1x_2 - x_3^2 \quad (\forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3).$$

— Les deux formes quadratiques q et q' sont-elles équivalentes ? Justifier.

Exercice 2 : On note par E le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f'(x)g'(x) dx + f(0)g(0) \quad (\forall f, g \in E).$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ constitue un produit scalaire sur E .
2. Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la famille libre (P_0, P_1, P_2) de E , avec $P_0(x) := x - 1$, $P_1(x) := x$ et $P_2(x) := x^2$.

Bon travail
B. Farhi

Examen de l'année 2012-2013
Établissement : Université de Béjaia
Durée : 2h

Exercice 1 (5 points) :

On munit le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^3 de la forme quadratique réelle définie par :

$$q(\mathbf{x}) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 \quad (\forall \mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3).$$

1. Réduire q par la méthode de Gauss.
2. En déduire le rang et la signature de q .
3. Déterminer une base de \mathbb{R}^3 qui soit orthogonale pour q .
4. La forme quadratique q est-elle équivalente à la forme quadratique q' définie par :

$$q'(\mathbf{x}) := x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \quad (\forall \mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3)?$$

(Justifier votre réponse).

Exercice 2 (7 points) :

On munit le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ de l'application $\langle , \rangle : \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\langle P, Q \rangle := P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P'(0)Q'(0) \quad (\forall P, Q \in \mathbb{R}_3[X]).$$

1. Montrer que \langle , \rangle constitue un produit scalaire de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base orthonormée du sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
3. (a) Calculer la projection orthogonale du polynôme X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.
 (b) En déduire la valeur de la distance $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$.

Exercice 3 (3 points) :

Pour ce qui suit, on note par E le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire \langle , \rangle défini par :

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx \quad (\forall f, g \in E).$$

On note aussi par F et G les sous-espaces vectoriels de E , constitués respectivement des fonctions paires et des fonctions impaires.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. Montrer que $F^\perp = G$.

Exercice 4 (5 points) :

Soient E un espace préhilbertien réel et f une application de E dans E , vérifiant :

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad (\forall x, y \in E).$$

1. Montrer que l'on a :

$$\|f(x)\| = \|x\| \quad (\forall x \in E).$$

2. Montrer que f est linéaire (donc f constitue un endomorphisme de E).
3. Supposons de plus que E est euclidien.
 - (a) Montrer que f est un automorphisme de E .
 - (b) Quel est l'endomorphisme adjoint de f dans ce cas?

Bonne chance
B. Farhi

Examen de rattrapage de l'année 2012-2013
Établissement : Université de Béjaia
Durée : 2h

Exercice 1 (5, 5 points) :

On munit le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^3 de la forme quadratique réelle définie par :

$$q(\mathbf{x}) := 4x_1^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 \quad (\forall \mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3).$$

1. Réduire q par la méthode de Gauss.
2. En déduire le rang et la signature de q .
3. Déterminer une base de \mathbb{R}^3 qui soit orthogonale pour q .
4. La forme quadratique q est-elle équivalente à la forme quadratique q' définie par :

$$q'(\mathbf{x}) := 4x_1x_2 - x_3^2 \quad (\forall \mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3)?$$

(Justifier votre réponse).

Exercice 2 (6, 5 points) :

On munit le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ de l'application $\langle , \rangle : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\langle P, Q \rangle := P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1) \quad (\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X]).$$

1. Montrer que \langle , \rangle constitue un produit scalaire de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
3. (a) Calculer la projection orthogonale du polynôme X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.
 (b) En déduire la valeur de la distance $d(X^2, \mathbb{R}_1[X])$.

Exercice 3 (4 points) :

Soient E un espace euclidien et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer les propriétés suivantes :

- i) $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
- ii) $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

iii) $F^{\perp\perp} = F$.

Exercice 4 (4 points) :

Soient E un espace euclidien et f et g deux applications de E dans E , satisfaisant :

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle \quad (\forall x, y \in E).$$

1. Montrer que f et g sont linéaires.
2. Soient \mathcal{B} une base orthonormée de E et A et B les matrices associées respectivement à f et g relativement à \mathcal{B} .
— Donner (en justifiant) la relation qui lie entre A et B .

**Bonne chance à tous
B. Farhi**

Bibliographie

Références en français

- [1] J. Grifone. Algèbre linéaire, *Editions Cépaduès*, 5^{ème} édition, Toulouse, 2015. **Les chapitres concernés : 7—10.**
- [2] M. Houimdi. Algèbre linéaire, algèbre bilinéaire (cours et exercices corrigés), *Editions Ellipses*, Paris, 2021. **Les chapitres concernés : 7—11.**
- [3] M. Queysanne. Algèbre, Coll. U, *Armand Colin*, 5^{ème} édition, Paris, 1964. **Le chapitre concerné : 15.**

Références en anglais

- [1] M. Ashraf, V. de Filippis, & M.A. Siddeeqe. Advanced Linear Algebra with Applications, *Springer*, 2022. **The concerned chapters : 5, 7, 8.**
- [2] S. Axler. Linear algebra done right, *Springer Nature*, 2023. **The concerned chapters : 6, 7.**
- [3] T.S. Blyth & E.F. Robertson. Further linear algebra, *Springer Science & Business Media*, 2013. **The concerned chapters : 1, 9, 10.**
- [4] Morton L. Curtis. Abstract linear algebra, *Springer Science & Business Media*, 2012. **The concerned chapter : 4.**
- [5] S.H. Friedberg, A.J. Insel, & L.E. Spence. Linear algebra, **vol. 4**, *Essex, NJ, USA : Pearson*, 2014. **The concerned chapter : 6.**
- [6] W.H. Greub. Linear algebra, **vol. 23**, *Springer Science & Business Media*, 2012. **The concerned chapters : 7, 8, 9, 11, 13.6.**
- [7] P.R. Halmos. Linear algebra problem book, **vol 16**, *American Mathematical Soc.*, 1995. **The concerned chapters : 8, 9.**
- [8] L. Hogben. (ed). Handbook of linear algebra, *CRC press*, 2013. **The concerned parts, chapters, and sections : Part I (Linear algebra) : Basic linear algebra (Section 5), Matrices with special properties (Sections 7 and 8).**
- [9] Roger A. Horn & Charles R. Johnson. Matrix analysis, *Cambridge University Press*, 2012. **The concerned chapters : 2, 4, 7.**

- [10] N. Jacobson. Lectures in Abstract Algebra : II. Linear Algebra, *Springer Science & Business Media*, 2013. **The concerned chapters : 5, 6.**
- [11] N. Johnston. Advanced linear and matrix algebra, *Springer*, 2021. **The concerned chapters and sections : 1.3, 1.4, 1.5, 2.1, 2.2, 2.5.**
- [12] Carl D. Meyer & I. Stewart. Matrix analysis and applied linear algebra, *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2023. **The concerned chapter : 5.**
- [13] V.V. Prasolov. Problems and theorems in linear algebra, **vol 134**, *American Mathematical Soc.*, 1994. **The concerned chapters : 2, 3, 4.**
- [14] S. Roman. Advanced linear algebra, 3rd edition, *Springer*, 2008. **The concerned parts and chapters : Part I : Chapters 9 and 10; Part II : Chapter 11.**

Références en arabe

- [1] عمران قوبا. الجبر 2 (الجبر الخطي)، منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية و التكنولوجيا، الجمهورية العربية السورية، 2017. متوفر للتحميل من :

<http://www.hiast.edu.sy>.

الفصل المعني : 12.