E.P.S.T. d'Oran.

2011-2012.

Epreuve de synthèse

Module : Algèbre 4. Durée 02h30

Exercice 1 *(05 pts).*

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de base $B = (u, v, w)$ avec $u = (1, 0, 1, 0)$, $v = (0, 1, -1, 0)$ et $w = (0, 2, 3, 1)$. Déterminer une base orthonormale de F.

Exercice 2 *(07 pts).*

On considère sur l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ la forme f définie par

$$\forall P, Q \in E \ , \ f(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

1. Montrer que f est un produit scalaire sur E et déterminer sa matrice dans la base canonique.
2. Montrer que l'application $p : P(X) \to P(-X)$ est une symétrie orthogonale par rapport à un sous espace vectoriel de E que l'on précisera.

Indication : Rappelons qu'une symétrie orthogonale est un endomorphisme orthogonal (i.e. $\|p(P)\| = \|P\|$) involutif (i.e. $p \circ p = p$).

Exercice 3 *(04 pts).*

Soit A une matrice réelle définie par

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 *(04 pts).*

Soient E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension n, $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale de F. Montrer que

$$\forall x \in E \ , \ d^2(x, F) = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} < x, e_i >^2 \ .$$

Indication : Utiliser $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.