Algèbre de Boole:

Introduction.

Les circuits numériques (digitaux, logiques) de la partie matérielle de la machine à information sont conçus et leurs comportements analysés en utilisant une branche des mathématiques appelée ***algèbre de Boole***, en hommage à ***Georges Boole*** , un mathématicien britannique (1815 – 1864), qui a écrit en 1854 son célèbre ouvrage « *An Investigation of the Laws of Thought on Which to Found the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* ».

En 1938, ***Claude Shannon***, a montré l'utilisation de l'algèbre de Boole dans l'étude des circuits à base de relais.

Puis les travaux de Claude Shannon furent adaptés à l'étude des circuits de l'électronique numérique (digitale).

L'algèbre de Boole, de nos jours est utilisée dans l'électronique digitale pour:

- ***L'analyse***: outil formel pour décrire le fonctionnement des circuits digitaux.
- ***La conception***: Partant de la fonction d'un circuit , l'algèbre de Boole permet d'arriver à une réalisation simplifiée (implémentation) de ce circuit.

Algèbre de Boole:

Introduction.

Comme toute autre algèbre, celle de Boole manipule des grandeurs représentées par des symboles (les ***variables***) selon des ***opérations*** pour produire des ***fonctions***.

Les ***variables*** et les ***fonctions*** prennent des valeurs dans l'ensemble [0, 1].

variable logique ≡ variable binaire ≡ variable Booléenne.

Une variable logique modélise un système qui ne doit avoir que deux états tel un interrupteur par exemple.

Une fonction logique (ou Booléenne) est le résultat d'une combinaison (selon des opérations) de n variables.

Une fonction logique est entièrement définie par la donnée de ses valeurs pour les 2^n combinaisons possibles des n variables . Cette définition se traduit par la ***table de vérité de la fonction***.

Algèbre de Boole:

Table de vérité.

Table de vérité d'une fonction logique (la TV).

A	*B*	*C*	*F(A,B,C)*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Une fonction logique est, également, entièrement définie par son expression algébrique (que nous verrons plus loin).

Algèbre de Boole:

Une fonction logique modélise la sortie d'un système qui ne peut être que dans deux états.

Le rapport entre les circuits numériques et l'algèbre de Boole est tel que:

Les entrées du circuit sont les variables.

La (ou les) sortie(s) du circuit est (sont) la fonction (les fonctions).

Le contenu du circuit "calcule" l'expression de la (ou des) fonction(s).

L'état binaire (0 et 1) aussi bien des entrées que des sorties est concrétisé par **deux et seulement deux** niveaux de tensions électriques.

Les opérations de base (également appelées opérateurs de base ou fonctions de base) sont:

Le **ET** logique (produit), le **OU** logique (somme) et le **NON** logique ou complémentation.

Algèbre de Boole:

exemples de systèmes.

Exemple 1**:** un circuit qui réalise la table d'addition du cours précédent. Il génère une somme et une retenue sortante.
Nous avons, ici, deux fonctions
s(a,b), la somme.
r(a,b) , la retenue

a	b	s	r
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Exemple 2**:** un circuit comparateur de deux nombre sur deux bits chacun. (entiers naturels).
Le nombre A(a1a0) et B(b1b0).
La sortie est à 1 si A=B, 0 sinon.
S(a1,a0,b1,b0).

a1	a0	b1	b0	S
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Algèbre de Boole:

Opérations logiques de base (ET, OU, NON).

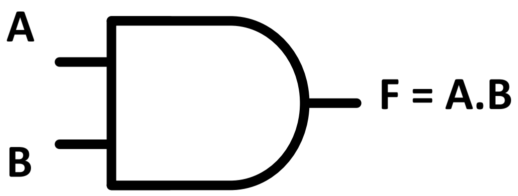
- **Les opérations (ou opérateurs) ET (AND), OU (OR) et NON (NOT).**
- **Leurs écritures algébriques (dites aussi expressions algébriques ou fonctions de base) :**

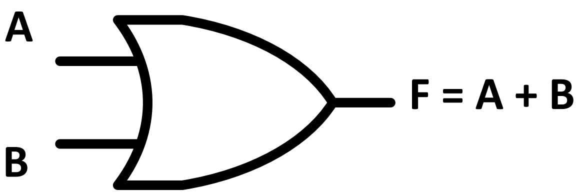
  F = A.B, F = A+B , F= $\overline{A}$ et se lisent (A et B), (A ou B) et (A barre).
- **Leurs tables de vérité et leurs symboles logiques.**

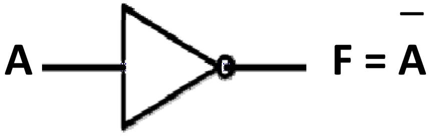
A	B	F = A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	F= A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	F = $\overline{A}$
0	1
1	0







Les opérateurs AND et OR peuvent avoir plus de deux entrées.

Algèbre de Boole:

Théorèmes Fondamentaux.

Théorème	Forme Somme logique	Forme Produit logique
Elément absorbant	$A + 1 = 1$	$A . 0 = 0$
Elément neutre	$A + 0 = A$	$A . 1 = A$
Complémentation	$A + \overline{A} = 1$	$A . \overline{A} = 0$
Idempotence	$A + A = A$	$A . A = A$
Associativité	$(A+B)+C = A+(B+C) = A+B+C$	$(A.B).C = A.(B.C) = A.B.C$
Commutativité	$A+B = B+A$	$A.B = B.A$
Distributivité	$A.(B+C) = A.B + A.C$	$A+(B.C) = (A+B).(A+C)$
Absorption	$A+A.B = A$	$A.(A+B) = A$
Simplification	$A + \overline{A}.B = A + B$	$A.(\overline{A} + B) = A.B$
Involution	$\overline{\overline{A}} = A$	
Lois de De Morgan	$\overline{A + B} = \overline{A} . \overline{B}$	$\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$

Algèbre de Boole:

expression algébrique ou logique d'une fonction Booléenne.

Décomposition de Shannon:

On peut aisément vérifier que:

$$F(A,B,C) = A.F(1,B,C) + \overline{A}.F(0,B,C)$$

$$F(A,B,C) = A.[B.F(1,1,C) + \overline{B}.F(1,0,C)] + \overline{A}.[B.F(0,1,C) + \overline{B}.F(0,0,C)]$$

$$= A.[B[C.F(1,1,1) + \overline{C}.F(1,1,0)]+ \overline{B}.[C.F(1,0,1) + \overline{C}.F(1,0,0)]]$$

$$+ \overline{A}.[B.[C.F(0,1,1) + \overline{C}.F(0,1,0)]+ \overline{B}.[C.F(0,0,1)+ \overline{C}.F(0,0,0)]]$$

$$F(A,B,C) = A.B.C.F(1,1,1) + A.B.\overline{C}.F(1,1,0) + A.\overline{B}.C.F(1,0,1) + A.\overline{B}.\overline{C}.F(1,0,0)$$

$$+ \overline{A}.B.C.F(0,1,1) + \overline{A}.B.\overline{C}.F(0,1,0) + \overline{A}.\overline{B}.C.F(0,0,1) + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.F(0,0,0)$$

Pour trouver l'expression algébrique de f(A,B,C) il suffit de remplacer les F(i,j,k) par leurs valeurs Zéro ou Un de la table de vérité.

Algèbre de Boole:

Exemple d'expression algébrique à partir d'une TV.

Soit une fonction logique, définie par la table de vérité suivante.

Quelle est son expression algébrique?

A	*B*	*C*	*F(A,B,C)*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$F(A,B,C) = \overline{A}.B.C + A.\overline{B}.C + A.B.\overline{C} + A.B.C$ F est appelée fonction majorité.

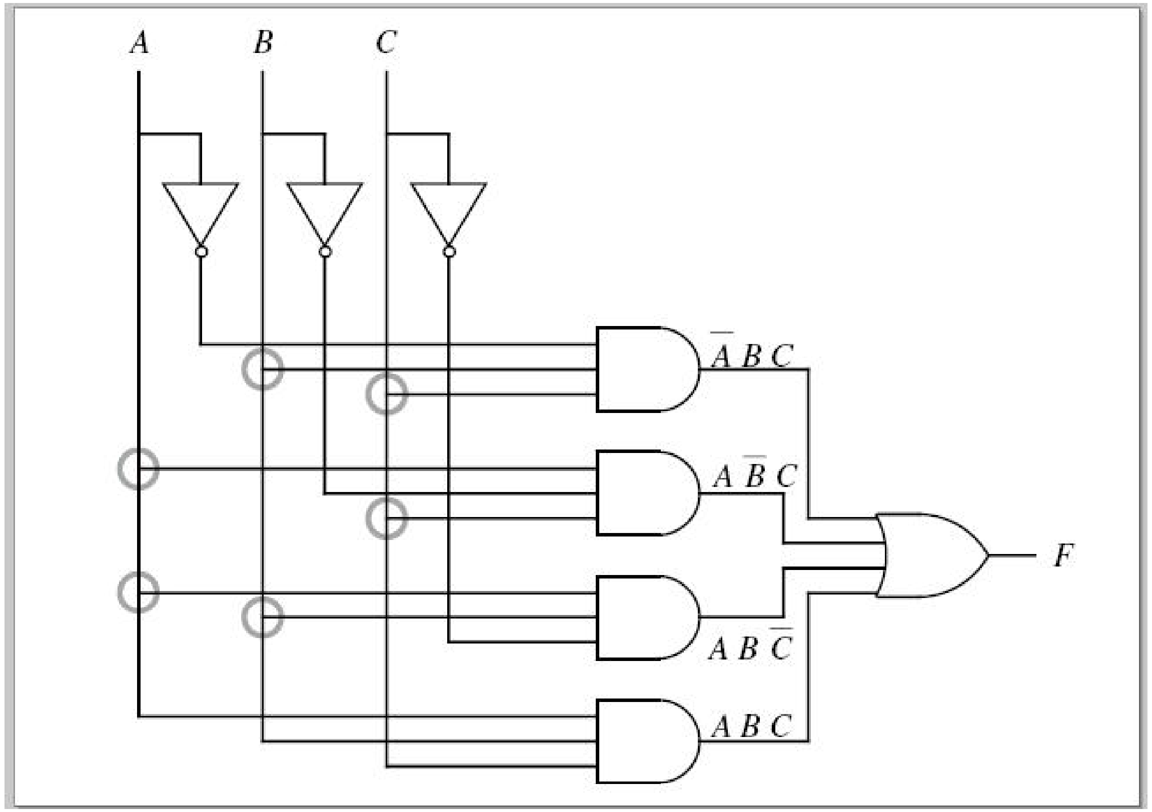
Toute fonction logique s'exprime au moyen des trois opérateurs ET, OU, NON.

Algèbre de Boole:

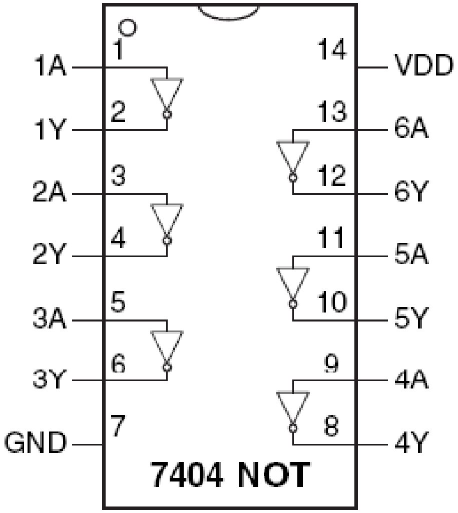
Schéma logique d'une fonction.

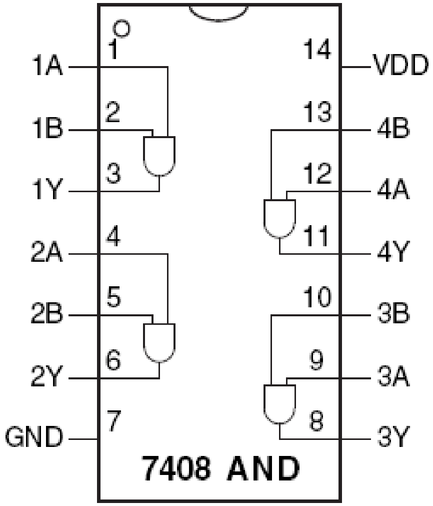
Schéma logique de la fonction majorité:

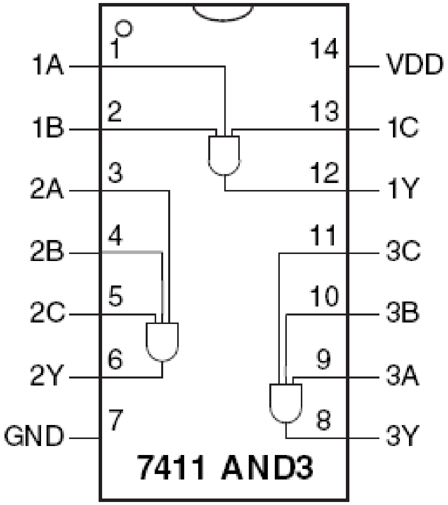
F(A,B,C) = $\overline{A}.B.C + A.\overline{B}.C + A.B.\overline{C} + A.B.C$

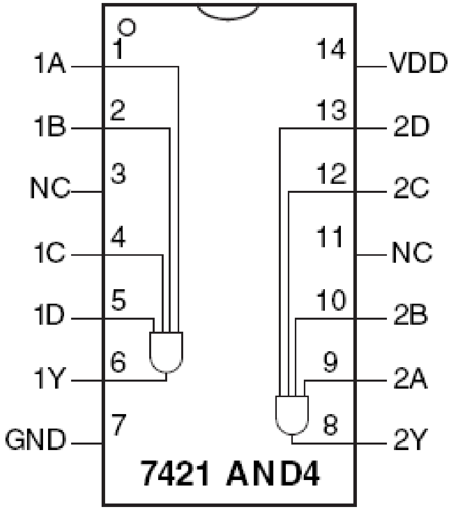


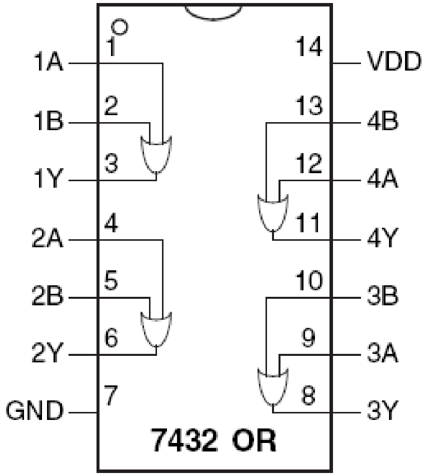
Algèbre de Boole: *Circuits MSI Portes logiques.*

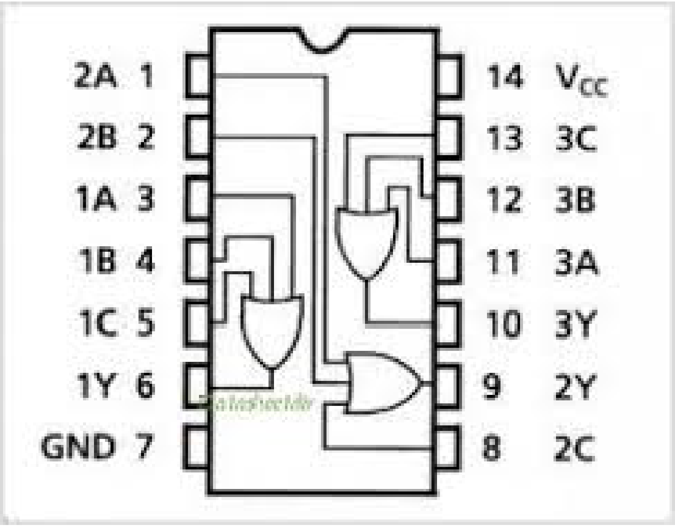












Algèbre de Boole:

Somme de produits ou produit de sommes.

La fonction $F(A,B,C) = \overline{A}.B.C + A.\overline{B}.C + A.B.\overline{C} + A.B.C$ est appelée ***somme de produits***.

Les produits $\overline{A}.B.C$, $A.\overline{B}.C$, $A.B.\overline{C}$ et $A.B.C$ sont appelés les ***mintermes***.

Un minterme est un produit logique qui comporte toutes les variables ou leurs compléments.
Si on numérote les mintermes, il y a une autre forme plus condensée pour exprimer une fonction. Exemple $f(A,B,C) = \Sigma\ (3, 5, 6, 7)$.

Il existe une autre forme d'expression de la fonction , celle dite ***produit de sommes*** où ces sommes sont appelées des ***maxtermes***.
Cette dernière forme peut être obtenue de la table de vérité en ajoutant une colonne $\overline{F}(A,B,C)$. Puis on écrit l'expression de F(A,B,C) sous forme de somme de produits. Puis on applique une des lois de De Morgan.

Algèbre de Boole:

Produit de sommes.

A	B	C	$F(A,B,C)$	$\overline{F}(A,B,C)$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

$$\overline{F}(A,B,C) = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.B.\overline{C} + A.\overline{B}.\overline{C}$$

$$\overline{\overline{F}}(A,B,C) = \overline{\overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.B.\overline{C} + A.\overline{B}.\overline{C}} = (\overline{\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}}).(\overline{\overline{A}.\overline{B}.C}).(\overline{\overline{A}.B.\overline{C}}).(\overline{A.\overline{B}.\overline{C}})$$

$F(A,B,C) = (A+B+C).(A+B+\overline{C}).(A+\overline{B}+C).(\overline{A}+B+C)$ produit de sommes.

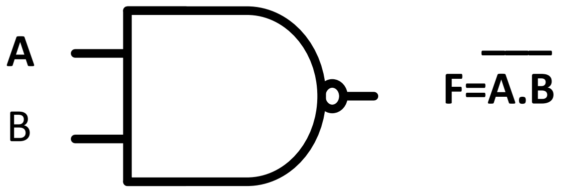
Algèbre de Boole:

Opérateurs NON-ET (NAND) et NON-OU (NOR).

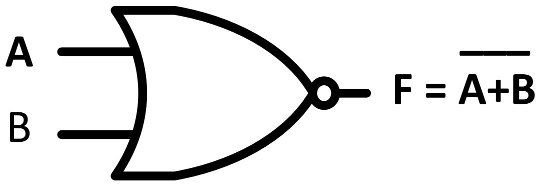
- $F = \overline{A.B} = (A \mid B)$, $F = \overline{A+B} = (A \downarrow B)$, se lisent (A NAND B), (A NOR B).
- **Leurs tables de vérité et leurs symboles logiques.**

A	B	$F = \overline{A.B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	$F = \overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



$F=\overline{A.B}$



$F = \overline{A+B}$

Les opérateurs NAND et NOR peuvent avoir plus de deux entrées.

Algèbre de Boole:

Opérateurs NON-ET (NAND) et NON-OU (NOR).

- Les opérateurs NAND et NOR sont commutatifs mais non associatifs.
- De même que le groupe (ET, OU, NON) a permis d’écrire n’importe quelle expression Booléenne (on dit que ET, OU, NON constituent un groupe complet), le NAND à lui tout seul et le NOR à lui tout seul constituent chacun un groupe complet

En effet chacun des opérateurs du groupe (ET, OU, NON) peut s’exprimer au moyen de NAND exclusivement ou de NOR exclusivement.

$\overline{A} = \overline{A.A} = (A \mid A).$

$\overline{A} = \overline{A+A} = (A \downarrow A).$

$A.B = \overline{\overline{A.B}} = \overline{(A \mid B)} = (A \mid B) \mid (A \mid B).$

$A.B = \overline{\overline{A.B}} = \overline{(\overline{A}) + (\overline{B})} = (\overline{A} \downarrow \overline{B}) = (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B).$

$A + B = \overline{\overline{A + B}} = \overline{(\overline{A}).(\overline{B})} = (\overline{A} \mid \overline{B}) = (A \mid A) \mid (B \mid B).$

$A+B = \overline{\overline{A+B}} = \overline{(A \downarrow B)} = (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B).$

Algèbre de Boole:

Les opérateurs OU Exclusif (XOR) NON OU exclusif (XNOR).

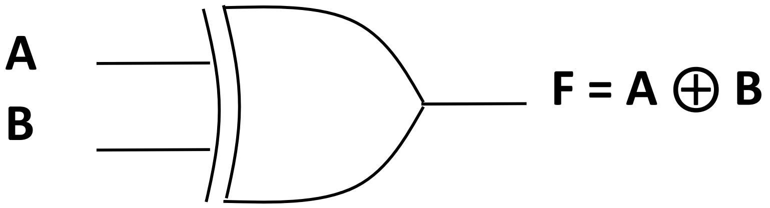
$F = A \oplus B = A.\overline{B} + \overline{A}.B$, se lit (A ou exclusif B).

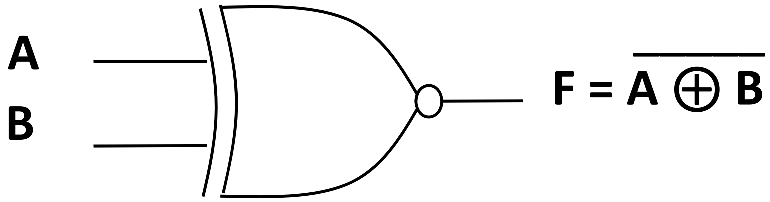
$F = \overline{A \oplus B} = A.B + \overline{A}.\overline{B}$, se lit (A ou exclusif B, complémenté).

- Leurs tables de vérité et leurs symboles logiques.

A	B	$F = A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	$F = \overline{A \oplus B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1





Algèbre de Boole:

L’ opérateur OU Exclusif (XOR), propriétés.

- L’addition modulo 2 est une application directe du ou exclusif.
- Le ou exclusif complémenté est à la base de la comparaison entre deux nombres.
- Le ou exclusif peut servir pour crypter: **$(m \oplus k) \oplus k = m$**
  m étant le message à crypter, k la clé de cryptographie.
- $x \oplus x = 0$
- $X \oplus 1 = /x$ (x barre)

Algèbre de Boole:

Simplification des fonctions logiques.

Pourquoi minimiser les fonctions logiques?

Moins de composants signifie moins d'espace, moins de consommation et ***coût moindre***.

L'idée est, partant de l'équation brute tirée de la table de vérité, arriver à une expression algébrique contenant moins de produits (cas de somme de produits) ou moins de sommes (cas de produit de sommes) et dans chacun des termes, moins de variables.

Il existent diverses méthodes, parmi lesquelles:

- ***La méthode algébrique.***
- ***La méthode utilisant les tableaux de Karnaugh.***

Algèbre de Boole:

Méthode algébrique.

1) Méthode algébrique.

Consiste principalement à employer et tirer profit des théorèmes fondamentaux de l'algèbre de Boole, sans démarche systématique.

Des règles, comme les suivantes, peuvent servir à simplifier:

$$A + A + \ldots + A = A$$

$$A + A.B = A$$

$$A + \overline{A}.B = A + B$$

$$A.B + \overline{A}.B = B$$

$$(A + B).(A + \overline{B}) = A$$

$$A.(A + B) = A$$

$$A.(\overline{A} + B) = A.B$$

Algèbre de Boole:

Méthode algébrique.

- *Exemple 1: idempotence*

Reprenons la fonction majorité donnée précédemment:

$F(A,B,C) = \overline{A}.B.C + A.\overline{B}.C + A.B.\overline{C} + A.B.C$

On peut l’écrire comme suit:

$F(A,B,C) = \overline{A}.B.C + A.B.C + A.\overline{B}.C + A.B.C + A.B.\overline{C} + A.B.C$

$F(A,B,C) = B.C(\overline{A} + A) + A.C.(\overline{B} + B) + A.B.(\overline{C} + C)$

Ce qui donne:

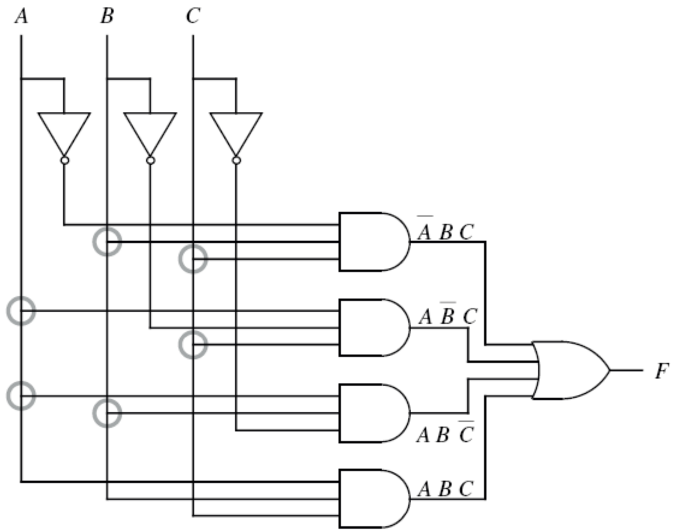
$F(A,B,C) = A.B + B.C + A.C$

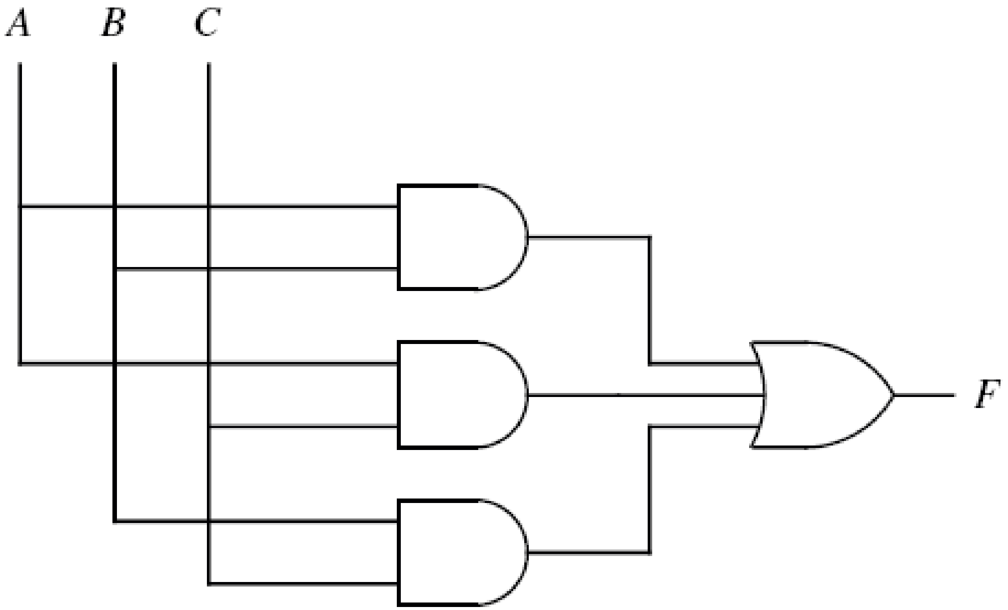
Algèbre de Boole:

Méthode algébrique.

Ce qui donne le circuit suivant:

A comparer à celui-ci-contre de la dernière fois.





Algèbre de Boole:

Méthode algébrique.

- *Exemple 2: regroupement de termes.*

$$ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}CD = AB(C + \overline{C}) + A\overline{B}CD$$
$$= AB + A\overline{B}CD$$
$$= A(B + \overline{B}(CD))$$
$$= A(B + CD)$$
$$= AB + ACD$$

- *Exemple 3: parfois il est avantageux de rechercher le complément de la fonction.*

$$F(A, B, C) = \sum(1,3,4,5,6,7)$$
$$\overline{F(A, B, C)} = \sum(0,2) = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C}$$
$$= \overline{A}.\overline{C}(\overline{B} + B)$$
$$= \overline{A}.\overline{C} = \overline{A + C}$$
$$F(A, B, C) = \overline{\overline{F(A, B, C)}} = \overline{\overline{A + C}} = A + C$$

Algèbre de Boole:

Méthode tabulaire, tableau de Karnaugh.

Cette méthode exploite l’identité $A.X + A\overline{X} = A$
Elle consiste à mettre en évidence par un procédé graphique tous les termes produits d’une fonction qui ne diffèrent que par l’état d’une seule variable: Termes dits ADJACENTS.

les deux produits $\overline{x}y\overline{z}t$ et $\overline{x}y\overline{z}\overline{t}$ sont adjacents.

car ils ne diffèrent que par t.

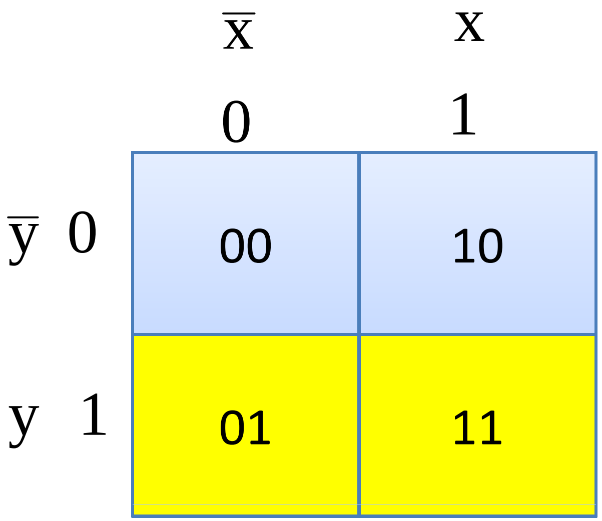
on a : $\overline{x}y\overline{z}t + \overline{x}y\overline{z}\overline{t} = \overline{x}y\overline{z}.(t + \overline{t}) = \overline{x}y\overline{z}$

Si une fonction dépend de n variables, elle a au plus 2^n mintermes (produits). Chaque minterme est représenté par une case d’un tableau, construit de telle manière que les lignes soient adjacentes entre elles et les colonnes adjacentes entre elles.

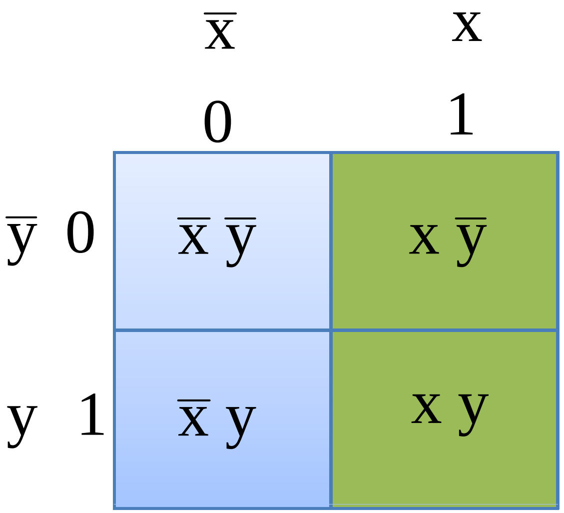
Algèbre de Boole:

Méthode tabulaire, tableau de Karnaugh.

Construction de tableau d'une fonction à deux variables.



	$\bar{x}$ 0	x 1
$\bar{y}$ 0	00	10
y 1	01	11

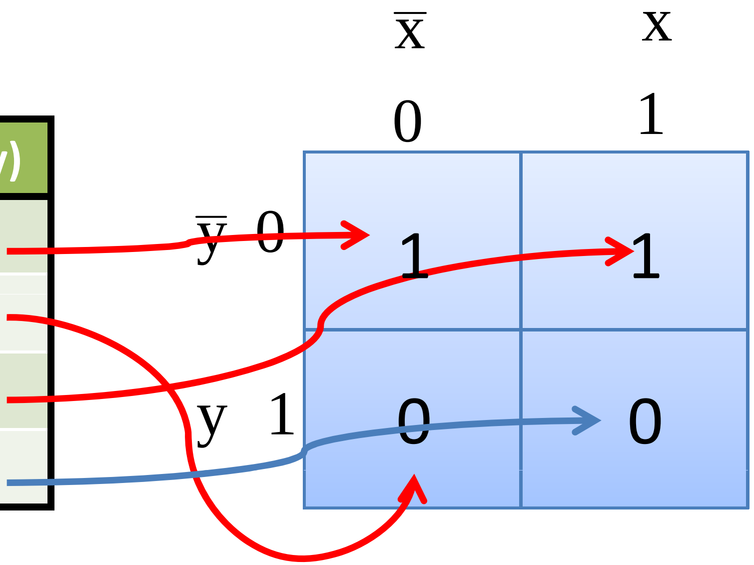


	$\bar{x}$ 0	x 1
$\bar{y}$ 0	$\bar{x}\,\bar{y}$	$x\,\bar{y}$
y 1	$\bar{x}\,y$	$x\,y$

Exemple:

$$F(x,y)=\bar{x}.\bar{y}+x.\bar{y}$$

x	y	F(x,y)
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

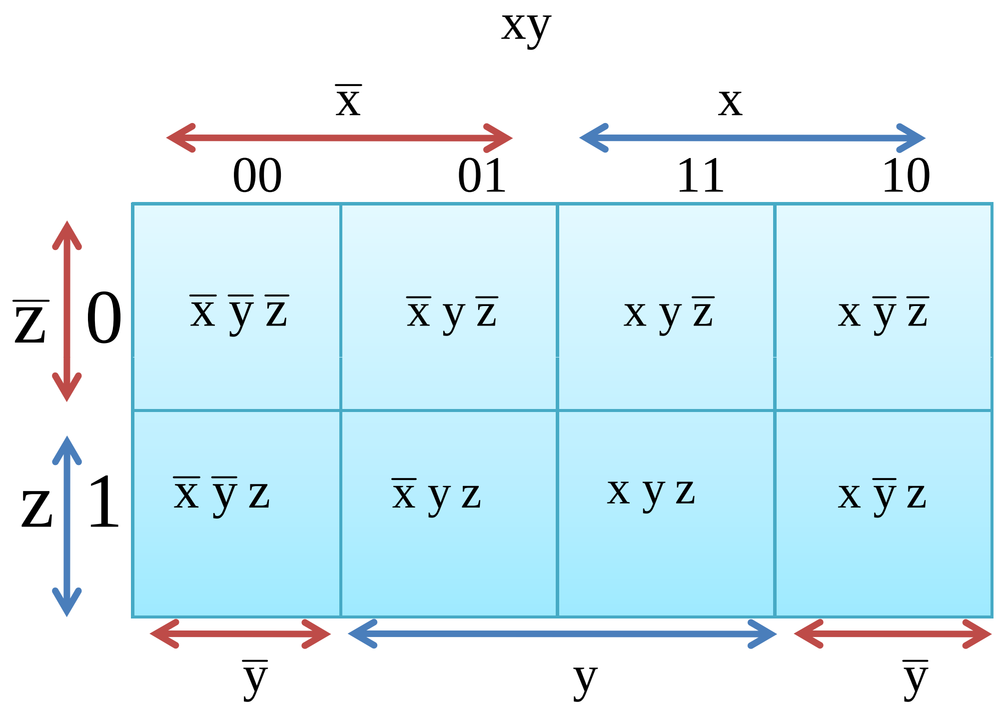


	$\bar{x}$ 0	x 1
$\bar{y}$ 0	1	1
y 1	0	0

Algèbre de Boole:

Méthode tabulaire, tableau de Karnaugh.

Construction de tableau d'une fonction à trois variables.



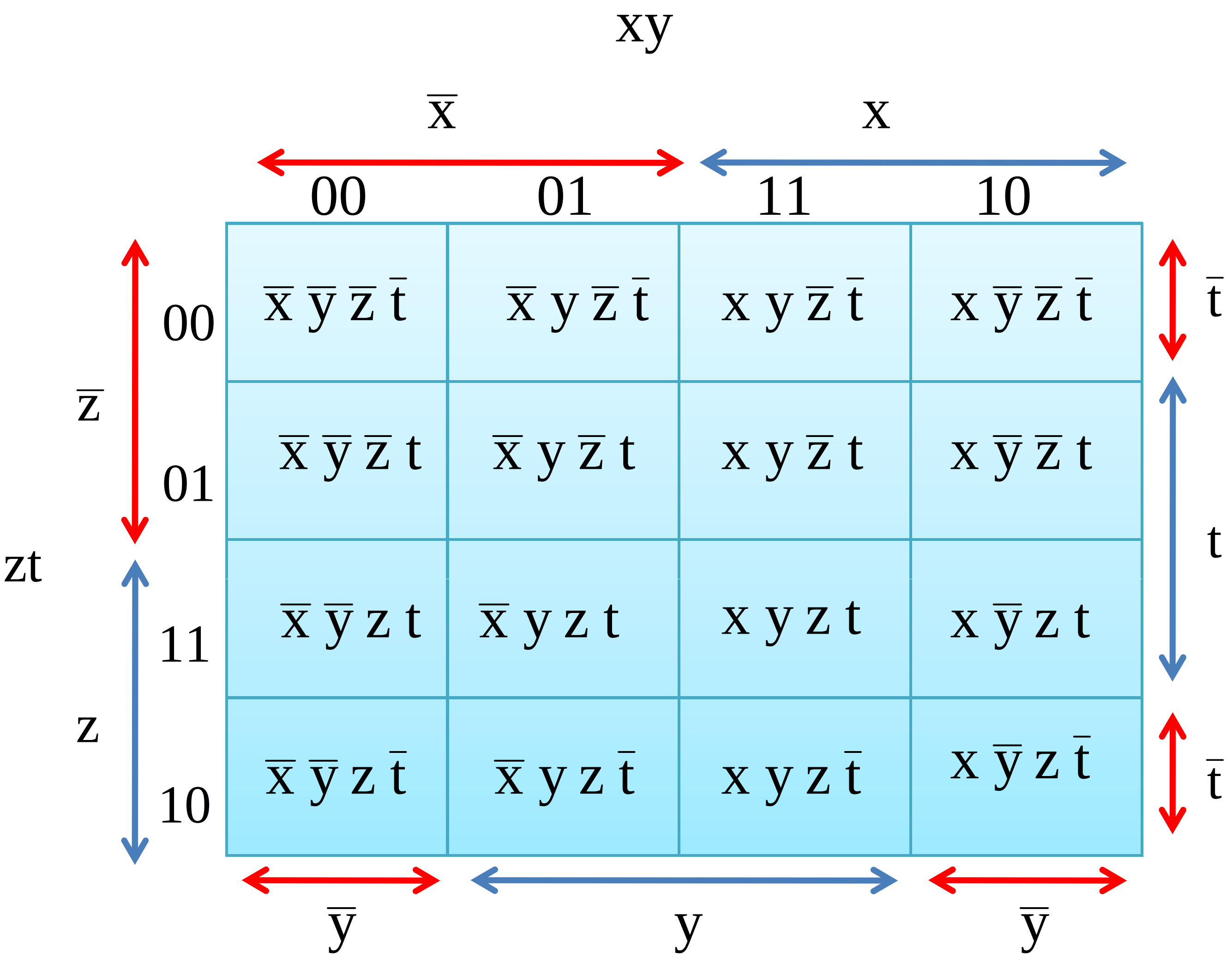
	00	01	11	10
0	$\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$	$\bar{x}\,y\,\bar{z}$	$x\,y\,\bar{z}$	$x\,\bar{y}\,\bar{z}$
1	$\bar{x}\,\bar{y}\,z$	$\bar{x}\,y\,z$	$x\,y\,z$	$x\,\bar{y}\,z$

On vérifie qu'on passe d'une colonne à la suivante en ne changeant qu'une seule variable.
Ceci est également valable pour les lignes.

Algèbre de Boole:

Méthode tabulaire, tableau de Karnaugh.

*Construction de tableau d'une fonction à **quatre** variables.*



	00	01	11	10
00	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t}$	$\overline{x}\,y\,\overline{z}\,\overline{t}$	$x\,y\,\overline{z}\,\overline{t}$	$x\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t}$
01	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,t$	$\overline{x}\,y\,\overline{z}\,t$	$x\,y\,\overline{z}\,t$	$x\,\overline{y}\,\overline{z}\,t$
11	$\overline{x}\,\overline{y}\,z\,t$	$\overline{x}\,y\,z\,t$	$x\,y\,z\,t$	$x\,\overline{y}\,z\,t$
10	$\overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{t}$	$\overline{x}\,y\,z\,\overline{t}$	$x\,y\,z\,\overline{t}$	$x\,\overline{y}\,z\,\overline{t}$

On vérifie qu'on passe d'une colonne à la suivante en ne changeant qu'une seule variable.

Ceci est également valable pour les lignes.

Algèbre de Boole:

Méthode tabulaire, tableau de Karnaugh.

Passage de la table de vérité au tableau de Karnaugh.

Ce passage consiste à écrire les "1" de la TV dans les cases correspondantes du TK

x	y	z	t	F(x,y,z,t)
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

	xy			
zt	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	1
11	0	0	0	1
10	1	0	0	1

Tableau de Karnaugh de F(x,y,z,t).

Algèbre de Boole:

Méthode tabulaire, tableau de Karnaugh.

La Methode de Karnaugh.

- ***On transforme la TV en un TK.***
- ***On s'intéresse aux cases peuplées de "1".***
- ***On essaye de constituer des groupement de cases adjacentes contenant le maximum de termes possibles: d'abord 16, puis 8, puis 4, puis 2, puis 1.***
- ***On doit utiliser tous les termes.***
- ***Les mêmes termes peuvent participer à plus de un groupement.***
- ***L'expression finale est la somme logique (OU) des groupements trouvés.***

Algèbre de Boole:

Méthode tabulaire, tableau de Karnaugh.

Exemple 1:

Le groupement des quatre "1" donne:

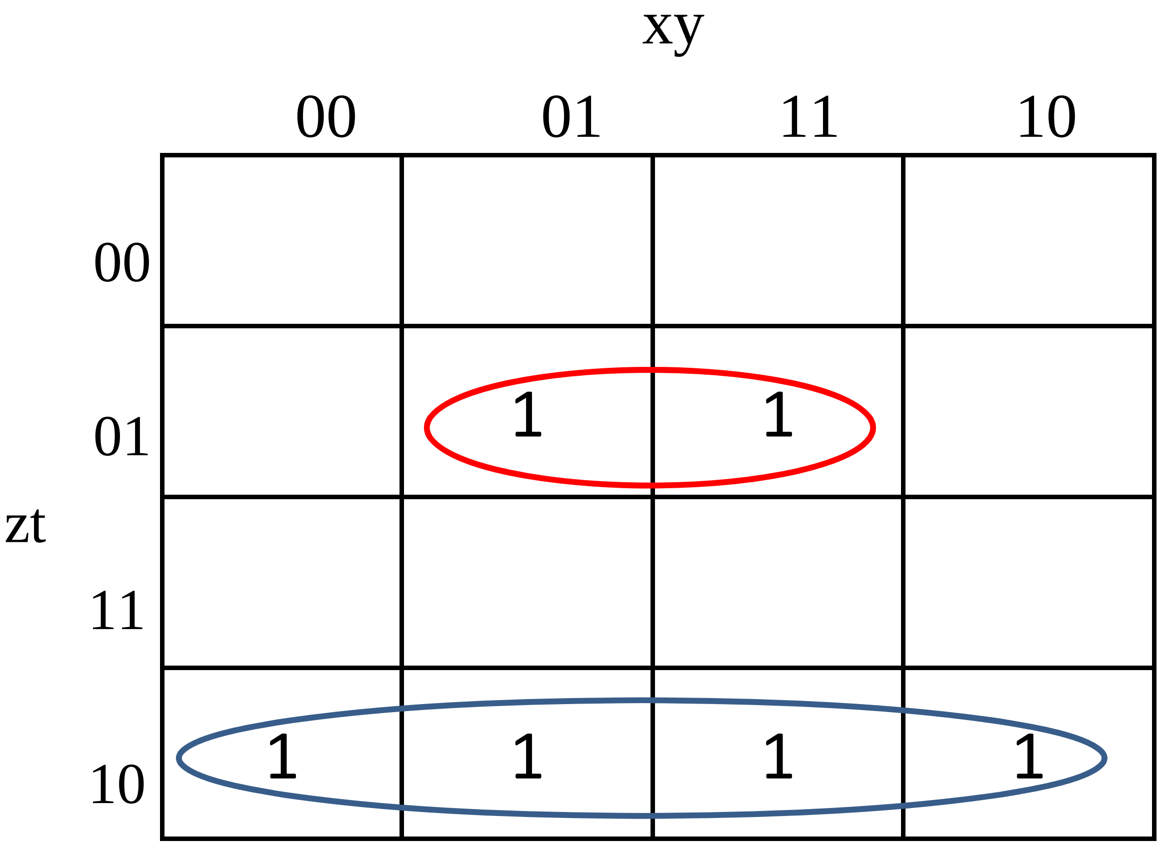
$z\,\bar{t}$

Le groupement des deux "1" donne:

$y\,\bar{z}\,t$

Donc la fonction simplifiée est

$z\,\bar{t} + y\,\bar{z}\,t$



zt \ xy	00	01	11	10
00				
01		1	1	
11				
10	1	1	1	1

Algèbre de Boole:

Méthode tabulaire, tableau de Karnaugh.

Exemple 2:

Le groupement des quatre "1" du centre donne: $y\,t$

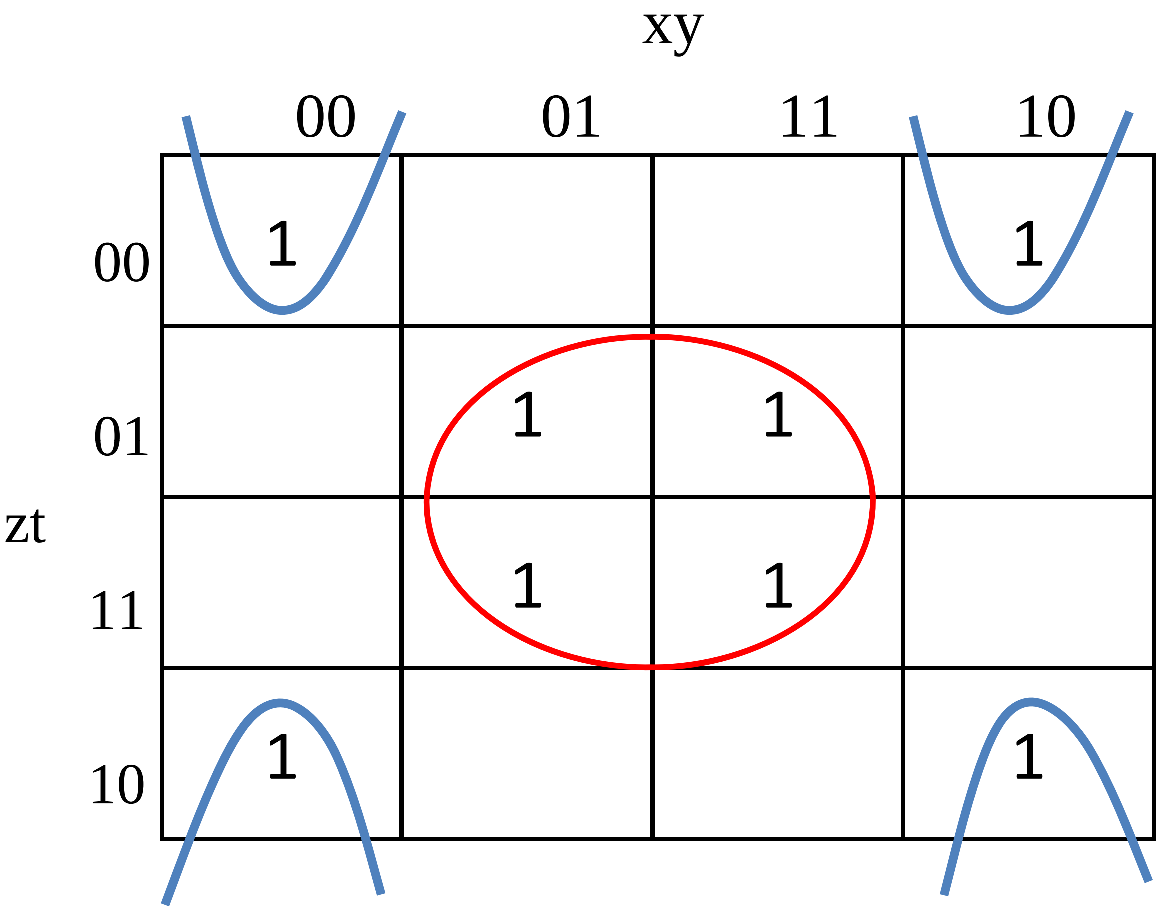
Le groupement des quatre "1" des coins donne: $\bar{y}\,\bar{t}$

Donc la fonction simplifiée est:

$$y\,t + \bar{y}\,\bar{t}$$

Ce qui peut encore s'écrire:

$$\overline{\mathbf{y} \oplus \mathbf{t}}$$



	00	01	11	10
00	1			1
01		1	1	
11		1	1	
10	1			1

Algèbre de Boole:

Méthode tabulaire, tableau de Karnaugh.

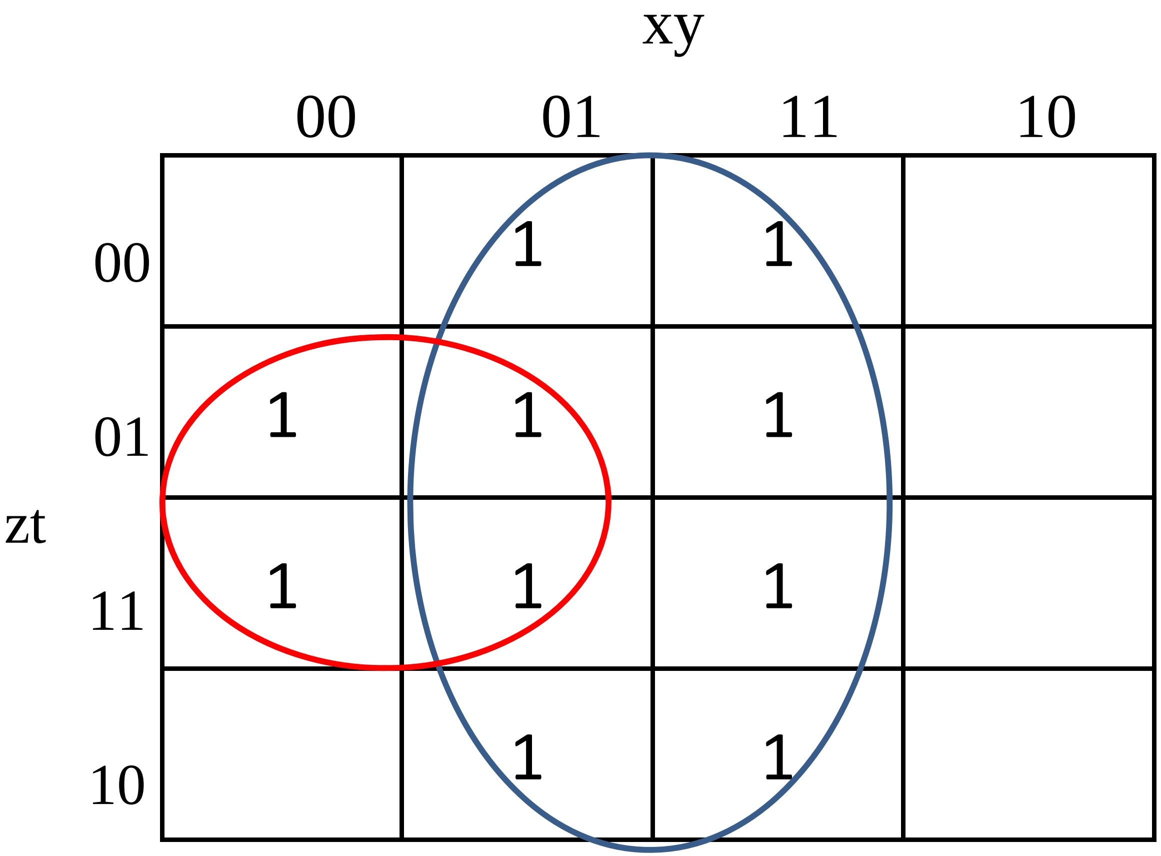
Exemple 3:

Le groupement des huit "1" du centre donne: y

Le groupement des quatre "1" donne: $\overline{x}\, t$

Donc la fonction simplifiée est:

$$y + \overline{x}\, t$$

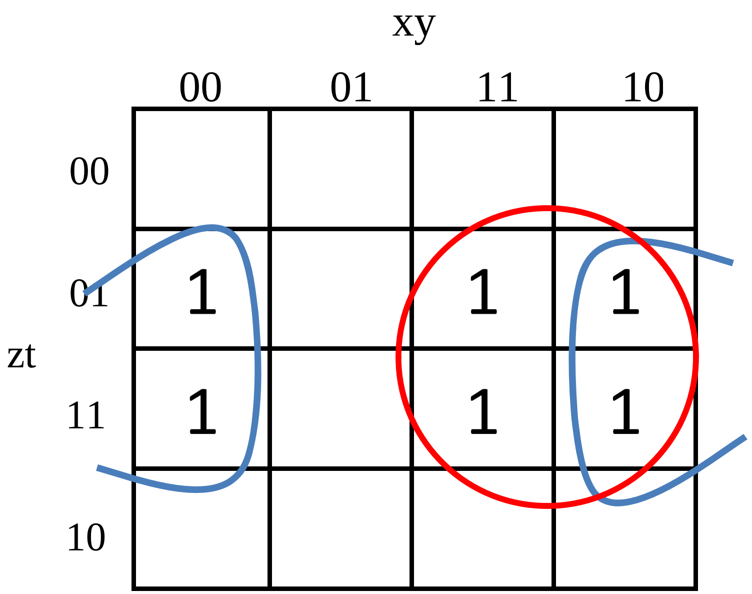


zt \ xy	00	01	11	10
00		1	1	
01	1	1	1	
11	1	1	1	
10		1	1	

Algèbre de Boole:

Méthode tabulaire, tableau de Karnaugh.

Exemple 4:

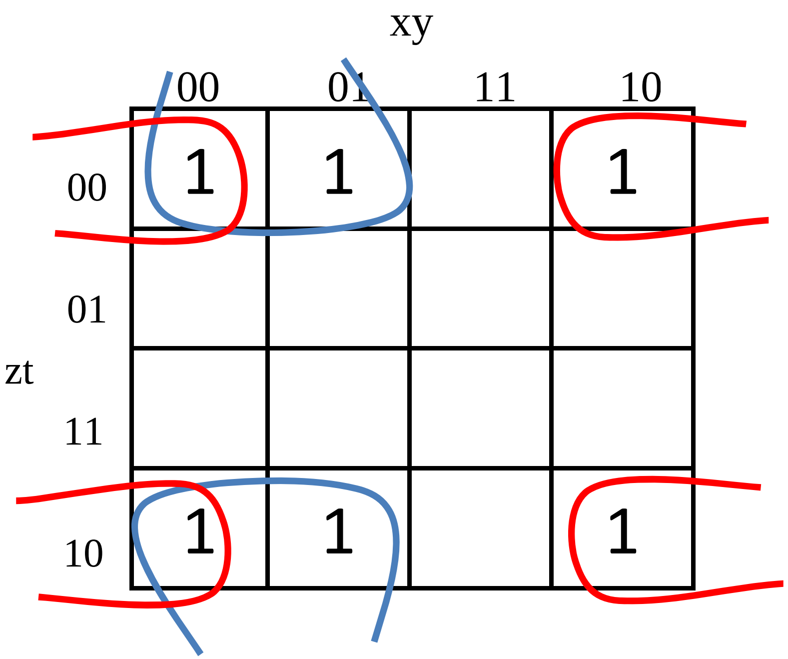


	00	01	11	10
00				
01	1		1	1
11	1		1	1
10				

$x\,t + \overline{y}\,t$

🟥 🟦

Exemple 5:



	00	01	11	10
00	1	1		1
01				
11				
10	1	1		1

$\overline{x}\,\overline{t} + \overline{y}\,\overline{t}$

🟥 🟦

Algèbre de Boole:

Méthode tabulaire, tableau de Karnaugh.

Exemple 6:

xy

zt	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	1		1

$$\overline{x} + t + \overline{y}$$

Exemple 7:

xy

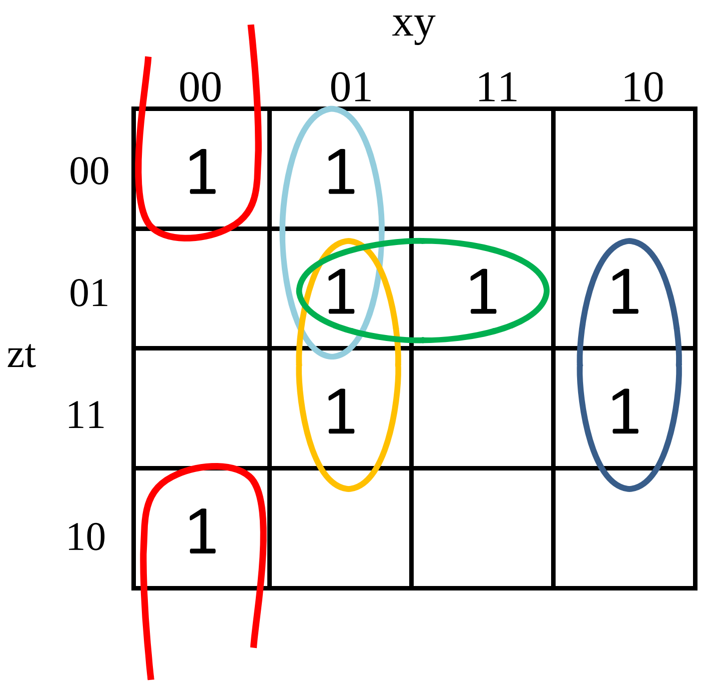
zt	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$$f(x, y, z, t) = 1$$

Algèbre de Boole:

Méthode tabulaire, tableau de Karnaugh.

Exemple 8:

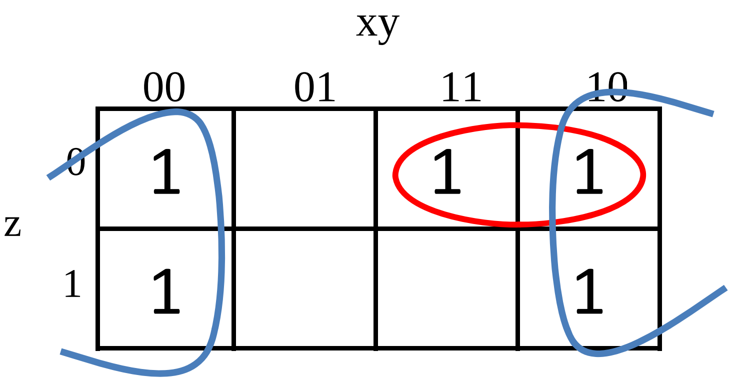


zt \ xy	00	01	11	10
00	1	1		
01		1	1	1
11		1		1
10	1			

$$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{t} + x\,\overline{y}\,t + y\,\overline{z}\,t + \overline{x}\,y\,t + \overline{x}\,y\,\overline{z}$$

🟥 🟦 🟩 🟨 🟦

Exemple 9:



z \ xy	00	01	11	10
0	1		1	1
1	1			1

$$\overline{y} + x\,\overline{z}$$

Algèbre de Boole:

Méthode tabulaire, tableau de Karnaugh.

Tableau de Karnaugh à 5 variables:

Ce qui est indiqué dans les cases c'est les numéros des mintermes.

abc

de	000	001	011	010
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

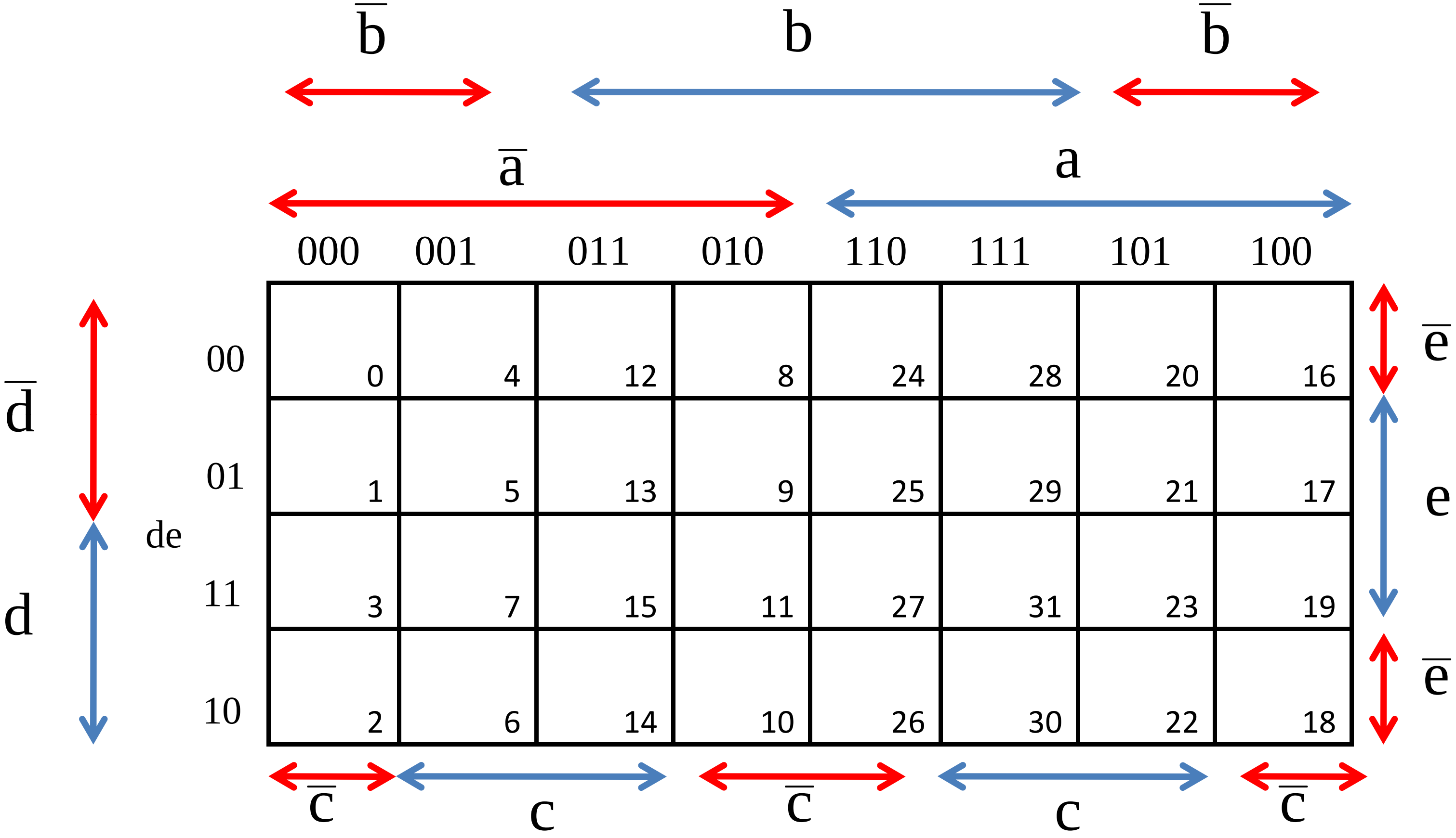
abc

de	110	111	101	100
00	24	28	20	16
01	25	29	21	17
11	27	31	23	19
10	26	30	22	18

Algèbre de Boole:

Méthode tabulaire, tableau de Karnaugh.

Tableau de Karnaugh à 5 variables



	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	4	12	8	24	28	20	16
01	1	5	13	9	25	29	21	17
11	3	7	15	11	27	31	23	19
10	2	6	14	10	26	30	22	18

Les mintermes ou min termes.

Programmable Array Logic (PAL)

Réseaux logiques programmables