Ecole Préparatoire en Sciences et Techniques d'Oran — Année 2011/2012
1ière année EPSTO — Durée 1h45

Devoir Surveillé d'Analyse I

Exercice 1.(06pts)
I. Que pensez-vous des assertions suivantes (vraies ou fausses)? Justifiez votre réponse.

1. Soit A une partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$. Si $M = \sup A$ alors $M \in A$.
2. $(U_n)_n$, $(V_n)_n$ convergentes et $U_n \leq W_n \leq V_n$ alors $(W_n)_n$ converge.
3. Si f est dérivable à droite et à gauche de x_0 alors elle dérivable en x_0.
4. Si $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction k-Lipschizienne (vérifiant $\forall x, x' \in I$: $|f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|$, $k > 0$) alors elle est uniformément continue sur I.

II. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer

$$\forall x > 0, \ \sin x \leq x$$

Exercice 2.(05pts) Soient A et B deux parties non vides et minorées de $\mathbb{R}$. Montrer

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

où $A + B = \{a + b;\ a \in A \text{ et } b \in B\}$.

1. Soient $A = \{1\}$ et $B = \left\{\dfrac{-n}{n+1};\ n \in \mathbb{N}\right\}$. Déterminer $\inf A$ et $\inf B$.

2. En déduire la borne inférieure de l'ensemble $C = \left\{\dfrac{1}{n+1};\ n \in \mathbb{N}\right\}$

Exercice 3.(05pts) Soient les deux suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ définies par:

$$\begin{cases} 0 < U_0 < V_0 \\ U_n = \sqrt{U_{n-1}V_{n-1}},\ n \geq 1 \\ V_n = \dfrac{U_{n-1} + V_{n-1}}{2}. \end{cases}$$

i) En calculant $V_n^2 - U_n^2$, montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n \geq U_n > 0$.

ii) Montrer que $(U_n)_n$ est croissante et majorée et que $(V_n)_n$ est décroissante et minorée.

iii) En déduire que $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ convergent vers la même limite.

Exercice 4.(04pts) Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, telles que $f(0) = g(1) = 0$ et $f(1) = g(0) = 1$. Montrer que pour tout $\lambda \geq 0$, il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = \lambda g(c)$

Indication: Considérer la fonction $h_\lambda(x) = f(x) - \lambda g(x)$.

Ecole Préparatoire en Sciences et Techniques d'Oran — Année 2011/2012
1ière année EPSTO — Durée 1h45

Correction du Devoir Surveillé d'Analyse I

Exercice 1.(06pts)

1. **Fausse:** contre exemple $A = [0,1[$, $\sup A = 1$ et $1 \notin A$............**sur 01pt**
2. **Fausse:** contre exemple $U_n = -1$, $V_n = 1$ sont convergentes et $U_n \leq W_n = (-1)^n \leq V_n$ et $(W_n)_n$ est divergente......**sur 01pt**
3. **Fausse:** contre exemple $f(x) = |x|$ est dérivable à droite et à gauche de 0 mais elle est pas dérivable en 0...........**sur 01pt**.
4. **Vraie:** $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta = \dfrac{\varepsilon}{k} > 0$, $\forall x, x' \in I$, $|x - x'| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| \leq k|x - x'| < k\dfrac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$...........**sur 01,5pt**

II. La fonction $f(t) = \sin t$ est continue sur $[0, x]$ $(x > 0)$ et dérivable sur $]0, x[$.....**sur 0,5pt.**

Applique le théorème des accroissements finis sur f dans l'intervalle $[0, x]$ donne $\exists c \in]0, x[$ tel que

$$\sin x = \sin x - \sin 0 = (x - 0)\cos c = x \cos c \leq x\text{........}\textbf{sur 01pt}$$

Exercice 2.(05pts) La caractérisation du inf A et inf B donne:

$$\begin{cases} \forall a \in A; \ \inf A \leq a \\ \forall \varepsilon > 0, \ \exists a_1 \in A; \ \ a_1 < \inf A + \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases} \text{....}\textbf{sur 0,5pt}$$

$$\begin{cases} \forall b \in A; \ \inf B \leq b \\ \forall \varepsilon > 0, \ \exists b_1 \in A; \ \ b_1 < \inf B + \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases} \text{....}\textbf{sur 0,5pt}$$

Alors on a:

$$\begin{cases} \forall c \in A + B; \ \inf A + \inf B \leq c = a + b \\ \forall \varepsilon > 0, \ \exists c_1 = a_1 + b_1 \in A + B; \ \ c_1 < \inf A + \inf B + \varepsilon \end{cases} \text{....}\textbf{sur 0,5pt}$$

1. $\inf A = 1$ .....**sur 0,5pt**

et $\inf B = -1$ en effet;.$\forall n \in \mathbb{N}$

$$n \leq n + 1 \Longrightarrow x_n = \frac{-n}{n+1} \geq -1 \text{ donc } \forall x_n \in B; \ -1 \leq x_n\text{......}\textbf{sur 0,5pt}$$

et la caractérisationde la borne inférieure

$$\forall \varepsilon > 0; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}?, \ \ \frac{-n_\varepsilon}{n_\varepsilon + 1} < -1 + \varepsilon$$

$$\frac{-n_\varepsilon}{n_\varepsilon + 1} < -1 + \varepsilon \Leftrightarrow n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

$$\text{Il suffit de prendre } n_\varepsilon = \left[\left|\frac{1}{\varepsilon} - 1\right|\right] + 1\text{......}\textbf{sur 01,5pt}$$

2. On remarque que $C = A + B$.....**sur 0,5pt**

On déduit que

$$\inf C = \inf A + \inf B = 1 - 1 = 0 \text{......} \textbf{sur 0,5pt}$$

Exercice 3.(05pts)

i) $0 < U_0 < V_0$,En calculant

$$\begin{aligned} V_n^2 - U_n^2 &= \frac{U_{n-1}^2 + V_{n-1}^2 + 2U_{n-1}V_{n-1}}{4} - U_{n-1}V_{n-1} \\ &= \frac{U_{n-1}^2 + V_{n-1}^2 - 2U_{n-1}V_{n-1}}{4} \\ &= \frac{(U_{n-1} - V_{n-1})^2}{4} \geq 0 \\ &\Rightarrow V_n \geq U_n > 0 \text{.......} \textbf{sur 01,5pt} \end{aligned}$$

ii) Montrons que $(U_n)_n$ est croissante que $(V_n)_n$ est décroissante:

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_nV_n} - U_n = \frac{U_nV_n - U_n^2}{\sqrt{U_nV_n} + U_n} = \frac{U_n(V_n - U_n)}{\sqrt{U_nV_n} + U_n} \geq 0 \text{....} \textbf{sur 0,5pt}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n + V_n}{2} - V_n = \frac{U_n - V_n}{2} \leq 0 \text{....} \textbf{sur 0,5pt}$$

$$U_0 \leq ... \leq U_{n-2} \leq U_{n-1} \leq U_n \leq V_n \leq V_{n-1} \leq V_{n-2} \leq ... \leq V_0$$

Ceci montre que $(U_n)_n$ est majorée par V_0.....**sur 0,5pt** et que $(V_n)_n$ est minorée par U_0....**sur 0,5pt.**

On déduit d'après le théorème de convergente des suites monotones que $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont convergentes......**sur 0,5pt.**

iii) On suppose $\lim_{n\to+\infty} U_n = l_1$ et $\lim_{n\to+\infty} V_n = l_2$. On passe à la limite dans l'égalité, on trouve

$$l_2 = \frac{l_1 + l_2}{2} \Rightarrow l_1 = l_2 \text{.....} \textbf{sur 01pt}$$

Exercice 4.(04pts) La fonction $h_\lambda(x) = f(x) - \lambda g(x)$ est continue sur $[0,1]$ comme somme de deux fonctions continues pour tout $\lambda \geq 0$....**sur 0,5pt.**

$h_\lambda(0) = f(0) - \lambda g(0) = 0 - \lambda = -\lambda \leq 0$ et $h_\lambda(1) = f(1) - \lambda g(1) = 1 \geq 0$.....**sur 01pt.**

$h_\lambda(0)\, h_\lambda(1) \leq 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires $\exists c \in [0,1]$, $h_\lambda(c) = 0$....**sur 02pt.**

$$h_\lambda(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = \lambda g(c) \text{....} \textbf{sur 0,5pt}.$$