

## امتحان في الجبر

التمرين الأول: (4.5 نقاط)

لتكن  $(G, .)$  زمرة عنصرها الحيادي  $e$  وتحقق:  $\forall x \in G: x^3 = e$   
برهن أنه من أجل كل  $(x, y) \in G * G$  لدينا :

1)  $x^2 . y . x^2 = y^2 . x . y^2$

2)  $x . y^2 . x = y . x^2 . y$

3)  $(x . y)^2 = y^2 . x^2$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نزود  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  بالعمليتين الداخليتين  $+$  و  $.$  التاليتين :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$(a, b) . (a', b') = (aa', 0)$$

- برهن أن  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, .)$  حلقة تبديلية.

- أوجد قواسم الصفر.

التمرين الثالث: (3.5 نقاط)

نقول أن الحلقة  $(G, +, .)$  أنها بولية إذا حققت الشرط:  $\forall x \in G: x^2 = x$  برهن أن :

أ-  $\forall x \in G, x = -x$

ب-  $\forall (x, y) \in G * G: x . y . (x + y) = 0$

ت-  $(P(E), \Delta, \cap)$  حلقة بولية حيث  $E$  مجموعة ما.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر  $P$  حلقة تبديلية ولتكن  $H$  مجموعة العناصر معدومة القوة في  $P$  أي أن :

$$H = \{x \in P: \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n = 0\}$$

1- برهن أن  $H$  هي مثالية في  $P$ .2- نعتبر الحلقة  $P = \left( \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, +, . \right)$ أ- برهن أن  $k$  يولد الحلقة  $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$   $\Leftrightarrow n$  و  $k$  أوليان فيما بينهما.ب- من أجل  $n = 12$ , ماهي العناصر القابلة للقلب للعناصر معدومة القوة و متساوية القوة.

ج- استخرج جميع المثاليات الحقيقية.