Chapitre I

Rappels Mathématiques

I. Généralités sur les grandeurs physiques

On distingue deux types de grandeurs

- grandeurs physiques repérables
- grandeurs physiques mesurables

a. Grandeurs physiques repérables

Une grandeur physique est repérable s'il est possible de définir une relation d'ordre pour chaque couple d'observation une grandeur, sans lui donner des valeurs numériques précises.

Exemple :

Dureté

Viscosité

Rigidité diélectrique

Etc……

b. Grandeurs physiques mesurables

Une grandeur physique est mesurable s'il est possible de définir l'égalité et l'addition de deux grandeurs de son espèces, et s'il est possible aussi de lui associer une valeur numérique. Le nombre qui mesure cette grandeur est le rapport de cette grandeur à la grandeur de même espèce choisie comme unité.

Il existe deux types de grandeurs mesurables : Scalaires et Vectorielles.

Exemple de grandeurs scalaires :

- Longueur
- Masse
- Temps
- Etc….

Exemple de grandeurs vectorielles

- Vitesse
- Accélération
- Etc…

II. Systèmes d'unités en physique

II. 1. Unités de base du système international

Le système international (S.I.) est constitué par les unités du système MKSA rationalisé (M : Mètre, K : Kilogramme, S : Seconde et A : Ampère) et comporte des définitions supplémentaires de l'unité de température et de l'unité d'intensité lumineuse.

Dans ce système d'unité, les unités de base ou fondamentales se définissent de la façon suivante :

- *Longueur* : l'unité de base SI de longueur est le mètre (m). Le mètre est la longueur égale à 1650 763,73 Longueur d'onde, dans le vide de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux $2p^{10}$ et $5d^{5}$ de l'atome de Krypton 86.

- *Masse* : l'unité de base SI de masse est le Kilogramme(Kg). Le Kilogramme est la masse du prototype en platine, qui a été sanctionné par la conférence générale des Poids et Mesures, tenue à Paris en 1889, et qui déposé au BIPM (Bureau International des Poids et Mesures : il est hébergé au Pavillon de Breteuil à Sèvres, dans le Parc de Saint-Cloud près de Paris).

-*Temps* : l'unité de base dans le S. I. de temps est la seconde (s). La seconde est définie comme étant la fraction 1/31 556 925, 9747 de l'année tropique de 1900.

- *Intensité du courant électrique* : l'unité de base dans le S. I. de l'intensité du courant électrique est l'Ampère (A).

L'ampère est défini comme étant l'intensité du courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1mètre l'un de l'autre, dans le vide, produit entre ces conducteurs, par mètre de longueur, une force égale à 2 . 10^{-7} Newton.

-*Température thermodynamique* : l'unité de base dans le S. I. de la température thermodynamique est le Degré Kelvin (°K).

Le Degré Kelvin est défini comme étant le degré de l'échelle thermodynamique es températures absolues dans laquelle la température du point triple de l'eau est 273,16°C.

Point Triple

Le point triple est, en thermodynamique, un point du diagramme de phase qui correspond à la coexistence de trois états (liquide, solide et gazeux) d'un corps pur. Il est unique et s'observe seulement à une température et une pression données.

Exemple :

- Le point triple de l'eau est à :
T = 273,16 K (soit 0,01 °C)
et P = 611 Pa (soit 0,006 atm)
- Le point triple de l'azote est à :
T = 63,16 K et P = 12 868 Pa
- Le point triple du dioxyde de carbone est à:
T = 216,55 K et P = 519.10^3 Pa
(soit 5,12 atm)
- Le point triple du néon est à :
T = 24,5561 K et P = 4,34·10^{-6} Pa

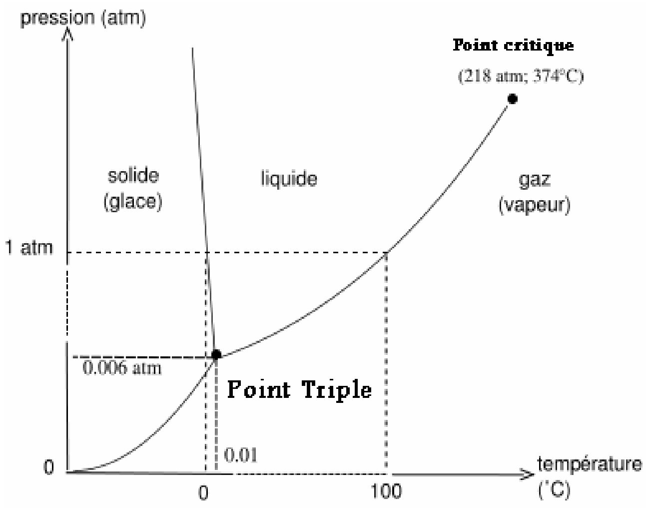


Diagramme de phase de l'eau

- *Intensité lumineuse* : l'unité de base dans le S. I. de l'intensité lumineuse est le Candela (Cd). Le Candela est définie comme étant l'intensité lumineuse, dans une direction déterminée, d'une ouverture perpendiculaire à cette direction, ayant une aire de 1/60 de centimètre carré et rayonnant comme un radiateur intégral (Corps Noir) à la température de solidification du platine.

Remarque : Il existe aussi d'autres systèmes d'unités en physique, comme par exemple :

- Le système CGS (Centimètre, Gramme, Seconde) ;
- Le système MTS (Mètre, Tonne, Seconde).

II.2. Unités dérivées du Système International

A partir des unités de base auparavant définies, on peut définir facilement des unités qui en découlent,

- *Surface* : mètre carré (m^2)

Aire d'un carré de 1mètre de coté

-*Volume* : mètre cube (m^3)

Volume d'un cube de 1mètre de coté

- *Angle plan* : radian (rd ou rad)

Angle plan, ayant son sommet au centre d'un cercle, interceptant, sur la circonférence de ce cercle, un arc d'une longueur égale à celle du rayon.

- *Angle solide* : stéradian (sr)

Angle solide, ayant son sommet au centre d'une sphère, découpant sur la surface de cette sphère, une aire égale à celle d'un carré ayant pour côté le rayon de la sphère.

-*Vitesse* : mètre par seconde (m/s)

Vitesse d'un mobile qui, animé d'un mouvement uniforme, parcourt en 1 seconde, une distance de 1mètre.

-*Accélération* : mètre par seconde, par seconde (m/s^2)

- *Vitesse Angulaire* : radian par seconde (rd/s)

- *Force* : Newton (N)

Force qui communique à un corps, ayant une masse de 1 Kg, une accélération de 1mètre par seconde

- *Moment* : Mètre.Newton (m.N)

Moment par rapport à un axe, d'une force de 1 Newton dont le support est distant de 1 mètre de l'axe et y est orthogonal.

- *Energie, Travail, Quantité de Chaleur* : Joule (J)

Travail produit par une force de 1 Newton dont le point d'application se déplace de 1 mètre dans la direction de la force.

- *Puissance* : Watt (W)

Puissance de 1 Joule par seconde (Travail/ Temps).

- *Contrainte, Pression* : Pascal (Pa)

Pression uniforme qui, agissant sur une surface plane de 1 mètre carré, exerce perpendiculairement à cette surface, une force totale de 1 Newton.

III. Equations aux Dimensions

III. 1. Définition :

Les équations aux dimensions sont des écritures conventionnelles qui résument simplement la définition des grandeurs dérivées des unités fondamentales : Longueur, Masse et Temps : symbolisées par les majuscules L, M et T.

Ainsi une vitesse qui est le quotient d'une longueur L par un temps T est représentée par

$$V = \frac{L}{T} = LT^{-1}$$

- une accélération : $\Gamma = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}$
- une force : $F = M.\Gamma = MLT^{-2}$
- un travail : $W = F.L = ML^2T^{-2}$
- une puissance : $P = \frac{W}{T} = ML^2T^{-3}$
- une quantité de chaleur : $Q = ML^2T^{-3}$ (comme un travail)
- une pression, une contrainte : $p = \frac{F}{S} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$
- un moment d'inertie : M= ML^2

III. 2. Utilités des équations aux dimensions

Les équations aux dimensions servent à vérifier l'homogénéité des formules :

Ainsi : $\frac{1}{2}mv^2$ est homogène à une énergie (c'est-à-dire un travail), l'équation aux dimensions d'un travail est $W = ML^2T^{-2}$

$\frac{1}{2}mv^2 \rightarrow M.\left(\frac{L}{T}\right)^2 = ML^2T^{-2}$ est bien une énergie.

III. 3. Relation entre les unités

Les relations entre les unités des différents systèmes peuvent être facilement établies en utilisant les équations aux dimensions.

Exemple :

Calculer la relation existant entre le Barye (unité de pression dans le système CGS) et le pascal (unité de pression dans le S. I.)

Pression : $p = ML^{-1}T^{-2}$

$$\frac{1\,Pa}{1\,Barye} = \left(\frac{M}{M}\right).\left(\frac{L^{-1}}{L^{-1}}\right).\left(\frac{T^{-2}}{T^{-2}}\right) = \frac{1000}{1}.\frac{100^{-1}}{1^{-1}}.\frac{1}{1} = 10$$

$\Rightarrow$ $1\ Pa = 10\,Baryes$

IV. Calcul d'erreurs

IV. 1. Définitions :

Pour toute grandeur mesurable A, il est possible de définir :

- sa valeur mesurée a
- sa valeur exacte a_0 qu'on ne peut pas atteindre

Erreur Absolue : se définit alors par $\delta a = a - a_0$

Cette erreur est la résultante de plusieurs erreurs (systématiques, accédentelles…….)

Incertitude absolue :

L'erreur absolue δa n'étant pas connue, on se contente de donner une limite supérieure Δa appelée incertitude absolue telle que :

$|\delta a| \leq \Delta a \;\Rightarrow\; \Delta a > 0$ (l'incertitude absolue est toujours >0)

Cela veut dire que l'incertitude absolue est la valeur maximale que peut atteindre l'erreur absolue.

Incertitude relative :

Elle est définie par le rapport $\dfrac{\Delta a}{a}$

IV. 2. Calculs d'erreurs

Soit une grandeur g=f(x, y, z), sa différentielle totale s'écrit :

$$dg = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

L'incertitude absolue sur la variable g s'obtient en passant aux variations des variables qui la compose, soit :

$$\Delta g = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z$$

Exemple1 :

Soit à déterminer l'incertitude relative $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ de la masse volumique de la substance d'un cube homogène à partir de la mesure de sa masse « m » et de son arête « a ».

Solution :

Si m et a désignent les valeurs approchées de la masse et de l'arête du cube, on peut écrire :

$$\rho = \frac{masse}{volume} = \frac{m}{a^3} \quad \Rightarrow \quad \rho = m\,a^{-3}$$

Dérivant le volume par rapport à la masse et à l'arête. Ce qui donne :

$$d\rho = a^{-3}\,dm - 3a^{-4}m\,da$$

En approximant les petites variations « d » par de grandes variations « Δ », il vient :

$$\Delta\rho = a^{-3}\,\Delta m + 3a^{-4}m\,\Delta a \Rightarrow \Delta\rho = \frac{1}{a^3}\Delta m + 3\frac{m}{a^4}\Delta a$$

d'où $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + 3\frac{m}{a^4}\Delta a$

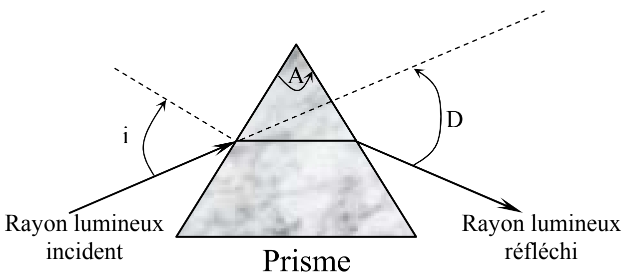
Remarque :

On retrouve la même chose en prenant Ln(ρ) et en différentiant la nouvelle équation. Ln : est la fonction népérienne.

Exemple 02 :

Soit à déterminer l'incertitude sur l'indice de réfraction d'un prisme donné par la relation suivante :

$$n = \frac{\sin[(D+A)/2]}{\sin(A/2)}$$



Solution :

$$dn = \frac{\sin(\frac{A}{2})\left\{\frac{1}{2}\cos(\frac{D+A}{2})dD + \frac{1}{2}\cos(\frac{D+A}{2})dA\right\} - \frac{1}{2}os(\frac{A}{2})\,dA\,\sin(\frac{D+A}{2})}{\sin(\frac{A}{2})^2}$$

$$= \frac{\frac{dA}{2}\left\{\sin(\frac{A}{2})\cos(\frac{D+A}{2}) - \cos(\frac{A}{2})\sin(\frac{D+A}{2})\right\} + \sin(\frac{A}{2})\ \cos(\frac{D+A}{2})\frac{dD}{2}}{\sin(\frac{A}{2})^2}$$

$$= \frac{\frac{dA}{2}\sin(\frac{A}{2} - \frac{D+A}{2}) + \sin(\frac{A}{2})\ \cos(\frac{D+A}{2})\frac{dD}{2}}{\sin(\frac{A}{2})^2}$$

$$= \frac{-\sin(\frac{D}{2})}{\sin(\frac{A}{2})^2}\ \frac{dA}{2} + \frac{\cos(\frac{D+A}{2})}{\sin(\frac{A}{2})}\ \frac{dD}{2}$$

Il vient :

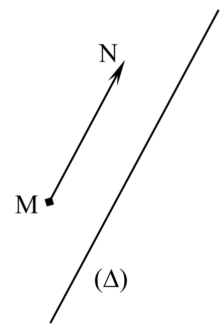
$$\Delta n = \frac{\sin(\frac{D}{2})}{\sin(\frac{A}{2})^2}\ \frac{\Delta A}{2} + \frac{\cos(\frac{D+A}{2})}{\sin(\frac{A}{2})}\ \frac{\Delta D}{2}$$

V. Vecteurs

V. 1. Définitions

Un vecteur est segment de droite MN, ayant une origine M et une extrémité N. Il est complètement défini si l'on se donne :

- son origine ou point d'application.
- sa direction qui est celle de la droite (Δ).
- Son sens qui est le sens du mouvement d'un mobile allant de M vers N.
- Sa grandeur qui la longueur MN (ou module).



Vecteur libre

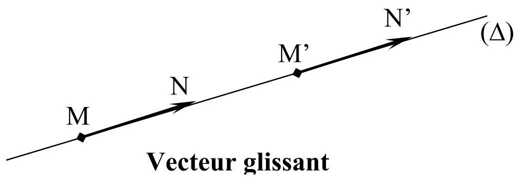
On le note symboliquement par $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{a}$, etc….

<u>Remarque :</u>

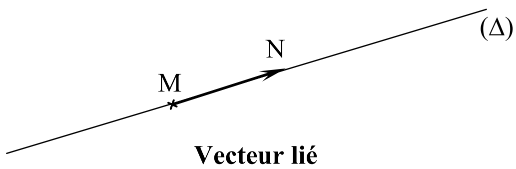
Si l'on se donne simplement la direction, le sens et le module, on dit que l'on a défini un <u>vecteur libre</u>.

Si en plus, on se donne la droite (Δ) qui porte le vecteur, on dit que l'on a défini un <u>vecteur glissant</u>.

Si en plus de la droite qui porte le vecteur, on se donne encore le point



Vecteur glissant



Vecteur lié

d'application M, on définit un vecteur lié.

Deux vecteurs liés d'origine différentes, sont dits égaux lorsqu'ils ont la même direction, même sens et même module : ils représentent le même vecteurs glissant.

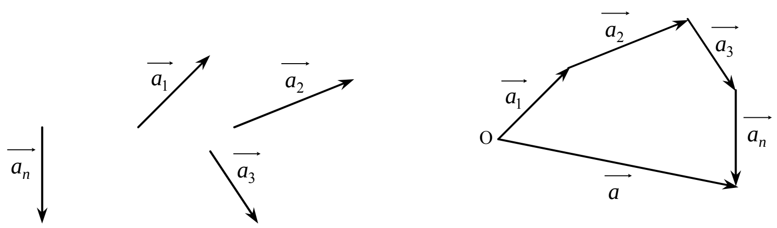
Deux vecteurs liés, d'origines quelconques, sont dits opposés lorsqu'ils ont la même direction, même grandeur et des sens opposés : ils sont dits directement opposés lorsqu'ils sont portés par la même droite.

V. 2. Opérations sur les vecteurs libres

V. 2. 1. Addition

Par définition, la somme d'un certains nombre de vecteurs libres $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, ..., \overrightarrow{a_n}$ est un vecteur libre $\overrightarrow{a}$, dont on obtient la représentation en construisant un contour polygonal d'origine quelconque et dont les côtés sont respectivement égaux aux vecteurs $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, ..., \overrightarrow{a_n}$. On écrit : $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + ... + \overrightarrow{a_n}$.

Exemple



On démontre facilement, par des considérations de géométrie élémentaire, que cette somme n'est pas modifiée lorsqu'on intervertit l'ordre des vecteurs, ou qu'on remplace plusieurs d'entre eux par leur somme.

La somme des vecteurs est donc commutative est associative.

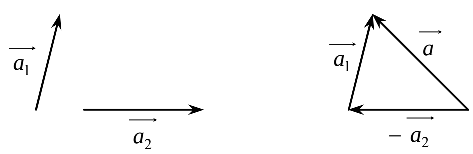
D'autre part, la somme de deux vecteurs opposés est nulle. Ce qui veut dire :

$\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = 0$

La différence de deux vecteurs $\overrightarrow{a_1}$ et $\overrightarrow{a_2}$: $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_2}$ est la somme du premier vecteur est l'opposé du second : $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a_1} + (-\overrightarrow{a_2})$

Exemple :

$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{a_1} + (-\overrightarrow{a_2})$



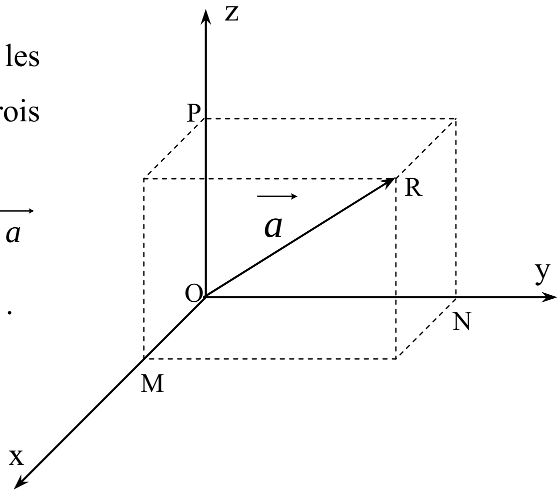
V. 2. 2. Composantes d'un vecteur

Les trois projections OM, ON, OP d'un vecteur $\overrightarrow{a}$ sur les trois axes de coordonnées Oxyz peuvent être considérées comme trois vecteurs $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}$ portés respectivement

par ces trois axes, dont le sens et les grandeurs sont définis par les trois nombres algébriques X, Y et Z.

On montre facilement que le vecteur $\overrightarrow{a}$ est la somme des trois vecteurs $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}$.

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z}$$



Les trois vecteurs $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}$ s'appellent les 3 composantes du vecteur $\overrightarrow{a}$.

Si l'on considère divers vecteurs $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ de composantes $(\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{Y_1}, \overrightarrow{Z_1})$, $(\overrightarrow{X_2}, \overrightarrow{Y_2}, \overrightarrow{Z_2})$ et $(\overrightarrow{X_3}, \overrightarrow{Y_3}, \overrightarrow{Z_3})$, les théorèmes généraux de l'addition permettent d'écrire leur somme sous la forme :

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} = \overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{Y_1} + \overrightarrow{Z_1} + \overrightarrow{X_2} + \overrightarrow{Y_2} + \overrightarrow{Z_2} + \overrightarrow{X_3} + \overrightarrow{Y_3} + \overrightarrow{Z_3}$$
$$= (\overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2} + \overrightarrow{X_3}) + (\overrightarrow{Y_1} + \overrightarrow{Y_2} + \overrightarrow{Y_3}) + (\overrightarrow{Z_1} + \overrightarrow{Z_2} + \overrightarrow{Z_3})$$

Ainsi, l'égalité vectorielle $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}$ est équivalente aux trois égalités algébriques :

$$X = X_1 + X_2 + X_3$$
$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$$
$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3$$

V. 2. 3. Multiplication d'un vecteur par une quantité scalaire

La somme de n vecteurs, tous égaux à un même vecteur $\overrightarrow{a}$, est évidemment un vecteur $\overrightarrow{b}$ ayant même direction et même sens que le vecteur $\overrightarrow{a}$ et dont la grandeur b est égale à n fois la grandeur a du vecteur $\overrightarrow{a}$.

$$\overrightarrow{b} = n\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{a} + \overrightarrow{a} \text{ ....} + \overrightarrow{a} \ (n \ \ fois)$$

De même le rapport $\overrightarrow{b}\ /\ \overrightarrow{a}$ de deux vecteurs parallèles $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{a}$ est un nombre algébrique m, dont la valeur absolue est le rapport b/a des grandeurs des deux vecteurs, et qui est positif si les deux vecteurs sont de même sens, négatif si les deux vecteurs sont de sens contraire.

<u>Remarque</u>

Les trois composantes $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}$ d'un vecteur $\overrightarrow{a}$ peuvent être considérées comme les produits par les trois nombre algébriques X, Y, Z coordonnées de e vecteur, de vecteurs $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ de grandeurs égales à l'unité, respectivement dirigés suivant les trois axes Ox, Oy, Oz dans le sens positif de ces axes. $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ sont appelés vecteurs unitaires des axes.

Ainsi le vecteur $\overrightarrow{a}$ de coordonnées X, Y , Z s'écrira

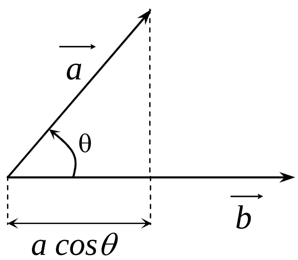
$$\overrightarrow{a} = X\ \overrightarrow{i} + Y\ \overrightarrow{j} + Z\ \overrightarrow{k}$$

V. 2. 4. Produit scalaire

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, faisant entre eux l'angle θ, et on représente par la notation

$$m= \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \qquad \text{(scalaire)}$$

la quantité $\quad \mathrm{m = a \cdot b} \cdot \cos\theta = \left|\overrightarrow{\mathrm{a}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathrm{b}}\right| \cdot \cos\theta$



D'après la définition, il s'avère que le produit scalaire est commutatif c'est-à-dire $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$

On conçoit facilement d'après la définition que $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}^2 = a^2$.

On peut étendre au produit scalaire les diverses règles du calcul algébrique :

$$(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2})\cdot(\overrightarrow{b_1}+\overrightarrow{b_2})=\overrightarrow{a_1}\overrightarrow{b_1}+\overrightarrow{a_1}\overrightarrow{b_2}+\overrightarrow{a_2}\overrightarrow{b_1}+\overrightarrow{a_2}\overrightarrow{b_2}$$

De même en désignant par X, Y, Z et X', Y', Z' les coordonnées de deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{a'}$ par rapport aux trois axes rectangulaires de vecteurs unitaires $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a'} &= (X\,\overrightarrow{i}+Y\,\overrightarrow{j}+Z\,\overrightarrow{k})\cdot(X'\,\overrightarrow{i}+Y'\,\overrightarrow{j}+Z'\,\overrightarrow{k})\\ &= XX'\,\overrightarrow{i}^2+XY'\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{j}+XZ'\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}+YX'\,\overrightarrow{j}\,\overrightarrow{i}+YY'\,\overrightarrow{j}^2\\ &\quad+YZ'\,\overrightarrow{j}\,\overrightarrow{k}+ZX'\,\overrightarrow{k}\,\overrightarrow{i}+ZY'\,\overrightarrow{k}\,\overrightarrow{j}+ZZ'\,\overrightarrow{k}^2\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{i}^2=\overrightarrow{j}^2=\overrightarrow{k}^2$ et $\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{j}=\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{k}=\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{k}=\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{i}=\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{j}=0$

Il s'ensuit donc : $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a'}=XX'+YY'+ZZ'$

De la même façon : $\overrightarrow{a}^2=a^2=X^2+Y^2+Z^2$

Les quantités $X^2+Y^2+Z^2$ et $XX'+YY'+ZZ'$ représentent des grandeurs scalaires définies indépendamment des axes Oxyz, elles ne dépendent pas du choix de axes, et constituent donc ce qu'on appelle des invariants.

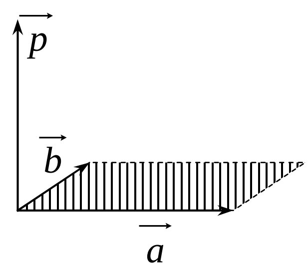
V. 2. 5. Produit vectoriel

On appelle produit vectoriel d'un vecteur libre $\overrightarrow{a}$ par un vecteur libre $\overrightarrow{b}$ et qu'on note par : $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}$

un vecteur libre $\overrightarrow{p}$, perpendiculaire au plan des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, de sens tel que le trièdre $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{p}$ soit direct et dont la grandeur est donné par :

$$p=a\cdot b\cdot\sin\theta$$

Le module de $\overrightarrow{p}$ correspond donc à l'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.



Il résulte de la définition que le produit vectoriel n'est pas indépendant de l'ordre des deux facteurs :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \text{ et } \vec{b} \wedge \vec{a} \text{ sont deux vecteurs opposée.}$$

On peut appliquer au produit vectoriel les règles ordinaires du calcul algébrique à condition de ne jamais intervertir l'ordre des facteurs.

Exemple :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b_1} + \vec{b_2}) = \vec{a} \wedge \vec{b_1} + \vec{a} \wedge \vec{b_2}$$

Exprimons en particulier le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{a'}$ de coordonnées X, Y, Z et X', Y' et Z'

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{a'} &= (X\,\vec{i} + Y\,\vec{j} + Z\,\vec{k}) \wedge (X'\,\vec{i} + Y'\,\vec{j} + Z'\,\vec{k}) \\ &= XX'\,\vec{i} \wedge \vec{i} + XY'\,\vec{i} \wedge \vec{j} + XZ'\,\vec{i} \wedge \vec{k} + YX'\,\vec{j} \wedge \vec{i} + YY'\,\vec{j} \wedge \vec{j} \\ &\quad + YZ'\,\vec{j} \wedge \vec{k} + ZX'\,\vec{k} \wedge \vec{i} + ZY'\,\vec{k} \wedge \vec{j} + ZZ'\,\vec{k} \wedge \vec{k} \end{aligned}$$

Or $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0$

et
$$\begin{cases} \vec{i} \wedge \vec{j} = -(\vec{j} \wedge \vec{i}) = \vec{k} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} = -(\vec{k} \wedge \vec{j}) = \vec{i} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} = -(\vec{i} \wedge \vec{k}) = \vec{j} \end{cases}$$

Il s'ensuit :

$$\vec{a} \wedge \vec{a'} = (YZ' - ZY')\,\vec{i} + (ZX' - XZ')\,\vec{j} + (XY' - YX')\,\vec{k}$$

Disposition pratique du calcul

$$\vec{a} \wedge \vec{a'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \end{vmatrix} = (YZ' - ZY')\,\vec{i} - (XZ' - ZX')\,\vec{j} + (XY' - YX')\,\vec{k}$$

V. 2. 6. Produit mixte

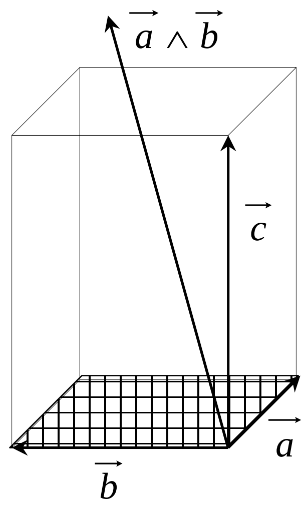
On appelle produit mixte de trois vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ une quantité scalaire m égale au produit scalaire du troisième vecteur et du produit vectoriel des deux premiers :

$$m = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Ce produit mixte donne le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Comme le volume du parallélépipède peut être évalué à partir d'un quelconque des faces, on a :

$$
\begin{aligned}
m &= (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} \\
&= (\vec{b} \wedge \vec{c}) \cdot \vec{a} \\
&= (\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{b}
\end{aligned}
$$



Comme le produit scalaire est commutatif, on peut écrire :

$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$

On peut donc intervertir la multiplication scalaire et la multiplication vectorielle.

V.2.7. Dérivée d'un vecteur

V. 2. 7. 1. Définition

Soit une variable t, supposons qu'à chaque valeur de t on sache faire correspondre un certain vecteur $\vec{a}$, on dit que ce vecteur est fonction de t : a(t). Analytiquement, cela veut dire que l'on se donne trois fonctions X(t), Y(t), Z(t) de la variable t qui sont les coordonnées du vecteur $\vec{a}$.

Considérons deux vecteurs $\vec{a}(t)$ et $\vec{a}(t+\Delta t)$ de la variable t ; il leur correspond deux valeurs du vecteur $\vec{a}$, on peut former leur différence qui est un certain vecteur $\overrightarrow{\Delta a}$. Ce vecteur $\overrightarrow{\Delta a}$ tend généralement vers zéro en même temps que Δt, mais le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{\Delta a}}{\Delta t}$ tend généralement vers une limite. Cette limite est un vecteur $\vec{a}\,'$ dérivée du vecteur $\vec{a}$; on écrit :

$$\vec{a}\,' = \frac{d\vec{a}}{dt}$$

On peut définir de la même façon $(\vec{a}\,')'$ qu'on appelle dérivée seconde du vecteur $\vec{a}$, et l'on écrit :

$$\vec{a}\,'' = \frac{d^2\vec{a}}{dt^2}$$

On voit immédiatement que les composantes de $\vec{a}\,'$ sont données par :

$$X' = \frac{dX}{dt}, \qquad Y' = \frac{dY}{dt}, \qquad Z' = \frac{dZ}{dt}$$

Il en est de même de la dérivée seconde du vecteur $\vec{a}$. Les composantes de $\vec{a}''$ sont données par :

$$X''=\frac{d^2X}{dt^2}, \qquad Y''=\frac{d^2Y}{dt^2}, \qquad Z''=\frac{d^2Z}{dt^2}$$

V. 2. 7. 2. Applications diverses

✓ Dérivée d'un produit scalaire :

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})'=\vec{a}'\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}'$$

Si $\vec{b}$ est constant $(\vec{a}\cdot\vec{b})'=\vec{a}'\cdot\vec{b}$ $\quad$ *car* $\vec{a}\cdot\vec{b}'=0$

✓ Si $\vec{a}$ est un vecteur de module constant a, son carré $\vec{a}^{\,2}=a^2=const$, sa dérivée qui est donnée par $\left(\vec{a}^{\,2}\right)'=2\,\vec{a}\,\vec{a}'=0$.

Le vecteur dérivée $\vec{a}'$ est donc toujours perpendiculaire au vecteur $\vec{a}$.

✓ On peut toujours définir un vecteur par $\vec{a}=a\,\vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire. Sa dérivée s'obtient par :

$$\vec{a}'=a'\,\vec{u}+a\,\vec{u}'$$

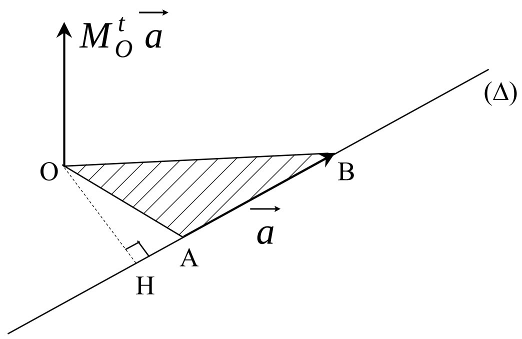
On voit donc que la dérivée de $\vec{a}$ est la somme de deux vecteurs dont le premier $a'\,\vec{u}$ est parallèle au vecteur $\vec{a}$, le second $a\,\vec{u}'$ lui est perpendiculaire.

V. 2. 8. Moment d'un vecteur par rapport à un point

Considérons un vecteur lié $\vec{a}$ d'origine A d'extrémité B porté par une droite (Δ) et un point (O).

On appelle moment du vecteur $\vec{a}$ par rapport au point O, un vecteur égal au produit vectoriel du vecteur $\overrightarrow{OA}$ par le vecteur $\vec{a}$:

$$\mathrm{M}_O^t\,\vec{a}=\overrightarrow{OA}\wedge\vec{a}$$



Son module est le double de l'aire du triangle OAB, son module est donc égal au produit de la grandeur a=AB par la distance OH du point O à la droite (Δ). On voit que sa grandeur, sa direction et son sens sont indépendants de la position de AB sur la droite (Δ). La notion de moment est donc relative à un vecteur glissant.

On peut noter deux théorèmes relatifs au calcul des moments :

1. le moment d'un vecteur $\overrightarrow{a}$ par rapport à un point (O') est égal à la somme de son moment par rapport au point (O) et du moment par rapport à (O'), d'un vecteur égal d'origine (O) :

$$\mathrm{M}^{t}_{O'}\overrightarrow{a} = \overrightarrow{O'A} \wedge \overrightarrow{a} = \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA}\right) \wedge \overrightarrow{a} = \overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{a} + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{a}$$

2. le moment de la somme de plusieurs vecteurs concourants est égale à la somme de leurs moments (Théorème de Varignon).

En désignant par A le point de concours des vecteurs glissants $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$,........

ce théorème traduit les égalités géométriques :

$$\mathrm{M}^{t}_{O}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + ...) = \overrightarrow{OA} \wedge (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + ...) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{a} + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{b} + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{c} + ...$$
$$= \mathrm{M}^{t}_{O}\overrightarrow{a} + \mathrm{M}^{t}_{O}\overrightarrow{b} + \mathrm{M}^{t}_{O}\overrightarrow{c} + ...$$

VI. Terminologie (المصطلحات)

Grandeur physique mesurable……………………..مقدار فيزيائي قابل للقياس
Grandeur physique repérable………………………مقدار فيزيائي غير قابل للقياس
Egalité………………………………………..….التساوي
Rapport……………………………………….....حاصل قسمة
Espèce…………………………………………...…فصيلة
Type………………………………………...…….نوع
Grandeur scalaire……………………………..….مقدار سلمي
Grandeur vectorielle………………………..…….مقدار شعاعي
Longueur…………………………………..…….طول
Masse……………………………………..……..كتلة
Vitesse……………………………………..…….سرعة
Accélération……………………………..……….تسارع
Unité de mesure…………………………………..وحدة القياس
Système international……………………………..نظام دولي
Intensité du courant électrique……………………شدة التيار الكهربائي
Vitesse angulaire……………..……………………سرعة زاوية
Force……………………………………………….قوة
Moment…………………………………………….عزم
Energie……………………………………………طاقة
Puissance…..………………………………………استطاعة
Travail……………………………………………..عمل
Quantité de chaleur………………………………..كمية حرارة
Pression……………………………………………ضغط
Horizontal…………………………………………أفقي
Normal,Perpendiculaire…………………………….عمودي/متعامد
Définition…………………………..……………..تعريف
Conventionnel……………………..………………اصطلاحي
Unité fondamentale…………………….………….وحدة أساسية
Moment d’inertie…………………………..………عزم العطالة
Homogène…………………………………………متجانس
Erreurs……………………………………………..أخطاء
Incertitudes………………………….…………….ارتيابات
Absolu……………………………...……………..مطلق
Relatif…………………………………….……….نسبي
Variable…………………………………………....متغير
Equation différentielle………………….…………معادلة تفاضلية
Vecteur...شعاع
Origine…………………………………………….مبدأ
Direction…………………………………………..حامل
Sens……………………………………….……….اتجاه
Module…………………………………………….معيار/طويلة
Opposé…………………………………………….معاكس
Composantes………………………………………إحداثيات
Coordonnées……………………………………....إحداثيات
Projections…………………………………..……إسقاطات
Produit scalaire…………………………..………..جداء سلمي
Produit vectoriel…………………………………..جداء شعاعي
Derivée de vecteur………………………………..مشتقة شعاع
Axe……………………………………...……….محور