Chapitre III

Conducteurs électriques

I. Conducteurs en équilibre électrostatique

I.1. Définition

- Un conducteur est un corps à l'intérieur duquel les charges libres peuvent se déplacer.

- Un conducteur est dit en équilibre électrostatique si toutes ses charges sont immobiles ; c'est-à-dire que les charges intérieures ne sont soumises à aucune force.

I.2. Propriétés des conducteurs en équilibre

a- Le champ électrique est nul à l'intérieur d'un conducteur en équilibre

Si E n'était pas nul, chaque charge libre serait soumise à une force $\vec{F} = q\vec{E}$, et se déplacerait : le conducteur ne serait plus en équilibre.

Pour la même raison, le champ à la surface du conducteur doit être perpendiculaire à cette surface, car s'il y avait une composante parallèle, les charges libres migreraient sur la surface du conducteur.

b- Le conducteur en équilibre constitue un volume équipotentiel

En effet, la différence de potentiel (ddp) entre deux points quelconques M et M' est définie par $dV = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{MM'}$, or E=0 pour un conducteur en équilibre $\Rightarrow$ V=cte.

Comme le potentiel est le même en tous les points du conducteur, la surface externe est une surface équipotentielle. On retrouve bien que le champ est normal à cette surface.

c- La charge est nulle en toute région interne au conducteur. La charge est localisée en surface

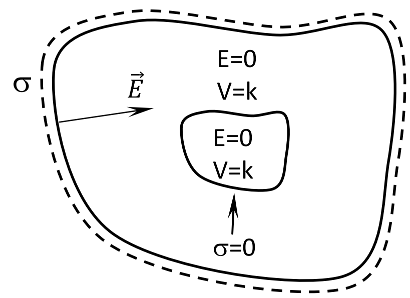
Le champ E est nul en tout point M intérieur au conducteur, le flux $\Phi = \int \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}$ est donc nul à travers toute surface fermée intérieure au conducteur et entourant M. D'après le théorème de Gauss, la charge intérieure à cette surface est nulle.

Les charges se répartissent donc uniquement sur la surface du conducteur (en réalité une surface occupant une épaisseur de quelques couches d'atomes).

<u>*Remarque*</u>

Les mêmes résultats sont encore valables pour un conducteur creux. Le champ est nul dans le conducteur et la cavité qui constitue un même volume équipotentiel.

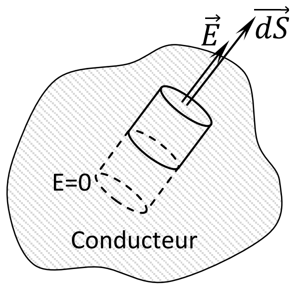
Les charges sont localisées à la surface externe du conducteur.



d- Relation entre le champ au voisinage immédiat d'un conducteur et la charge électrique superficielle

Le flux électrique se compose de 3 termes :

- Flux à travers la surface latérale (nul) ($\vec{E} \perp \overrightarrow{dS}$)
- Flux à travers la base intérieure (nul) (E=0)



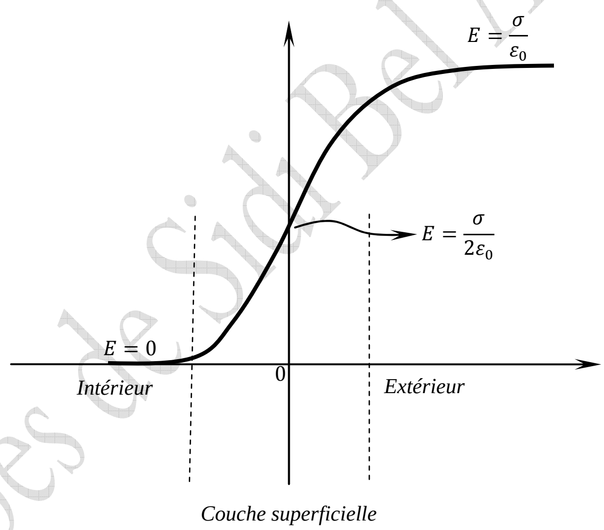
- Seule subsiste le flux à travers la base extérieure : $d\Phi = E \cdot dS$

Par ailleurs, si σ est la densité superficielle de charge, la charge contenue dans le cylindre est :

$$dq = \sigma\ dS$$

En appliquant le théorème de Gauss :

$$EdS = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



e- Pression électrostatique

Les charges à la surface d'un conducteur sont soumises à des forces répulsives de la part des autres charges. La force exercée par unité de surface, ou pression électrostatique, peut se calculer en multipliant le champ électrique moyen sur la surface du conducteur par la charge par unité de surface.

Le champ électrique moyen est d'après ce qui précède :

$$E_m = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

La pression électrostatique vaut :

$$p = \sigma\ E_m = \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}$$

I.3. Capacité propre d'un condensateur seul dans l'espace

Sur un conducteur isolé dans l'espace, déposons une charge q : il en résulte en tout point de l'espace une charge q'=αq, on aura en tout point de l'espace, un champ $\overrightarrow{E'} = \alpha \vec{E}$, puisque E et q sont proportionnels et ceci est vrai en particulier sur le conducteur dont le potentiel est V.

On écrit ceci sous la forme :

$$Q = C\,V$$

La constante de proportionnalité C est appelée capacité propre du condecteur isolé :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Coulomb}{Volt} = \text{Farad}$$

Le farad est une unité très grande, on utilise des sous multiples :

- ✓ le microfarad : 10^{-6} F (µF)
- ✓ le nanofarad : 10^{-9} F (nF)
- ✓ le picofarad : 10^{-12} F (pF)

<u>Exemple</u>

Calcul de la capacité propre d'un conducteur sphérique.

Soit une sphère de rayon R. En un point quelconque situé à une distance r du centre, le potentiel est donné par : $V = K\frac{Q}{r}$

Sur la surface de la sphère (r=R), $V = K\frac{Q}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$ d'où $C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R$

<u>Ordre de grandeur</u>

- La capacité de la terre (R=6400Km) est c=710 µ F
- Une sphère de 10 cm de rayon, portée à un potentiel de 1000 V par rapport au sol, emmagasine une charge de 10 nC (sa capacité étant de 10 pF)

I.4. Energie interne d'un conducteur chargé seul dans l'espace

Soit C la capacité propre du condensateur, Q sa charge et V son potentiel dans un état d'équilibre donné.

- L'énergie interne est mesurée par le travail qu'il faut fournir pour charger le conducteur
- Ou bien par le travail des forces électrostatiques mis en jeu au cours de la décharge du conducteur
- Ou encore, elle représente la somme des variations d'énergie potentielle subies par toutes les charges au cours de la charge du conducteur.

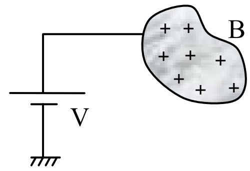
Partant de l'énergie potentielle élémentaire donnée

$$\begin{aligned} dE_p &= v\,dq \quad \Rightarrow \\ or \quad q &= C\,v \quad ; \end{aligned} \qquad \left.\begin{aligned} E_p &= \int_0^Q v\ dq \\ v &= \frac{q}{C} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \qquad E_p = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

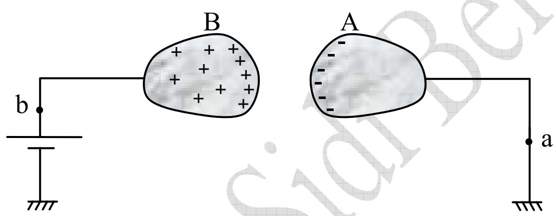
Il s'ensuit donc que : $E_p = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}Cv^2 = \frac{1}{2}Qv$ (Cette énergie est positive >0)

II. Condensateurs

Un condensateur B de capacité C est maintenu à un potentiel constant V (V>0 par exemple). Il porte, donc, une charge Q, telle que Q=C v



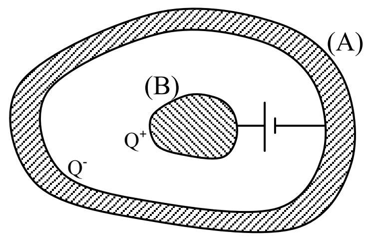
Approchons de B un conducteur A maintenu à un potentiel constant (0 par exemple).
B influence A sur le quel apparaissent des charges négatives.
Ces charges <0 influencent à leurs tour le conducteur B sur lequel de nouvelles charges >0 apparaissent.



Il n’y a pas eu, proprement parlé, créations de charges sur B, c’est le générateur qui en a assuré le transport.
Ainsi, à l’équilibre, du fait de la présence de A, le conducteur B porte plus de charge que lorsqu’il était seul. Il y a eu condensation de l’électricité sur B et sa capacité a augmenté.
On obtient donc un condensateur (formé des condensateurs A et B), représenté schématiquement par :

En pratique, on réalise un condensateur en utilisant 2 conducteurs en influence totale. Les charges Q_a et Q_b sont égales et de signe contraire.

$|Q_a| = |Q_b| = Q$ charge du condensateur



Si V est la différence de potentiel entre A et B, on peut montrer que Q=C V

$$\frac{Q}{V} = Constante = C \text{ (Capacité du condensateur)}$$

II. 1. Calcul de la capacité d’un condensateur

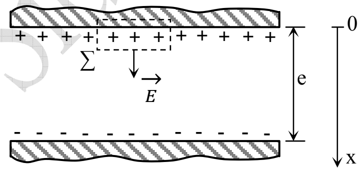
Méthode

- Calculer le champ en tout point intérieur au condensateur
- Déduire, par circulation du champ, la différence de potentiel entre les condensateurs
- Effectuer le rapport $\frac{Q}{V} = C$

Exemples

a. Condensateur plan

Il est constitué théoriquement de deux conducteurs dont les faces en regard sont des plans parallèles indéfinis en influence total. En pratique, il suffira que l’épaisseur e, soit petite par rapport à la dimension des plaques



× $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = cste$ (théorème de Gauss, surface $\sum$)

× $dv = -\vec{E}\vec{dl} = -E\ dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\ e \qquad (\sigma = \frac{Q}{S})$

× $C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$

b. Condensateur cylindrique

Il est composé de deux cylindres coaxiaux, rayons R_1 et R_2 avec $R_2>R_1$.

$\sum$ est la surface de gauss,

$\sum$ est un cylindre de rayon r avec $R_1<r<R_2$

Théorème de gauss :

$\phi = \iint \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{Q}{\epsilon_0}$

$\phi = \phi_{SB} + \phi_{SL}$, ϕ_{SB}: flux dans la surface de base

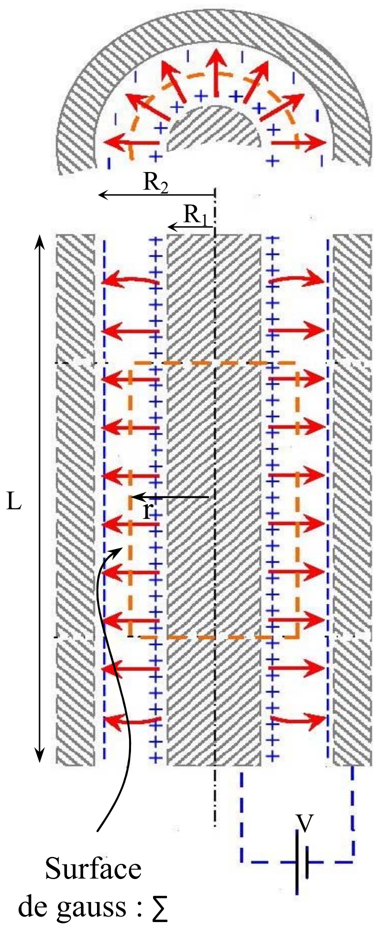
ϕ_{SL} : flux dans la surface latérale

$\phi = \phi_{SL} = \iint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS_L} = E\ S_L = 2\pi r\ L = \frac{Q}{\epsilon_0}$

$\Longrightarrow E = \frac{Q}{2\pi r\ L\epsilon_0}$

$\vec{E} = \overrightarrow{grad}V \Longrightarrow \vec{E} = \frac{-dV}{\vec{dr}}$

$\Longrightarrow dV = -\vec{E}\vec{dr} = -Edr$



$$\int_1^2 -dV = \int_{R_1}^{R_2} Edr \Longrightarrow V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi r\, L\epsilon_0} dr$$

$$\Longrightarrow V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi L\epsilon_0} Log\ \frac{R_2}{R_1}$$

La capacité est donnée par $C = \frac{Q}{V}$

$$V = V_1 - V_2 \Longrightarrow C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi L\epsilon_0}{Log\frac{R_2}{R_1}}$$

D'autre part, on sait que R_2-R_1=e, puisque e est très faible, on peut admettre que $R_2 \approx R_1$=R.

Il vient :

$$Log\ \frac{R_2}{R_1} = Log\ \frac{R+e}{R} = Log\ \left(1 + \frac{e}{R}\right)$$

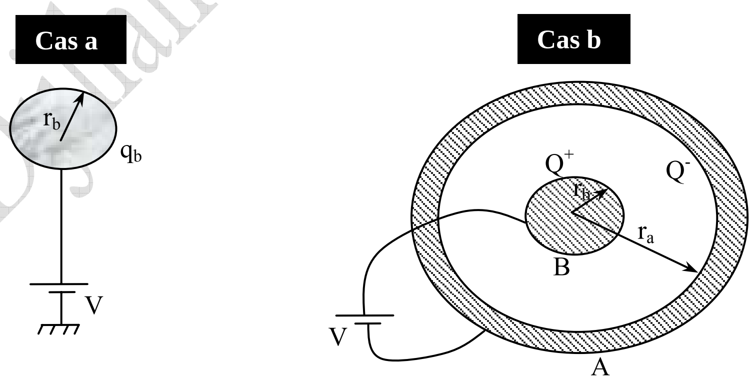
Etant donné que $Log\ (1+\epsilon)$ et $\frac{e}{R} \cong \epsilon,\ alors$

$$Log\left(1 + \frac{e}{R}\right) \cong \frac{e}{R} \Longrightarrow C = \frac{2\pi\epsilon_0 LR}{e}$$

S=$2\pi LR$: la surface de l'armature, il vient $C = \frac{S\epsilon_0}{e}$

Remarque

Deux conducteurs en influence (condensateur) ont une capacité plus grande qu'un conducteur de surface équivalente. L'exemple suivant prouve cette affirmation :



__Cas (a)__

Une sphère de rayon r_b, portée à un potenetiel V par rapport au sol, porte une charge :

$$q_b = 4\pi\epsilon_0 r_b V$$

$$C = \frac{Q}{V} \Longrightarrow C = \frac{q_b}{V}_b = 4\pi\epsilon_0 r_b$$

<u>Cas (b)</u>

Condensateur sphérique

$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2} = k\frac{Q}{r^2}$ $\qquad$ ($r_b<r<r_a$)

V, pris identique au cas (a), est donné par :

$V_A - V_B = V = kQ\frac{r_a - r_b}{r_a r_b}$

$$\left.\begin{aligned} Q &= \frac{r_a r_b V}{k(r_a - r_b)} \\ or\ V &= \frac{q_b}{4\pi\epsilon_0 r_b} = k\frac{q_b}{r_b} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow Q = \frac{r_a}{r_a - r_b} q_b > q_b$$

Ainsi, avec un même générateur de tension, la charge Q emmagasinée sur le condensateur est supérieur à celle de la sphère B seule et ceci d'autant plus que les conducteurs A et B sont plus rapprochés.

II.3. Energie électrique d'un condensateur

Elle se calcule de la même manière que dans le cas des conducteurs

$$w = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

II.4. Associations de condensateurs

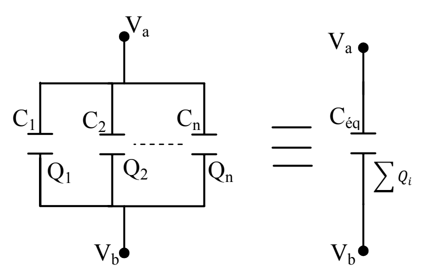
II.4.1. Association en parallèle

Tous les condensateurs sont soumis à la même ddp :V, ils portent alors les charges

$Q_1=C_1V$, $Q_2=C_2V$, ……….. $Q_n=C_nV$

$\sum Q_i = \sum C_i V$, tout se passe comme si on avait un seul condensateur de capacité $C_{éq} = \sum C_i$ et qui emmagasinerait une charge $Q = \sum Q_i$

$$\boldsymbol{C_{éq} = \sum C_i}$$



II.4.1. Association en série

Il apparait sur chaque condensateur une charge Q et par suite, on peut écrire

$Q=C_1V_1 \quad \Rightarrow \quad V_1=Q/C_1$

$Q=C_2V_2 \quad \Rightarrow \quad V_2=Q/C_2$

.

.

.

.

.

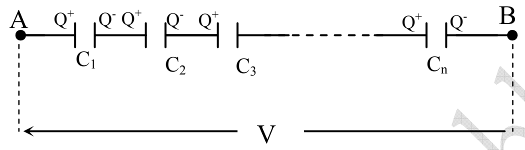
$Q = C_n V_n \quad \Rightarrow \quad V_n = Q/C_n$

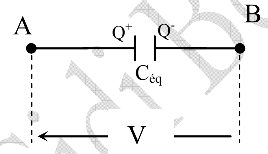
$V = V_1 + V_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots V_n$

$= Q\,(1/C_1 + 1/C_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1/C_n)$

$= Q/C_{éq}$

Et par suite : $$\frac{1}{C_{éq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots \frac{1}{C_n}$$





III. Application

Exercice

Un condensateur plan a des armatures de surface « S » et distance « e ». On applique entre les deux plaques une différence de potentiel V_0=500 V. en intercalant entre les deux plaques une lame d'un diélectrique de permittivité ε_r, la ddp passe à V_1=100 V.

1. Calculer la capacité du condensateur après introduction du diélectrique puis en déduire la valeur de ε_r.
2. Déterminer la charge q_i induite sur chacune des faces du diélectrique.

On donne : S=400 cm^2 et e=5 mm.