

Examen d'Analyse 1ère Année - 1er Semestre - (2011/2012)
Durée 2h30mn

Avertissement : Documents et calculatrices non autorisés.

Exercice 1

1) Soient a, b deux nombres réels quelconques :

Montrer que

$$|a| + |b| \leq |a+b| + |a-b|$$

2) Déterminer (lorsqu'ils existent) $\text{Sup}(A)$, $\text{Inf}(A)$, $\text{Max}(A)$, $\text{Min}(A)$, $\text{Sup}(B)$, $\text{Inf}(B)$, $\text{Max}(B)$, $\text{Min}(B)$, où

$$A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n+2}, \text{ avec } n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}, \quad |x^2 - 2x - 3| \leq 2\}$$

Exercice 2

On considère la suite numérique (U_n) définie par son premier terme $U_0 = \sqrt{2}$ et

$$U_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{U_n}} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n < 2$$

2) Montrer que (U_n) est convergente.

3) Montrer que sa limite l appartient à l'intervalle $]\frac{7}{4}; 2[$

Exercice 3

Soient les suites (U_n) et (V_n) définies par

$$U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 1, \text{ avec } U_0 = 1; \quad V_n = \sum_{k=0}^{k=n} e^{(-5k)}$$

1) Calculer U_2 et V_2 .

2) Déterminer les expressions de U_n et V_n en fonction de n .

3) En déduire la nature de chacune des suites (U_n) et (V_n) .

Barème :

Exercice 1 : 1) 2 pts

2) 4 pts (0,5ptx8).

Exercice 2 : 1) 2 pts

2) 3 pts .

3) 2 pts.

Exercice 3 : 1) 1 pt (0,5pt+0,5pt)

2) 4 pts (2pts+2pts).

3) 2pts (1pt+1pt).