E.P.S.T. d'Oran.

2011-2012.

Epreuve de synthèse

Module : Algèbre 3. Durée 03h00

Exercice 1 *(03 pts).*

Soit f un endomorphisme défini sur un K-espace vectoriel E ayant une valeur propre nulle.

1. f est-il bijectif ?
2. Donner le sous-espace propre de f associé à la valeur propre nulle.

Exercice 2 *(05 pts).*

Utiliser la réduction d'endomorphisme pour résoudre le système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u' & = & 5u - 3v + 6e^{3t} + 1 \\ v' & = & 6u - 6v + 4e^{3t} + 3 \end{array}\right. , \ t \in \mathbb{R}.$$

<u>Indication</u> : Commencer par résoudre le système homogène.

Exercice 3 *(04 pts).*

Soit q une forme quadratique défnie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ q(x, y, z) = x^2 - y^2 + 2yz - 4xz.$$

Effectuer la réduction de q en carrés. Donner le rang et la signature de q.

Exercice 4 *(04 pts).*

Soient E un K-espace vectoriel et b une forme bilinéaire sur $E \times E$. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que

$$(F_1 + F_2)^{\perp} = F_1^{\perp} \cap F_2^{\perp}.$$

Exercice 5 *(04 pts).*

Soient E, F deux K-espaces vectoriels de même dimension n, $n \in \mathbb{N}^*$. Soit b une forme bilinéaire non dégénérée sur $E \times F$. Montrer que, pour toute base $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ de E, il existe une base $B' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ de F telle que

$$\forall i, j \in \{1, ..., n\}, b(e_i, e'_j) = \delta^i_j$$

où δ^i_j désigne le symbole de Kronecker.
<u>Indication</u> : Considérer l'application $I_b : E \to F^*$. ■

ECOLE PRÉPARATOIRE EN SCIENCES ET TECHNIQUES D'ORAN

CORRECTION ÉPREUVE DE SYNTHÈSE ALGÈBRE

EX01 :

1) Etant donne que 0_E est valeur propre de f, il admet un vecteur propre $x \in E,\ x \neq 0_E$ tel que $f(x) = 0$ $x = 0_E$
   donc $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$, f n'est pas injectif.

2) E(0)=Ker f.

EX02 :

On pose $A=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$. Alor $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

On note $U= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ On a donc le système homogène
$U'=AU$ qui devient $W' = DW$ D'où la solution du système homogène est :

$$\begin{cases} u(t) = ce^{-4t} + 3de^{3t} & ,t \in IR. \\ v(b) = 3ce^{-4t} + 2de^{3t} \end{cases}$$

On fait varier les constantes et on remplace dans notre système. On obtient la solution

$$\begin{cases} u(t) = \alpha e^{-4t} + 3\beta e^{3t} + 6te^{3t} + \frac{1}{4} & \alpha, \beta \in IR \\ v(t) = 3\alpha e^{-4t} + 2\beta e^{3t} + 4te^{3t} + \frac{3}{4} \end{cases}$$

EX03

$q(x, y, z) = (x - 2z)^2 - (y - z)^2 - 3z^2$ donc rang $q = 3$

sign $q = (1,2)$

EX 04 :

Soit $x \in (F_1 + F_2)^{\perp}$, alors $x \in F_1^{\perp}$ et $x \in F_2^{\perp}$ en particulier d' ou $x \in F_1^{\perp} \cap F_2^{\perp}$.

Réciproquement, soit $x \in F_1^{\perp} \cap F_2^{\perp}$ Soit $y \in F_1 + F_2$

$y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in F_1$ et $y_2 \in F_2$ On a $b(x, y_1)=0$ et $b(x, y_2)=0$

Donc $b(x,y) = b(x,y_1) + b(x,y_2) = 0, \quad x \in (F_1 + F_2)^{\perp}$.

EX 05 :

Comme b est non dégénérée alors I_b est injective et puisque $\dim E = \dim F$, On a I_b un isomorphisme.

Soit $\acute{B} = (\acute{e}_i, \dots, \acute{e}_n)$ une base de F. On a par définition

$$I_b(e_i)(\acute{e}_j) = b(e_i, \acute{e}_j), \forall\, i, j = 1, \dots, n$$

Pour que $\acute{B}$ vérifie l'énnoncé de l'exercice il faut et il suffit qu'elle vérifie :
$I_b(e_i)(\acute{e}_j)\delta_i^j, \forall\, i, j = 1, \dots n$

$(I_b(e_i))_{i=1,\dots,n}$ Est la base duale de $\acute{B}$

Donc $\acute{B}$ existe et elle est unique.