Module de Biophysique

ELECTRICITE ET BIOELECTRICITE

dipôle – conducteurs et condensateurs

quelques éléments et notions à retenir

Professeur M. CHEREF

Département de Médecine Dentaire

Faculté de Médecine - Université ALGER 1

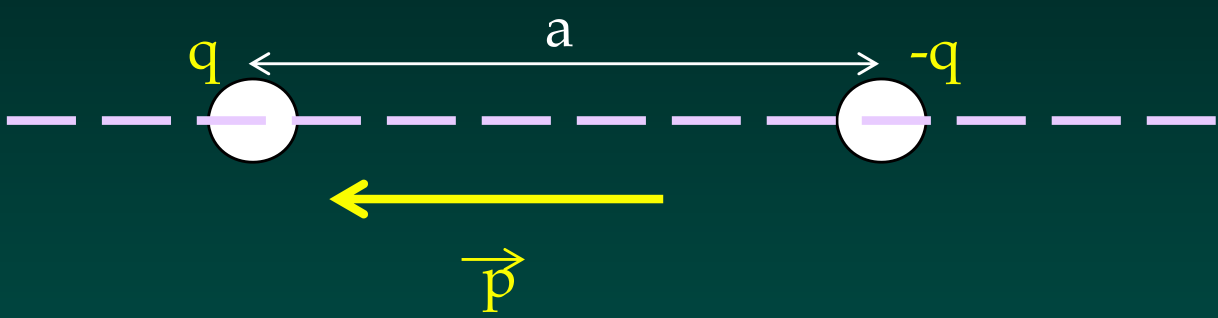
A- Electrostatique

VII– Dipôle électrique (1)

- Définition

Un dipôle électrique : deux charges q et q' égales et de signes contraires séparées par une distance a

$q > 0$

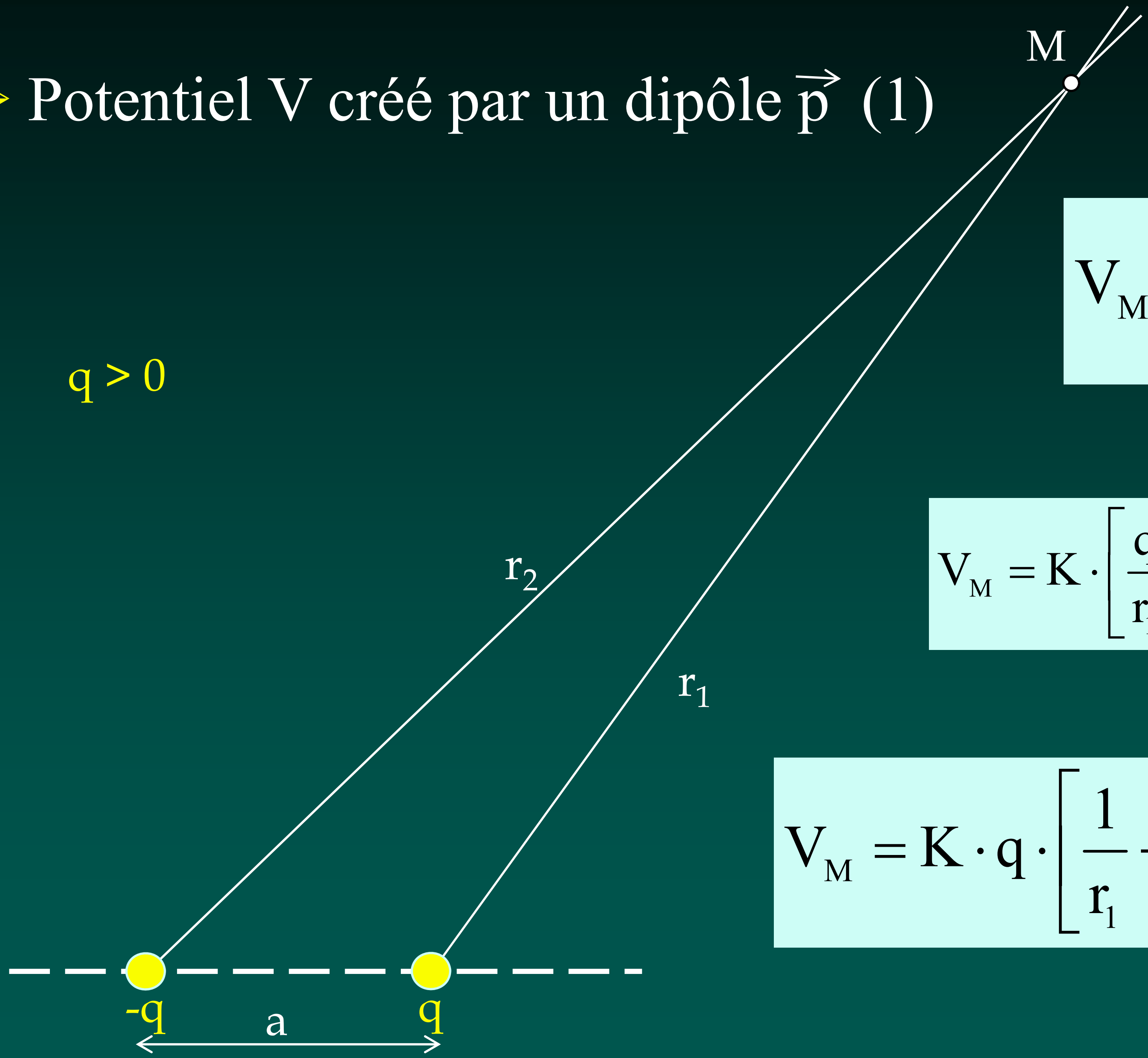


- Moment dipolaire $\vec{p}$

$$\boxed{\vec{p} = q \cdot \vec{a}}$$

VII– Dipôle électrique (2)

- Potentiel V créé par un dipôle $\vec{p}$ (1)



$$V_M = K \cdot \frac{q}{r_1} + K \cdot \frac{(-q)}{r_2}$$

$$\Downarrow$$

$$V_M = K \cdot \left[\frac{q}{r_1} + \frac{(-q)}{r_2} \right] = K \cdot \left[\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right]$$

$$\Downarrow$$

$$V_M = K \cdot q \cdot \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] = K \cdot q \cdot \left[\frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2} \right]$$

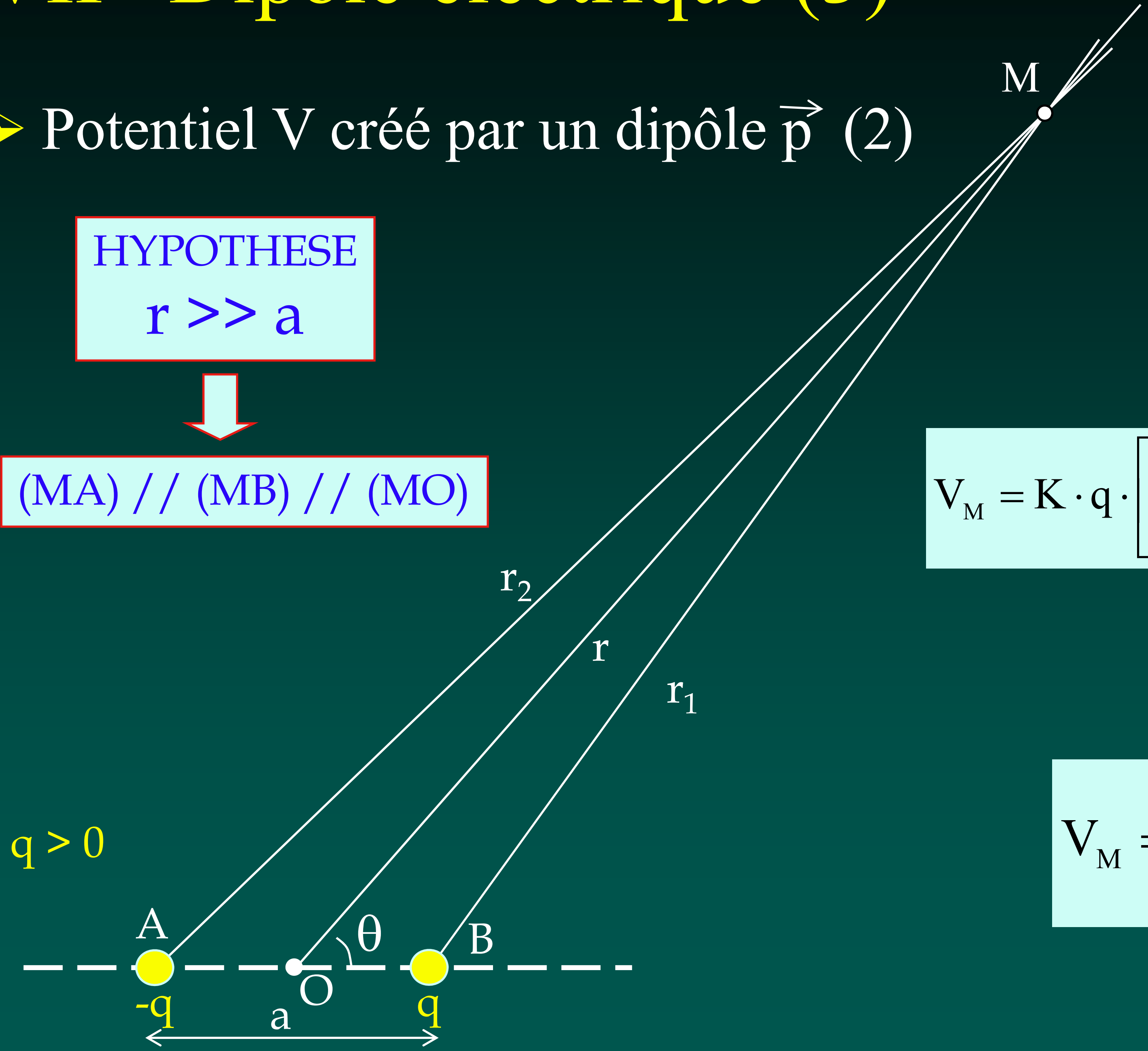
VII– Dipôle électrique (3)

- Potentiel V créé par un dipôle $\vec{p}$ (2)

HYPOTHESE

$r >> a$

(MA) // (MB) // (MO)



$$V_M = K \cdot q \cdot \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] = K \cdot q \cdot \left[\frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2} \right]$$

$$V_M = K \cdot q \cdot \left[\frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2} \right]$$

VII– Dipôle électrique (4)

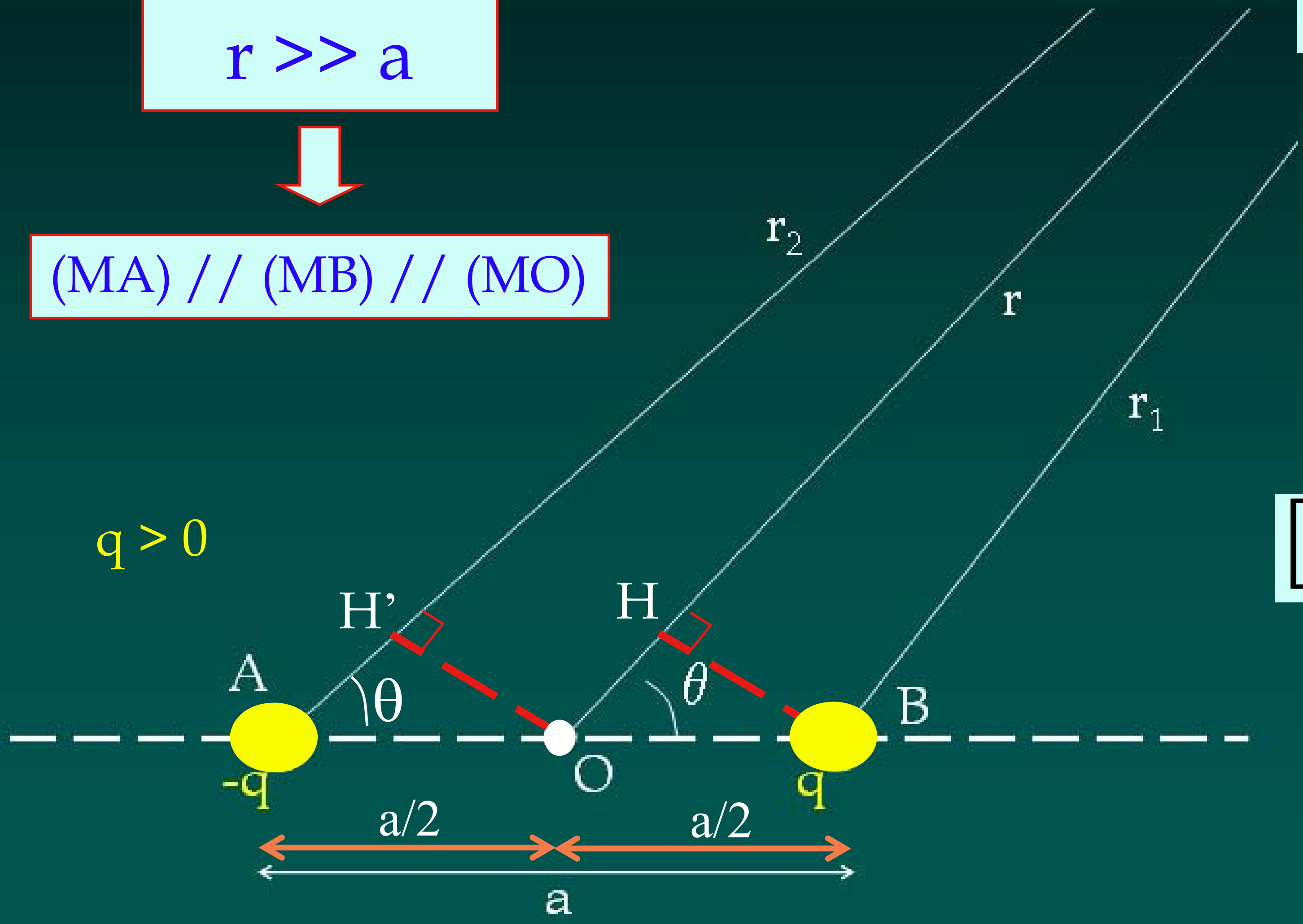
$$V_M = K \cdot q \cdot \left[\frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2} \right]$$

- Potentiel V créé par un dipôle $\vec{p}$ (3)

HYPOTHESE
$r >> a$

⇓

(MA) // (MB) // (MO)



$$[BM] = [OM] - [OH]$$

⇓

$$r_1 = r - \frac{a}{2} \cdot \cos\theta$$

$$[AM] = [OM] + [AH']$$

⇓

$$r_2 = r + \frac{a}{2} \cdot \cos\theta$$

VII– Dipôle électrique (5)

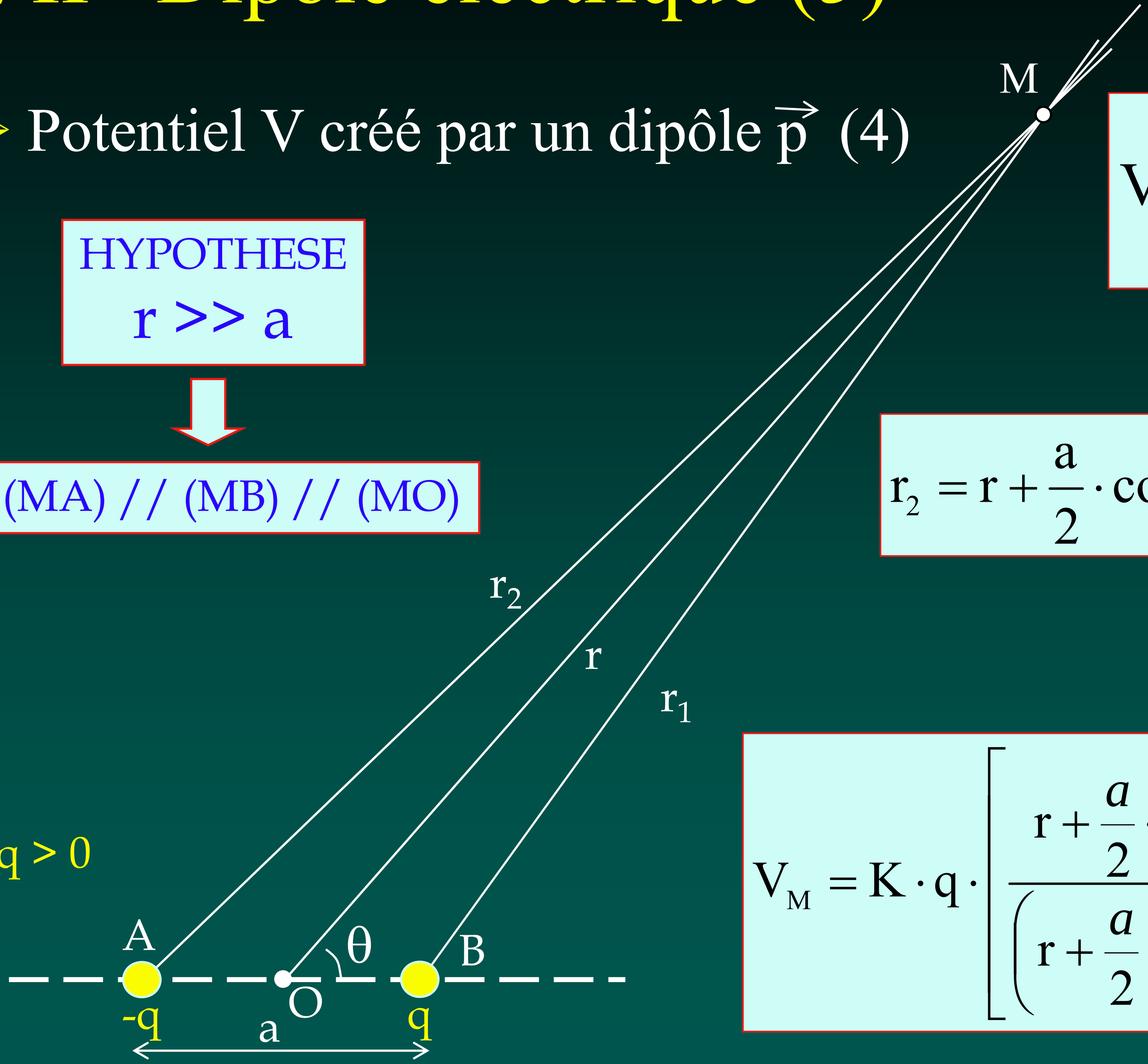
➢ Potentiel V créé par un dipôle $\vec{p}$ (4)

HYPOTHESE

$r >> a$

⇓

(MA) // (MB) // (MO)



$$V_M = K \cdot q \cdot \left[\frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2} \right]$$

et

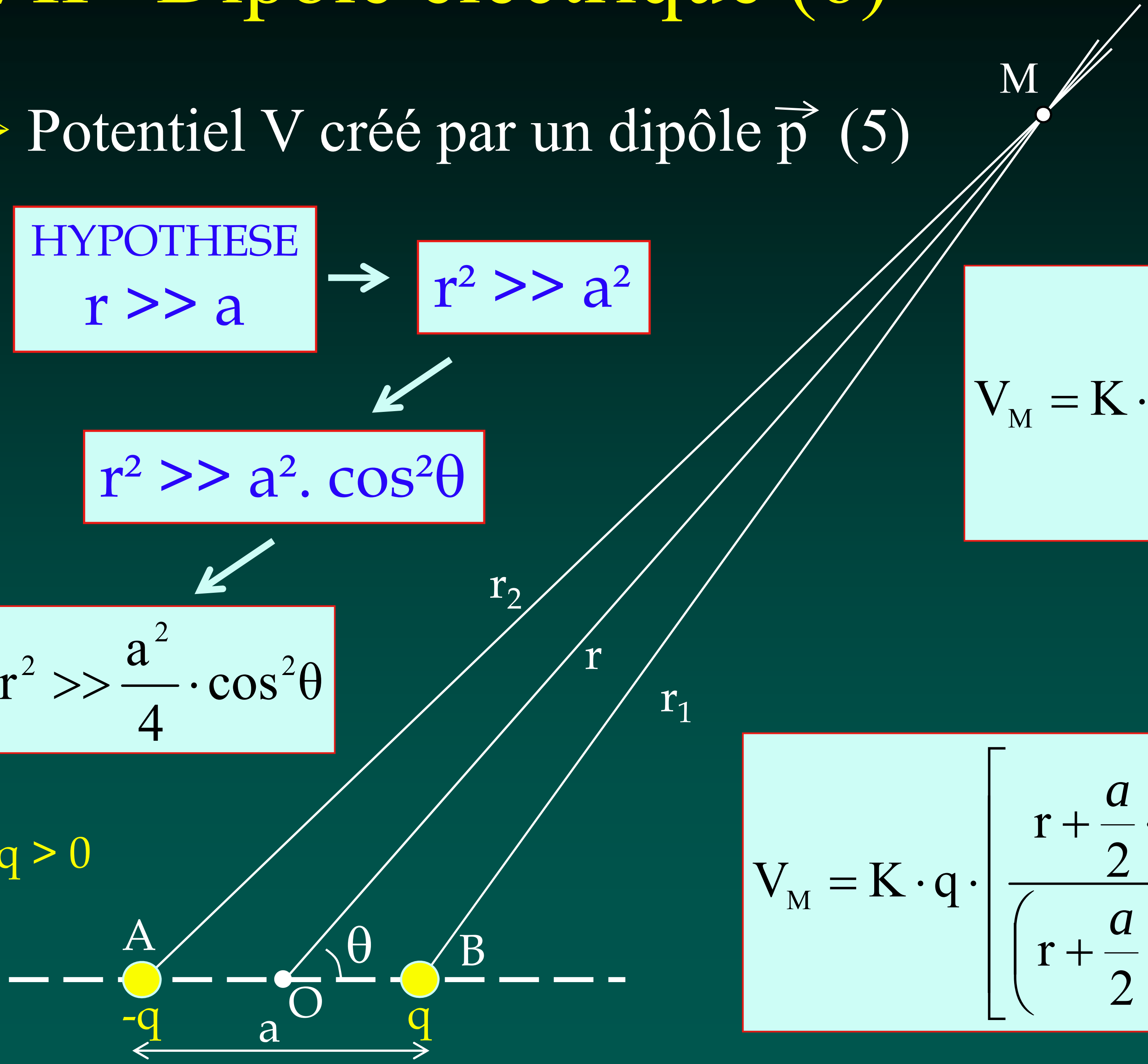
$$r_2 = r + \frac{a}{2} \cdot \cos\theta \qquad r_1 = r - \frac{a}{2} \cdot \cos\theta$$

⇓

$$V_M = K \cdot q \cdot \left[\frac{r + \frac{a}{2} \cdot \cos\theta - (r - \frac{a}{2} \cdot \cos\theta)}{\left(r + \frac{a}{2} \cdot \cos\theta \right) \cdot \left(r - \frac{a}{2} \cdot \cos\theta \right)} \right]$$

VII– Dipôle électrique (6)

- Potentiel V créé par un dipôle $\vec{p}$ (5)



HYPOTHESE
r >> a

→ $r^2 >> a^2$

$r^2 >> a^2 . \cos^2\theta$

$$r^2 >> \frac{a^2}{4}\cdot\cos^2\theta$$

$$V_M = K\cdot q\cdot\left[\frac{r+\frac{a}{2}\cdot\cos\theta-(r-\frac{a}{2}\cdot\cos\theta)}{\left(r+\frac{a}{2}\cdot\cos\theta\right)\cdot\left(r-\frac{a}{2}\cdot\cos\theta\right)}\right]$$

$$V_M = K\cdot q\cdot\left[\frac{a\cdot\cos\theta}{r^2-\frac{a^2}{4}\cdot\cos^2\theta}\right]$$

VII– Dipôle électrique (7)

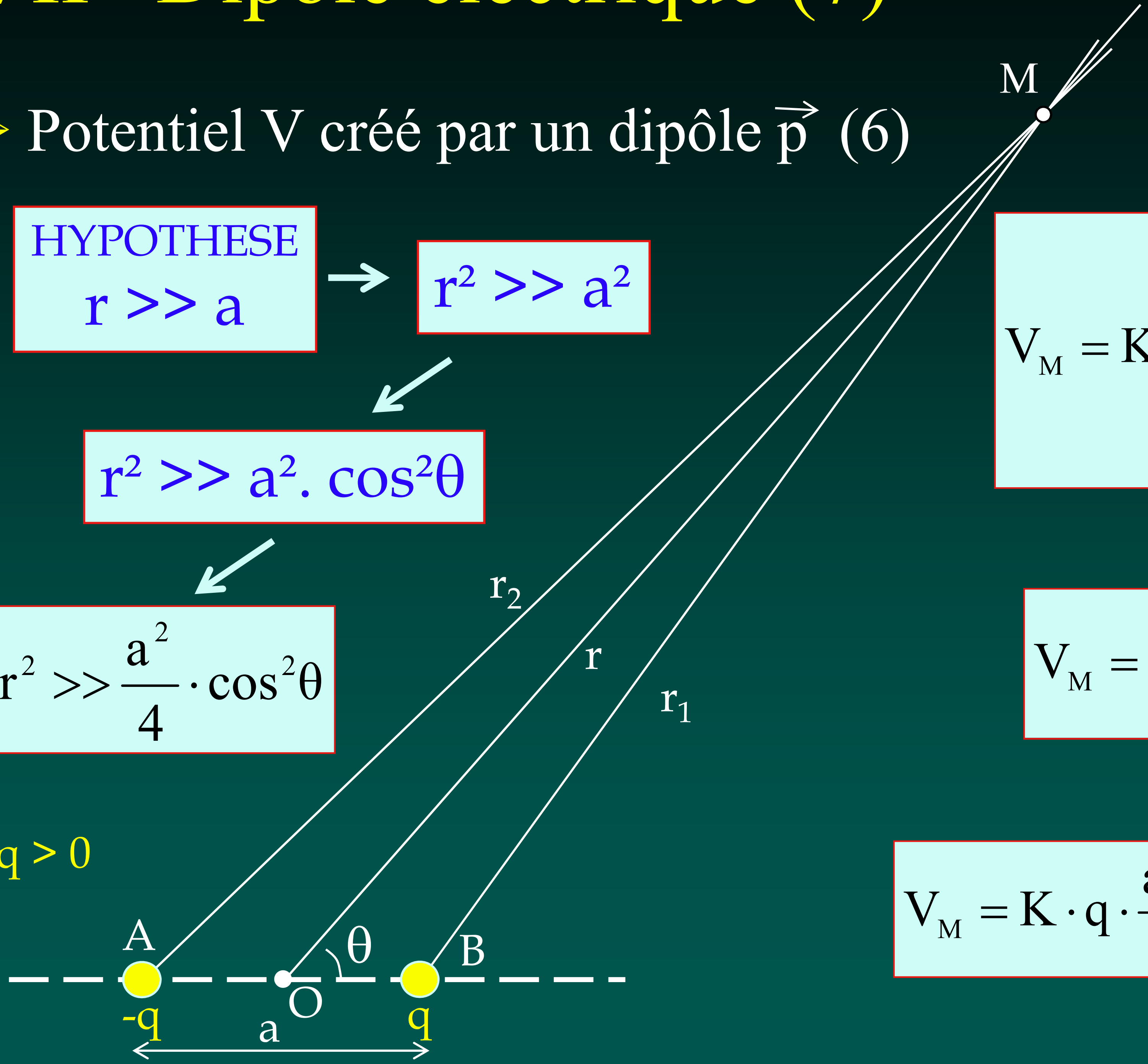
- Potentiel V créé par un dipôle $\vec{p}$ (6)

HYPOTHESE
r >> a

→ $r^2 >> a^2$

↙ $r^2 >> a^2 . \cos^2\theta$

↙ $r^2 >> \dfrac{a^2}{4} \cdot \cos^2\theta$



$$V_M = K \cdot q \cdot \left[\frac{a \cdot \cos\theta}{r^2 - \frac{a^2}{4} \cdot \cos^2\theta} \right]$$

⇓

$$V_M = K \cdot q \cdot \left[\frac{a \cdot \cos\theta}{r^2} \right]$$

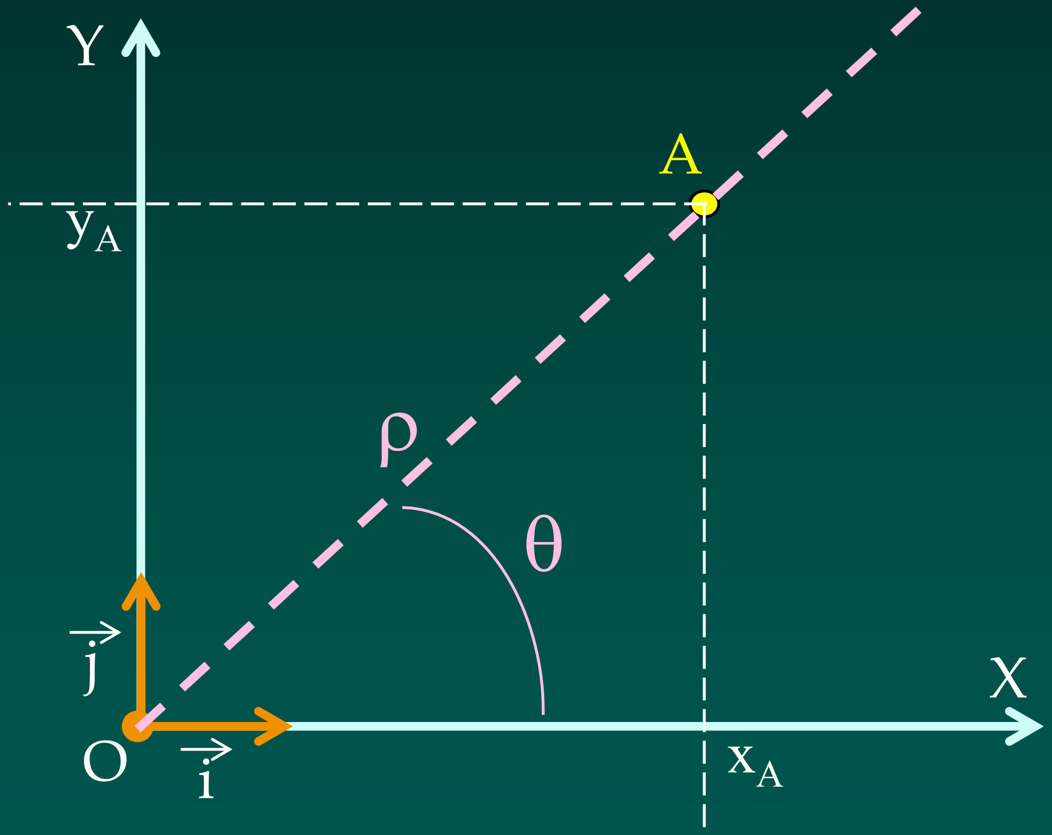
⇓

$$V_M = K \cdot q \cdot \frac{a \cdot \cos\theta}{r^2} = K \cdot \frac{p \cdot \cos\theta}{r^2}$$

VII– Dipôle électrique (8)

- Champ électrique $\vec{E}$ créé par un dipôle (1)

PETIT RAPPEL MATHÉMATIQUE



Coordonnées Cartésiennes
A (x_A,y_A)

Coordonnées Polaires
A (ρ,θ)

VII– Dipôle électrique (9)

- Champ électrique $\overrightarrow{E}$ créé par un dipôle $\overrightarrow{p}$ (2)

$$\boxed{\vec{E} = -\,\overrightarrow{grad}\;\cdot V = -\vec{\nabla}\cdot V}$$

En coordonnées polaires (r, θ)

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

Composante radiale

$$E_\theta = -\frac{\partial V}{r\cdot\partial\theta}$$

Composante tangentielle

VII– Dipôle électrique (10)

- Champ électrique $\overrightarrow{E}$ créé par un dipôle $\overrightarrow{p}$ (3)

Le Potentiel électrique V_M généré par un dipôle au point M

$$\boxed{V_M = K \cdot q \cdot \frac{a \cdot \cos\theta}{r^2}} \boxed{= K \cdot \frac{p \cdot \cos\theta}{r^2}}$$

Le Champ électrique en coordonnées polaires (r, θ)

$$\boxed{E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}} \qquad \boxed{E_\theta = -\frac{\partial V}{r \cdot \partial \theta}}$$

Composante radiale

Composante tangentielle

VII– Dipôle électrique (11)

➢ Champ électrique $\overrightarrow{E}$ créé par un dipôle $\overrightarrow{p}$: Expression de E_r

$$E_r = -\frac{\partial V_M}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left[K \cdot q \cdot \frac{a \cdot \cos\theta}{r^2}\right] = -\left[K \cdot q \cdot a \cdot \cos\theta\right] \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad E_r = -\left[K \cdot q \cdot a \cdot \cos\theta\right] \cdot \left[\frac{-2}{r^3}\right] \quad \Rightarrow \quad E_r = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot a \cdot \cos\theta}{r^3}$$

$$E_r = -\frac{\partial V_M}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_r = \frac{2 \cdot p}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\cos\theta}{r^3}}$$

VII– Dipôle électrique (12)

➢ Champ électrique $\overrightarrow{E}$ créé par un dipôle $\overrightarrow{p}$: Expression de E_θ

$$E_\theta = -\frac{\partial V_M}{r \cdot \partial\theta} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}\left[K \cdot q \cdot \frac{a \cdot \cos\theta}{r^2}\right] = -\frac{1}{r} \cdot \frac{K \cdot q \cdot a}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}[\cos\theta]$$

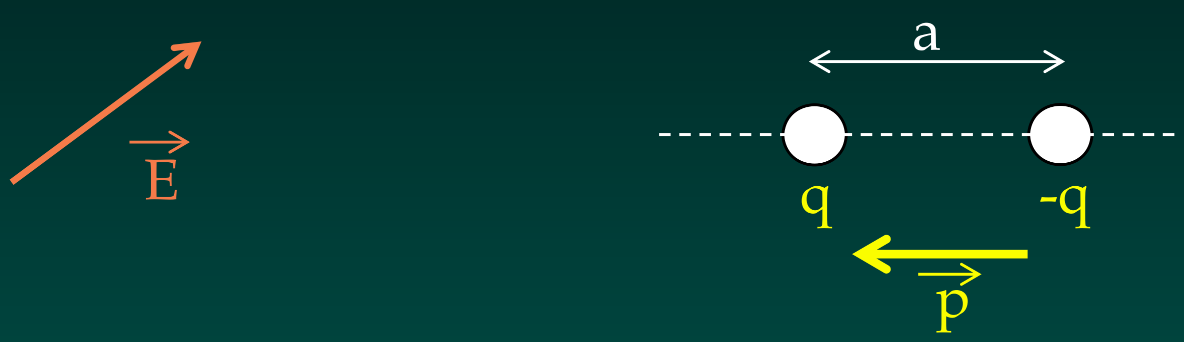
$$\Rightarrow \quad E_\theta = -\frac{1}{r^3} \cdot K \cdot q \cdot a \cdot [-\sin\theta] \quad \Rightarrow \quad E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot a \cdot \sin\theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{\partial V_M}{r \cdot \partial\theta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_\theta = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\sin\theta}{r^3}}$$

VII– Dipôle électrique (13)

- Dipôle $\vec{p}$ placé dans un champ électrique $\vec{E}$ (1)

$q > 0$

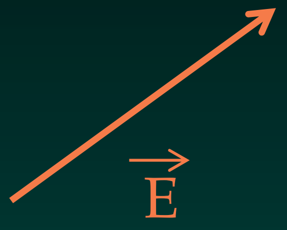


Hypothèse : LE CHAMP $\vec{E}$ EST LE MÊME À CHAQUE EXTRÉMITÉ DU DIPÔLE

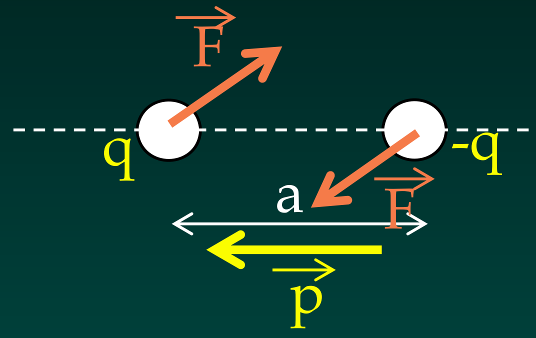
⇒ LES VALEURS DES FORCES D'INTERACTION ÉLECTROSTATIQUE SONT IDENTIQUES POUR CHAQUE EXTRÉMITÉ

VII– Dipôle électrique (14)

- Dipôle $\vec{p}$ placé dans un champ électrique $\vec{E}$ (2)



$$\boxed{\vec{F} = -q \cdot \vec{E}}$$



$q > 0$

Les forces $\vec{F}$ qui s'exercent sur le dipôle p

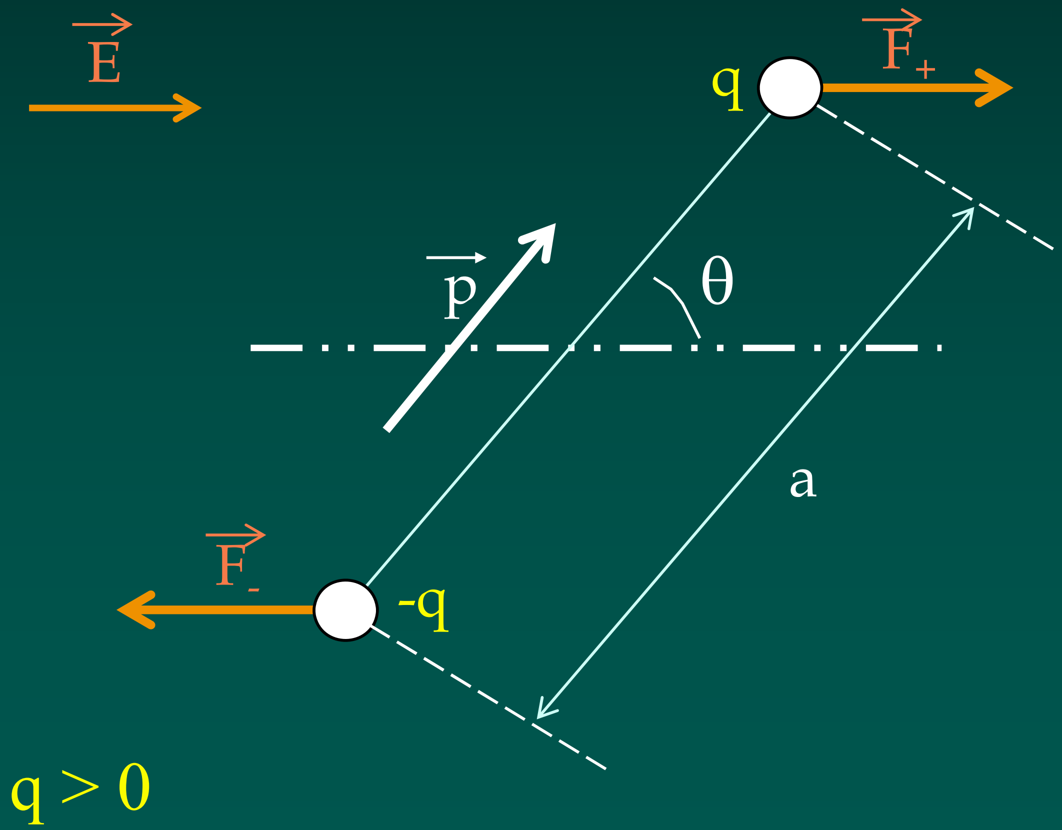
Application d'un couple de moment $\vec{M}$ de Forces

$$\boxed{\vec{M} = \vec{p} \wedge \vec{E}}$$

VII– Dipôle électrique (15)

➢ Dipôle $\vec{p}$ placé dans un champ électrique $\vec{E}$ (3)

De manière générale, le couple des forces électrostatiques tend à faire tourner
Le dipôle de telle sorte à l'aligner parallèlement au champ électrique



$$\boxed{\vec{M} = \vec{p} \wedge \vec{E}}$$

$$\Downarrow$$

$$\|\vec{M}\| = \|\vec{p}\| \cdot \|\vec{E}\| \cdot \sin\theta$$

$$\Downarrow$$

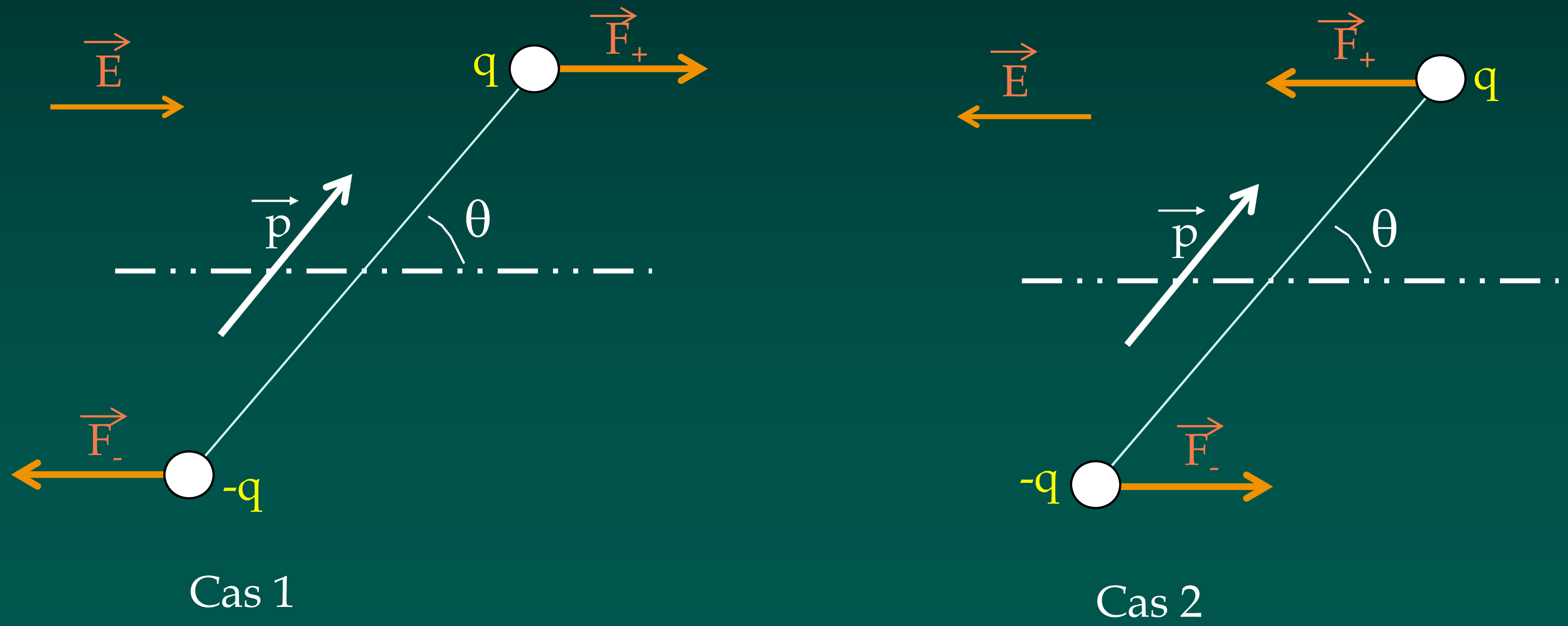
$$\|\vec{M}\| = q \cdot a \cdot \|\vec{E}\| \cdot \sin\theta$$

VII– Dipôle électrique (16)

➤ Dipôle $\vec{p}$ placé dans un champ électrique $\vec{E}$ (4)

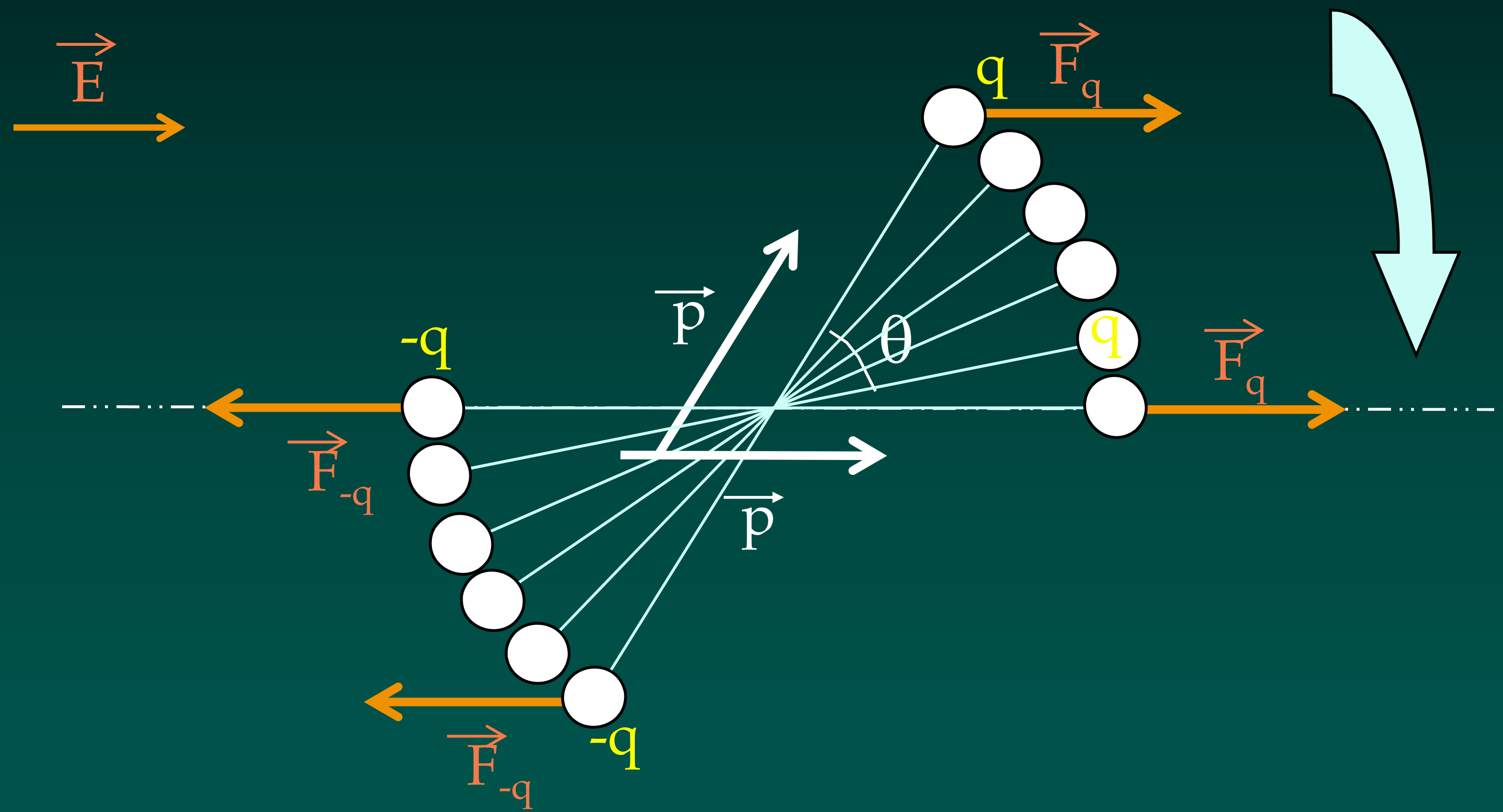
Le couple des forces électrostatiques tend à aligner le dipôle parallèlement au Champ électrique : deux positions d'équilibre (stable et instable)

$q > 0$



VII– Dipôle électrique (17)

➢ Dipôle $\vec{p}$ placé dans un champ électrique $\vec{E}$ (5)

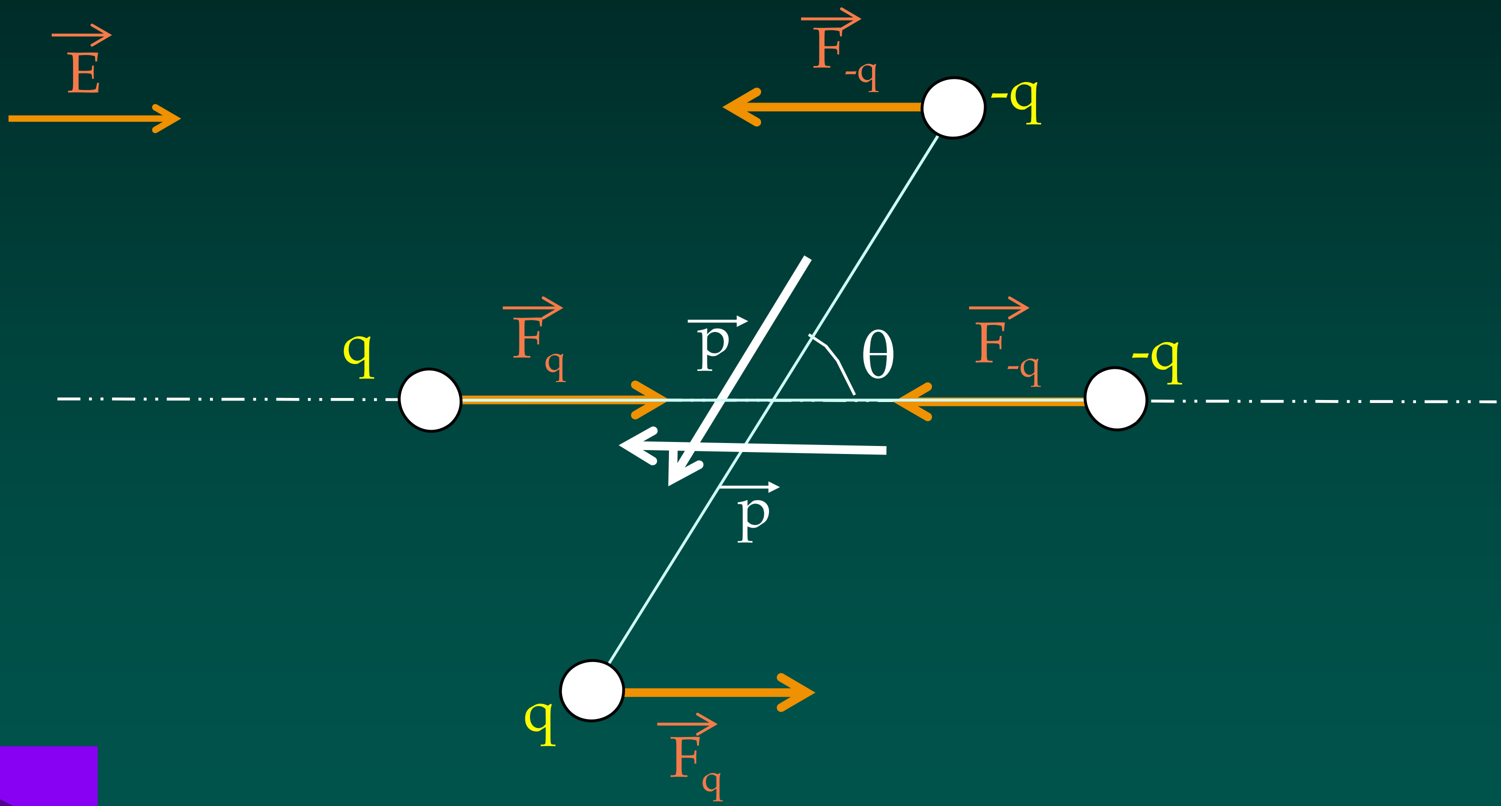


q > 0

Équilibre Stable

VII– Dipôle électrique (18)

- Dipôle $\vec{p}$ placé dans un champ électrique $\vec{E}$ (6)



Équilibre Instable

VII– Dipôle électrique (19)

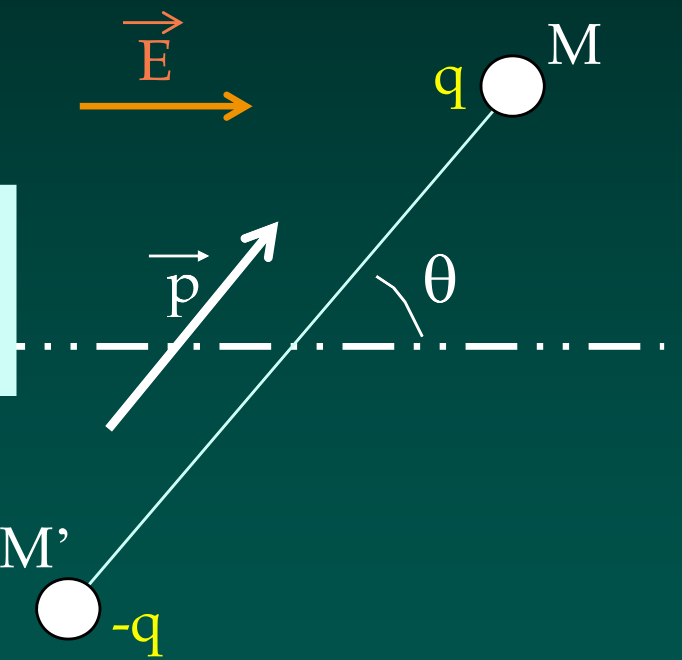
➢ Dipôle $\vec{p}$ placé dans un champ électrique $\vec{E}$ (7)

Expression de l'Énergie potentielle E_p d'interaction électrostatique

$$E_p = q \cdot V + (-q) \cdot V' = q \cdot (V - V')$$

$$(V - V') = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{M'M}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$$



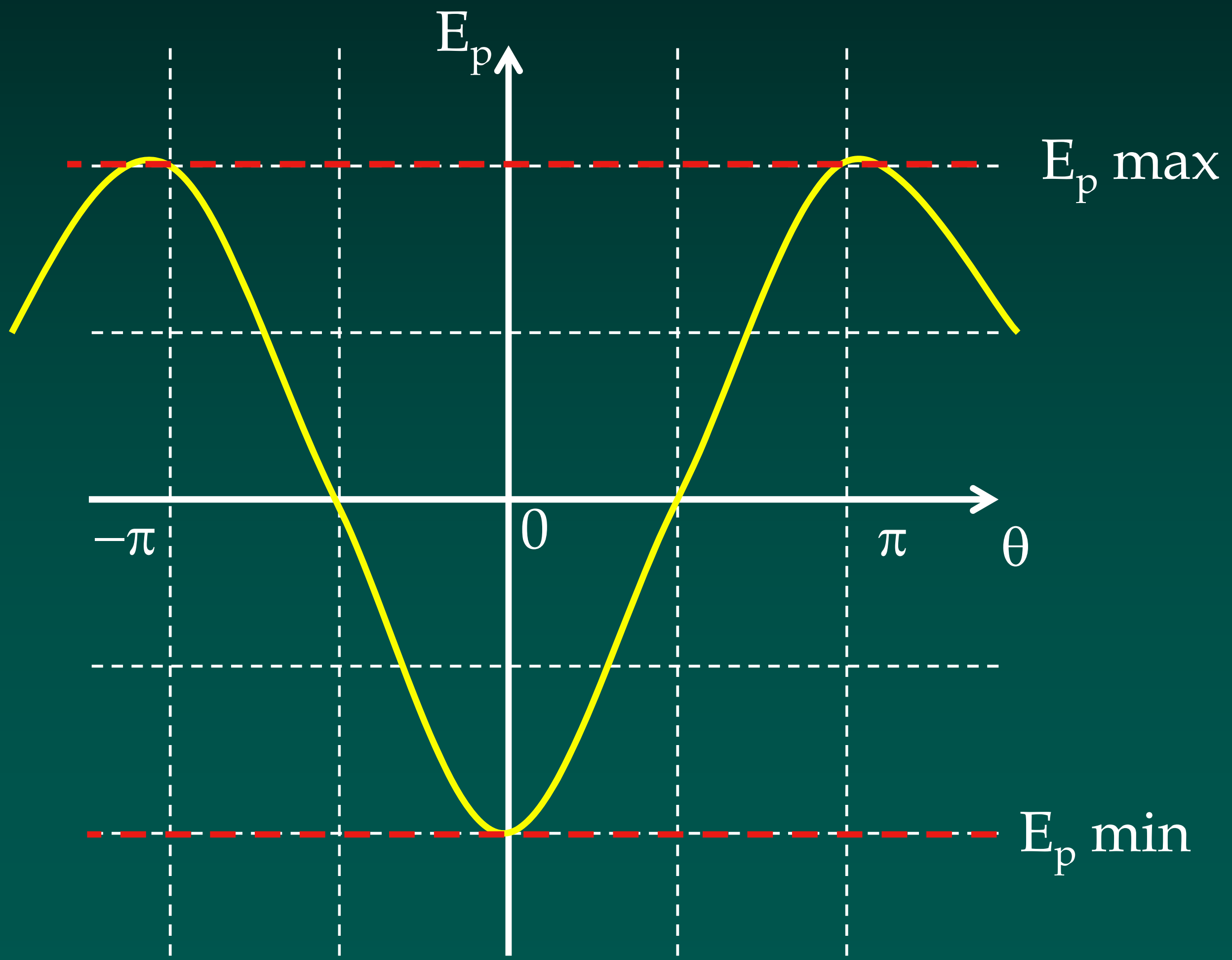
$$\Rightarrow E_p = -q \cdot \vec{E} \cdot \overrightarrow{M'M} = -q \cdot \vec{E} \cdot \vec{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_p = -\vec{E} \cdot \vec{p}}$$

VII– Dipôle électrique (20)

- Dipôle $\vec{p}$ placé dans un champ électrique $\vec{E}$ (8)

Expression de l'Énergie potentielle E_p d'interaction électrostatique



$$E_p = -\vec{E} \cdot \vec{p}$$

$$\Downarrow$$

$$E_p = -\left\|\vec{p}\right\| \cdot \left\|\vec{E}\right\| \cdot \cos\theta$$

$$\Downarrow$$

$$E_p = -q \cdot a \cdot \left\|\vec{E}\right\| \cdot \cos\theta$$

VIII– Conducteurs (1)

- Définition

Un conducteur est un Corps à l'intérieur duquel les charges libres peuvent se déplacer plus ou moins librement

- Exemple de Conducteurs

- Le métal
- Le corps biologique
- …. /….

VIII– Conducteurs (2)

- Conducteur en équilibre

Un conducteur est dit en équilibre si toutes ces charges sont immobiles, en d'autres termes, les charges intérieures ne sont soumises à aucune force

- Propriétés des conducteurs en équilibre

  - Le Champ électrique à l'intérieur d'un conducteur en équilibre est nul (E=0)
  - Le conducteur constitue un volume équipotentiel (V= cte)
  - La charge est localisée à la surface d'un conducteur en équilibre.

VIII– Conducteurs (3)

➢ Théorème de Gauss

Le flux du Champ électrique à travers une surface fermée entourant des charges q_i est :

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

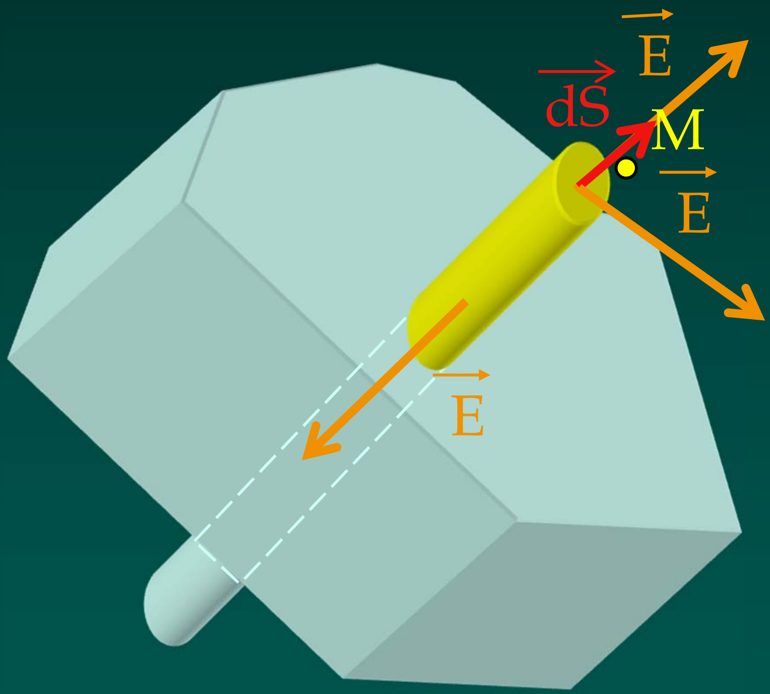
$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

La somme algébrique des charges intérieures

VIII– Conducteurs (4)

- Application du Théorème de Gauss (1)

Expression du Champ électrique au voisinage extérieur immédiat d'un conducteur



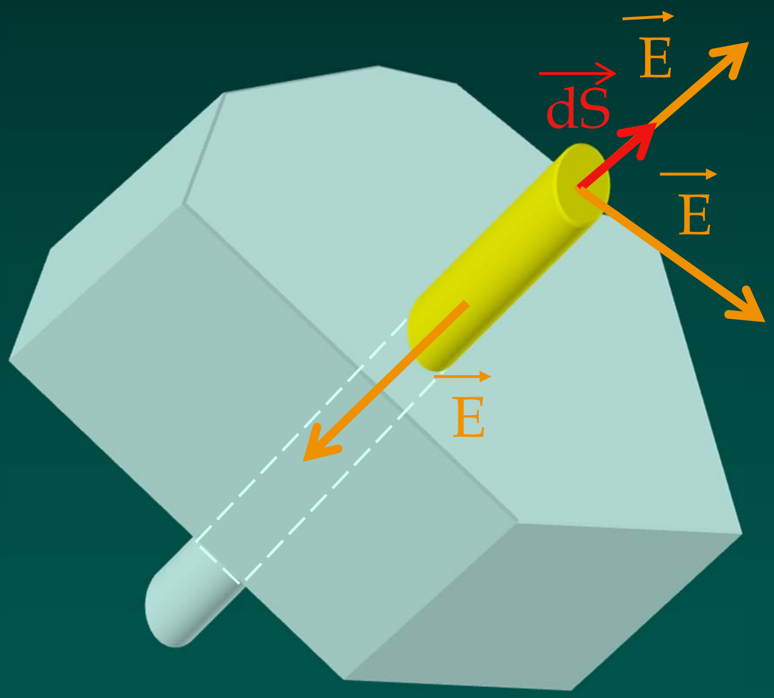
$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

- Flux à travers la base intérieure
- Flux à travers la surface latérale
- Flux à travers la base extérieure

VIII– Conducteurs (6)

- Application du Théorème de Gauss (3)

Expression du Champ électrique au voisinage extérieur immédiat d'un conducteur quelconque



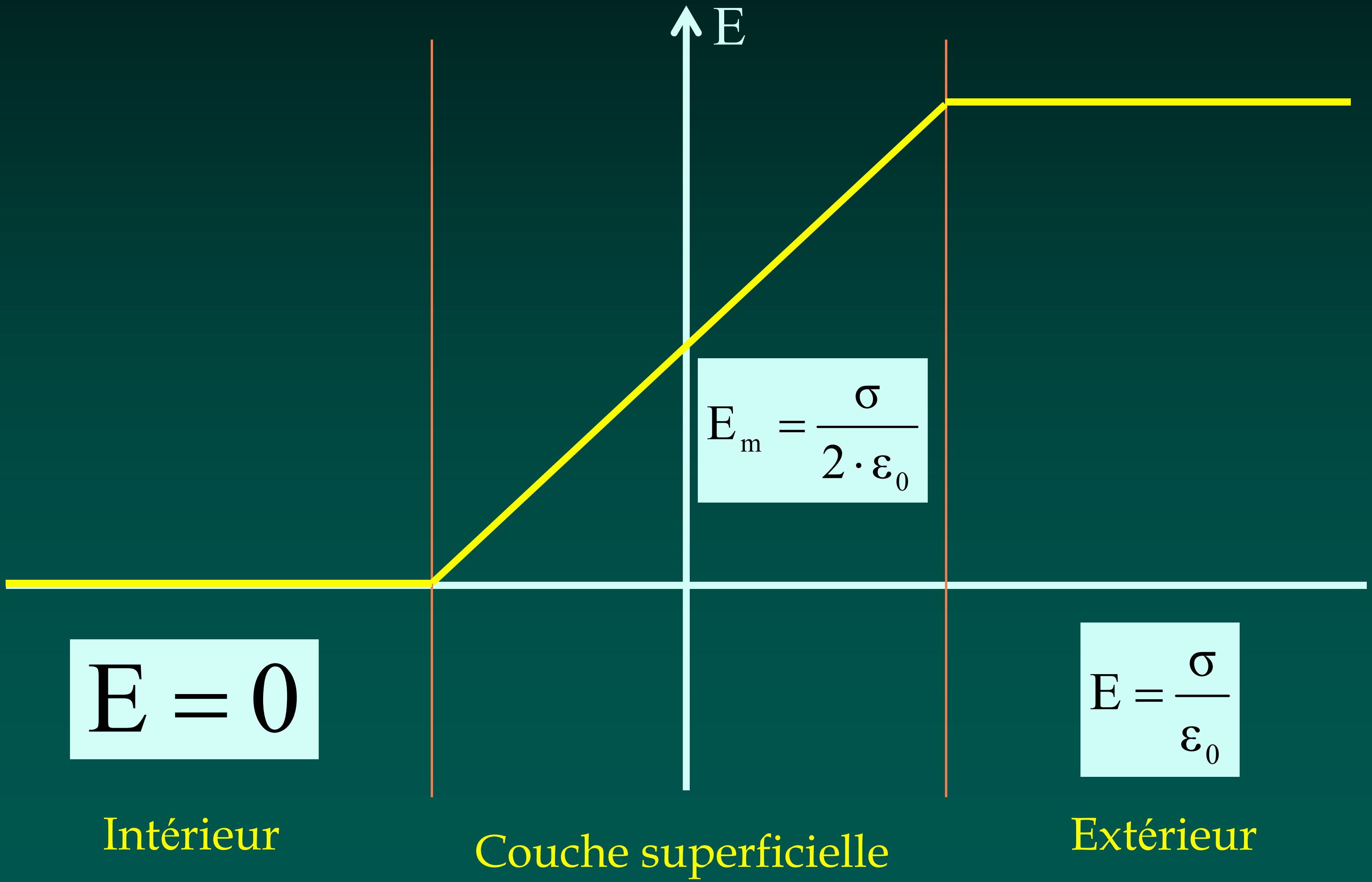
$$\Phi_E = \iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} \Rightarrow d\Phi = \frac{dq}{\varepsilon_0}$$

$$d\Phi = E\cdot dS \quad + \quad dq = \sigma\cdot dS$$

$$\Rightarrow E\cdot dS = \frac{\sigma\cdot dS}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

VIII– Conducteurs (8)

- Champ électrique à la traversée de la surface d’un conducteur (2)



VIII– Conducteurs (9)

- Force par unité de surface ou Pression électrostatique P

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

$$P = \frac{F}{S}$$

$$E_m = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0}$$

$$\sigma = \frac{q}{S}$$

$$P = \sigma \cdot E$$

$$\boxed{P = \frac{\sigma^2}{2 \cdot \varepsilon_0}}$$

VIII– Conducteurs (11)

➢ Pouvoir des Pointes (2) : exemple (1)

(R_1, Q_1) (R_2, Q_2)

$$\boxed{V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{R_1}}$$

$$\boxed{V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{R_2}}$$

A l'équilibre

$$V_1 = V_2$$

VIII– Conducteurs (12)

➢ Pouvoir des Pointes (3) : exemple (2)

$$V_1 = V_2$$

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{R_1} = V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{R_2}$$

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot R^2} \Rightarrow \boxed{\sigma_1 \cdot R_1 = \sigma_2 \cdot R_2}$$

Les Charges ont tendance à s'accumuler sur les pointes

VIII– Conducteurs (13)

Capacité propre d'un Conducteur

$$\boxed{Q = C \cdot V}$$

- C dépend de la Forme du Conducteur
- C traduit la plus ou moins aptitude qu'a un conducteur d'emmagasiner de la charge
- L'unité de C : Le Farad – (Utilisation des sous multiples du Farad)

Énergie interne d'un Conducteur

$$E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2$$

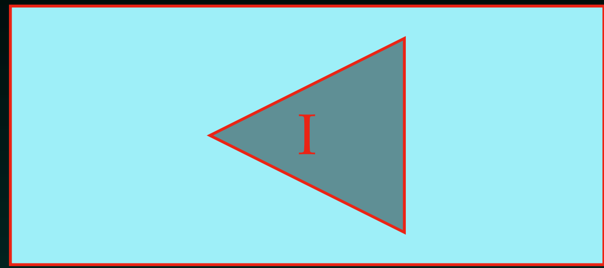
E EST TOUJOURS POSITIVE

$$E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2$$

$$Q = C \cdot V$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} \Rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot V$$

IX– Condensateurs (1)



➢ Introduction : Phénomène d'influence

• Comportement d'un diélectrique placé dans un champ électrique : Distorsion du mouvement des électrons

• Polarisation dans le diélectrique qui devient « un dipôle macroscopique »

- Conducteur isolé
- Conducteur maintenu à un potentiel constant
- Influence en retour
- Influence totale
- Effet d'écran

IX– Condensateurs (2)

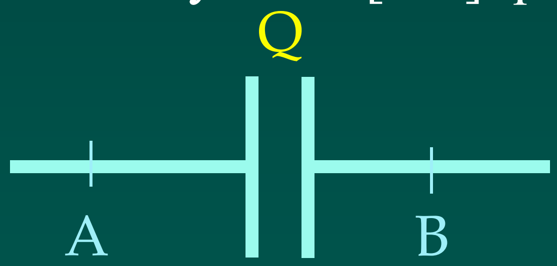
➢ Condensateur : Définition

- Soient deux conducteurs A et B séparés par un milieu isolant
- Le système [AB] forme un condensateur, représenté schématiquement par :

➡ Réalisation de la condensation de l'électricité par l'utilisation de deux conducteurs en influence totale

➢ Capacité C d'un condensateur

- Soit le système [AB] qui forme un condensateur, représenté schématiquement par :



$$\boxed{Q = C \cdot V}$$

$$\text{avec } V = V_A - V_B$$

<u>Remarque</u> : plutôt que d'écrire (VA – VB), il est écrit V. cette liberté d'écriture permet de sensibiliser les étudiants à la réalité suivante V est ici une ddp, à la différence de ce qui est noté pour les conducteurs.

VIII– Condensateurs (5)

- Associations de Condensateurs

Condensateurs en Parallèle $\boxed{C = \sum_i C_i}$ Condensateurs en Série $\boxed{\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}}$

- Énergie emmagasinée par un Condensateur $\boxed{E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2}$

Condensateur avec une ddp $V = V_A - V_B$

- Application au condensateur plan

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon \cdot S}{e}}$$