الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Ecole préparatoire en sciences et techniques d'Oran

2 ème Année

Le11\12\2011

Module : Analyse

Devoir surveille n° 01

Exercice 1: Calculer l'intégrale double

$$\iint_{x\leq x^2+y^2\leq 1} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

Exercice 2: Calculer les coordonnées de centre de gravité du domaine:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1;\ x\geq 0;\quad y\geq 0\ \ et\ \ z\geq 0\right\};$$

où a, b et c désignent des réels strictement positifs.

Exercice 3: Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_0 \in]0,\pi[$ et $u_{n+1} = \sin u_n$, pour $n\geq 0$.

1- Etudier la convergence de (u_n).

2- Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1. Calculer la limite de $\frac{u_{n+1}+u_n}{u_n}$

3- Déterminer la $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}-u_n}{{u_n}^3}$.

4- En déduire que $\frac{1}{{u_{n+1}}^2}-\frac{1}{{u_n}^2}$ tend vers 1/3.

5- Montrer que l'on a $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\,u_n = \sqrt{3}$.

Exercice 4: Etudier la nature de série $\sum_{n\geq 2} v_n$ avec

$$v_n = \frac{1+\frac{1}{2}\cdots+\frac{1}{n}}{\ln(n!)}.$$

BONNE CHANCE

ECOLE PRÉPARATOIRE SCIENCES ET TECHNIQUES D'ORAN

CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ D'ANALYSE

*Exercice : n° 01

$$\iint_{x \leq x^2+y^2 \leq 1} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

-On fait un changement de variable plaire :

$$\begin{cases} X= r\cos\theta & 0 \leq r_1 < r < r_2 \\ Y= r\sin\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

-Donc $r\cos\theta \leq r^2 \leq 1 \Rightarrow r = 0$ <u>ou</u> $\cos\theta < r < 1$

Si $\cos\theta > 0$ <u>alors</u> $\cos\theta < r < 1$

Si $\cos\theta < 0$ <u>alors</u> $0 < \underbrace{\cos\theta}_{\text{Négative}} < r < 1$

-Soit $J = \iint_{x \leq x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\, dx\, dy$

$= \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} f(r,\theta)\, dr\, d\theta$

$= 2[\int_{r_1}^{r_2} \int_0^{\pi} f(r,\theta) jaco(r,\theta)\, dr\, d\theta]$

$= 2[\int_{\cos\theta}^{1} (\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r}{(1+r^2)^2} d\theta)dr + \int_0^1 (\int_{\frac{\pi}{2}(}^{\pi} \frac{r}{(1+r^2)^2} d\theta)dr]$

$= 2[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{-1}{(1+r^2)2}\right]_{\cos\theta}^{1} d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[\frac{-1}{(1+r^2)2}\right]_0^1 d\theta]$

$= [\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{1+\cos^2\theta} - \frac{1}{2})d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2} d\theta]$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos^2\theta} d\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\boldsymbol{\theta}}+1} \frac{d\boldsymbol{\theta}}{\cos^2\boldsymbol{\theta}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\tan^2\boldsymbol{\theta}} (\tan\boldsymbol{\theta})'$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+2} \, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\Big]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

*Exercice n° 02

$$\iiint dx\, dy\, dz$$

$$P = \{(x.y.z) \in IR^3 \ (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{d})^2 + (\frac{z}{c})^2 \leq 1 \qquad x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \ ; \ z \geq 0\}$$

-On fait un changement de variable sphérique :

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = r\cos\theta\cos\varphi & 0 \leq r \leq R \\ \frac{y}{b} = r\cos\theta\sin\varphi & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \frac{z}{c} = r\sin\theta & -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$x \geq 0$ et $y \geq 0; \ z \geq 0$

Alors $0 \leq r \leq 1$ et $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

$$x_a = \frac{\int_D xf(x,y,z)dx\, dz\, dy}{\int_D f(x,y,z)dx\, dy\, dz}$$

$$x_a = \frac{\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta\cos\varphi \text{ jaco } (r.\theta.\varphi) dr\, d\theta\, d\varphi}{\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\, b\, c\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi}$$

$$y_a = \frac{\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cos\theta \cos\varphi \ \text{jaco}\,(r.\theta.\varphi) dr\, d\theta\, d\varphi}{\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\, b\, c\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi}$$

$$z_a = \frac{\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sin\theta \ \text{jaco}\,(r.\theta.\varphi) dr\, d\theta\, d\varphi}{\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\, b\, c\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi}$$

<u>*Exercice n ° 3</u> :

$u_n = \sin u_n$

1)- La suite $u_n \to 0$ **lorsque** $n \to +\infty$

2)- Puisque $u_n \to 0$ **donc** $\sin u_n \underset{\infty}{\sim} u_n$

-D'où $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sin\ u_n}{u_n} \sim 1$

-Ceci implique $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n + u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2u_n}{u_n} = 2$

3)- On a $\underset{n \to +\infty}{u_n \to 0}$

-Par développement limité de $\sin u_n$ **quand n tend vers** $+\infty$

$$u_{n+1} = \sin u_n = u_n - \frac{u_n^3}{6} + 0(u_n^3)$$

-On déduit que

$$u_n - u_{n+1} = \frac{u_n^3}{6} + 0(u_n^3)$$

-D'où $\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^3} = \frac{1}{6} + 0(1)$

4)- $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{u_n^2 - u_{n+1}^2}{u_n^2 u_{n+1}^2} = \frac{(u_n - u_{n+1})((u_n + u_{n+1})}{u_n^2 u_{n+1} u_{n+1}} = \frac{1}{6} \text{X } 2 = \boxed{\frac{1}{3}}$

5)- $\sum_{n=1}^{n} \left[\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right] \underset{n \to +\infty}{\to} \sum_1^N \frac{1}{3} = \frac{N}{3}$

***<u>Exercice n°4</u>**

-**On a** $1 + \frac{1}{2} + \text{-----------} + \frac{1}{n} \geq l_n\,(n+1)$

-Et $l_n\ (n!) = l_n\ (1) + \text{-------------} + l_n\,(n) \leq n\, l_n\ n$

-donc $\frac{1}{l_n\,(n!)} \geq \frac{1}{n\ l_n\ n}$

$$\Rightarrow \frac{1+\frac{1}{2}+--+\frac{1}{n}}{l_n\,(n!)} \geq \frac{l_n\,(n+1)}{n\ l_n\ n} \simeq \frac{1}{n}\ (\textbf{Terme d'une serie diverge})$$

Alors $\sum \frac{1+\frac{1}{2}+---+\frac{1}{n}}{l_n\,(n!)}$ **Diverge d'après le critère de comparaison**