Chapitre II

Champ et Potentiel Electrique

I. Rappel sur le champ et potentiel gravitationnel

✹ *Champ*

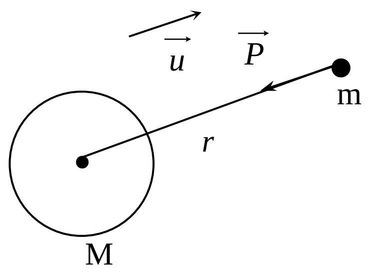
Il est bien établi qu'une masse m, située à une distance r du centre de la terre, est soumise à une force correspondant à son poids. Cette force est donnée par:

$$\vec{P} = -k\frac{M\,m}{r^2}\vec{u}$$

(k= 6.67 10^{-11} S.I.)

Il est possible aussi, d'écrire cette même force, sous la forme:

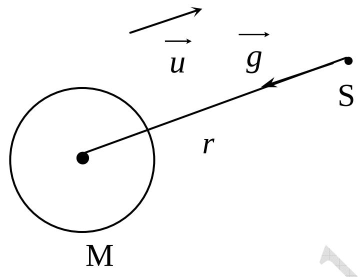
$$\vec{P} = m\,\vec{g}$$



En introduisant le vecteur champ de gravitation $\vec{g}$

donné par: $\vec{g} = -k\dfrac{M}{r^2}\vec{u}$

Ce vecteur décrit l'état gravitationnel de chaque point de l'espace indépendamment de la masse m qui peut y être placée.



✷*Potentiel*

Une masse m, située en un point S dans le champ de pesanteur terrestre, possède une énergie potentielle E_p.

Une force dérive d'un potentiel si le travail w de cette force est indépendant du chemin suivi.

$$w_{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl} = E_p(x_A, y_A, z_A) - E_p(x_B, y_B, z_B)$$

C'est le cas du poids d'un corps $\vec{P}$. L'énergie potentielle gravitationnelle E_P se calcule par :

$$dE_P = -dw = -\vec{P}\,\vec{dl} = -k\frac{Mm}{r^2}\vec{u}\,\vec{dl} = k\frac{Mm}{r^2}dr$$

$$= -k\frac{Mm}{r} + cte$$

que l'on peut l'écrire

$$E_p = mU \qquad avec\ U = -k\frac{M}{r} + cte' \qquad (potentiel)$$

La relation entre $\vec{g}$ et U est donnée par:

$$dU = -\vec{g}\,\vec{dl} \qquad ou\ encore \qquad \vec{g} = -\frac{dU}{\vec{dl}}$$

c'est-à-dire $\vec{g} = -\overrightarrow{grad}U$

II. Champ et Potentiel créés par des charges électriques

II.1. Charge ponctuelle unique

Considérons une charge ponctuelle Q immobile, dans son voisinage, toute charge q subit une force :

$$\vec{F} = k\frac{Q\,q}{r^2}\vec{u} \qquad\qquad (loi\ de\ Coulomb)$$

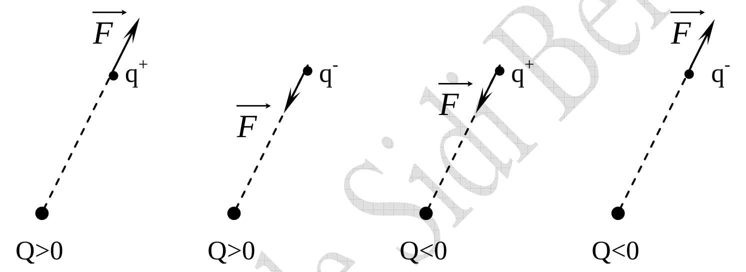
Les charges peuvent être positives ou négatives. Deux charges positives (ou négatives) se repoussent, deux masses s'attirent, ce qui explique la différence de signe par rapport à la loi de Newton.

Comme dans le cas du phénomène de gravitation, nous pouvons par similitude définir les grandeurs suivantes:

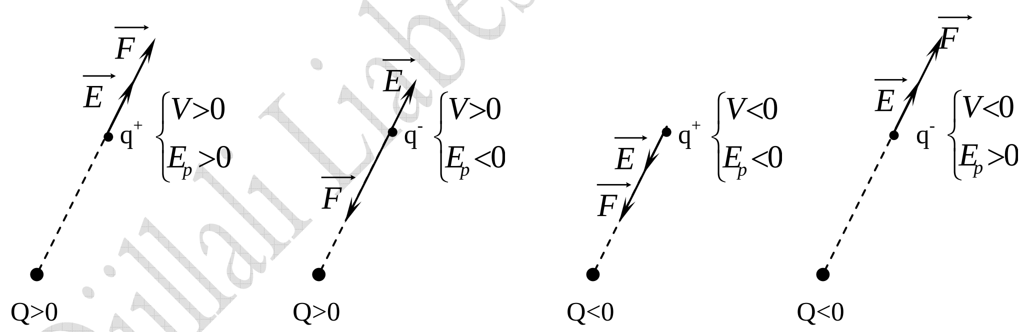
✹ <u>*Force électrique:*</u>

$$\vec{F} = k\frac{Q\,q}{r^2}\vec{u}$$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$



✹ <u>*Champ électrique, Potentiel électrique:*</u>



$$\vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\vec{u}$$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$V = k\frac{Q}{r} + cte$$

$$E_p = qV$$

<u>Remarque</u>

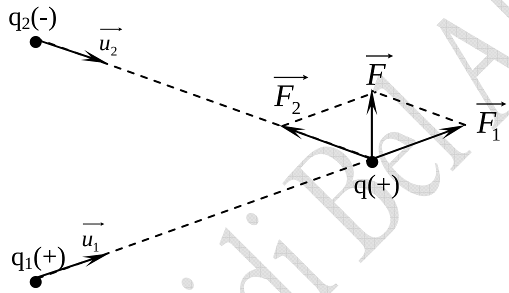
- Le vecteur champ électrique $\vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\vec{u}$ est défini comme la force agissant sur la charge unité placée en un point.

- Le potentiel électrique $V = k\dfrac{Q}{r} + cte$ est défini comme l'énergie d'une charge unité placée en un point.

II.2. Cas de deux charges ponctuelles (Principe de superposition)

Considérons le cas de deux charges ponctuelles fixes q_1 et q_2 agissant sur une troisième charge q.

L'action conjuguée de q_1 et q_2 sur q est la somme des actions de q_1 et q_2 agissant séparément.

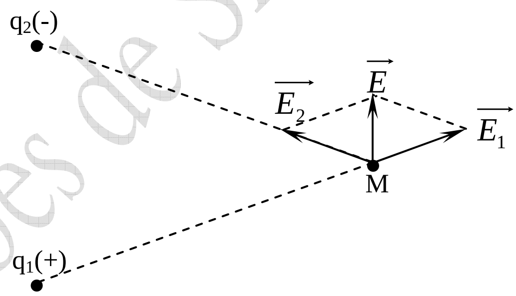


Composition des forces

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = k\frac{q_1\, q}{r_1^2}\overrightarrow{u_1} + k\frac{q_2\, q}{r_2^2}\overrightarrow{u_2}$$

$$= q(\overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2}) = q\vec{E}$$

Le champ $\vec{E}$ créé en un point M par deux charges ponctuelles est la somme des deux champs $\overrightarrow{E_1}$ *et* $\overrightarrow{E_2}$ créés par chacune des charges q_1 et q_2.



Composition des champs

Le potentiel en M se calcule en additionnant les potentiels créés en ce point par chacune des charges q_1 et q_2 : $V=V_1+ V_2$

Une charge q placée en M possède une énergie potentielle $E_p=qV=q(V_1+ V_2)$

II.3. Généralisation

✹ *Cas de n charges ponctuelles* $q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots q_n$

Le champ se calcule par : $\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} k\dfrac{q_i}{r_i^2}\overrightarrow{u_i}$

Le potentiel est donné par : $V = \sum_{i=1}^{n} k\dfrac{q_i}{r_i} + cte$

✹ *Cas d'une distribution continue de charges réparties en surface ou en folume*

✓ *cas d'une surface*

si $\sigma = \dfrac{dq_i}{ds}$ (densité superficielle de charge), alors:

$$\vec{E} = k\iint_S \sigma \frac{ds}{r_i^2}\vec{u_i}$$

$$V = k\iint_S \sigma \frac{ds}{r_i} + c$$

✓ *cas d'un volume*

si $\rho = \frac{dq_i}{dv}$ (densité volumique de charge), alors:

$$\vec{E} = k\iiint_v \rho \frac{dv}{r_i^2}\vec{u_i}$$

$$V = k\iiint_v \rho \frac{dv}{r_i} + cte$$

II.4. Passage du champ au potentiel et du potentiel au champ

A chaque point de l'espace M(x, y, z) sont associés deux fonctions, l'une vectorielle et l'autre scalaire, qui permettent de décrire l'espace électrique:

Le champ $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$; le potentiel $V = V(x, y, z)$

On sait que:

$$-dV = \vec{E}\,\vec{dl} = E_x\,dx + E_y\,dy + E_z\,dz$$

cela permet de calculer V à partir du champ $\vec{E}$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

Par identification:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

On écrit séparément:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$$

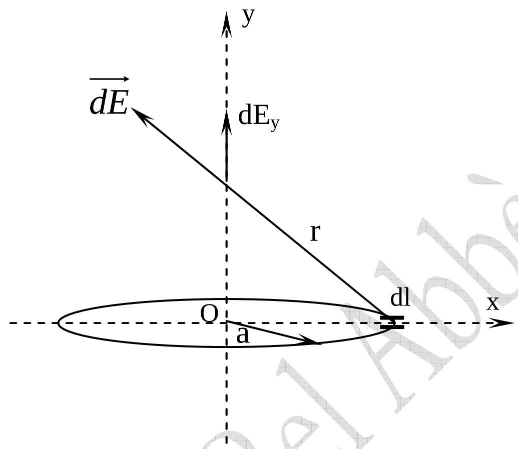
II.5. Exemple de calcul de champ et de potentiel électrique

✷ *Champ et potentiel créé circonférence uniformément électrisé*

Soit une charge q uniformément répartie, avec une densité linéiqueλ, sur une circonférence de centre O et de rayon a.

Un élément **dl** de circonférence

$$dE = \frac{kdq}{r^2} = k\frac{\lambda\, dl}{x^2 + y^2}$$



en raison de la symétrie sur oy

le champ total créé par la circonférence

et $E = E_y = \int dE_y = \int dE \cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{y}{\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}}$$

$$E = \int_0^{2\pi a} \frac{k\,\lambda\, y\, dl}{\left(a^2 + y^2\right)^{3/2}} = \frac{k\, y\,\lambda\, 2\pi a}{\left(a^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

on sait que $q = \lambda\, 2\pi\, a$

alors, $$E = \frac{k\, q\; y}{\left(a^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right)$$

ou $\vec{E} = \overrightarrow{E_y}$, une seule composante

$$\Rightarrow \quad E_y = E = -\frac{dV}{dy} \qquad \Rightarrow \quad V = \int dV = -\int E\, dy$$

$$V = -\int \frac{k\, a\, y}{(a^2 + y^2)^{3/2}}\, dy = -\, k\, a \int \frac{y}{(a^2 + y^2)^{3/2}}\, dy$$

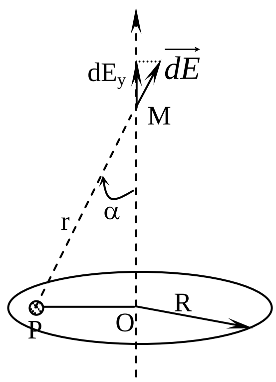
$$\Rightarrow \qquad V = \frac{k\, q}{(a^2 + y^2)^{1/2}} + cte$$

✷ ***Champ et potentiel créé par un disque circulaire uniformément électrisé***

Champ

Un élément de surface dS, centré en P, porte charge:

$$dq = \sigma\, ds$$



Cet élément de surface créé au point M, situé sur l'axe,

Un champ $\overrightarrow{dE}$ donné par:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\, ds}{r^2}$$

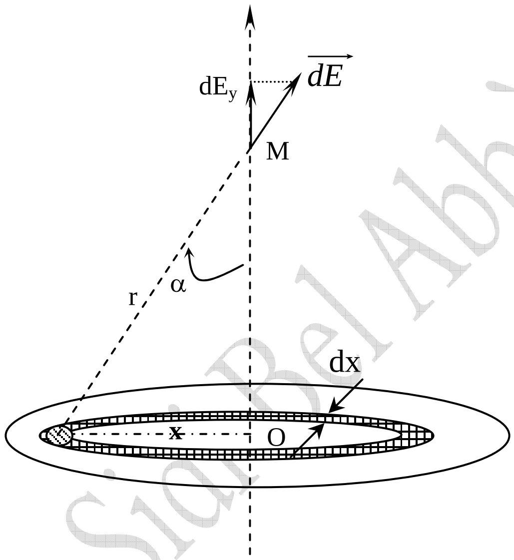
Ce champ est porté par PM, mais le champ total,

par raison de symétrie, est porté par Oy. En conséquence:

$$E = \int dE_y = \int dE \cos\alpha$$

Soit une couronne circulaire comprise entre les cercles de rayon x et x+dx et portant la charge:

$$dq = \sigma\, 2\pi\, x\, dx$$



Cette charge constitue un champ:

$$dE_y = k\frac{\sigma\, 2\pi\, x\, dx}{r^2}\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\, 2\pi\, x\, dx}{r^2}\frac{y}{r}$$

$$dE_y = \frac{\sigma\, y}{2\varepsilon_0}\frac{x\, dx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

On obtient E, en sommant dE_y pour toutes les valeurs de x comprises entre O et R

$$E = \int_0^R dE_y = \frac{\sigma\, y}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{x\, dx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = \left[-\frac{\sigma\, y}{2\varepsilon_0}\left(x^2+y^2\right)^{1/2}\right]_{x=0}^{x=R} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{y}{\left(R^2+y^2\right)^{1/2}}\right)$$

<u>Cas particulier</u>

✓ Si le point M est au centre du cercle: $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

✓ Si R $\rightarrow \infty$, le disque devient un plan de dimension infinie et quelque soit la position de M, le champ et constant : $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

<u>Potentiel</u>

La couronne crée en M un potentiel : $dV = k\dfrac{dq}{r}$

C'est-à-dire : $V = k\displaystyle\int_{x=0}^{x=R}\frac{\sigma\, 2\pi\, x\, dx}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\left(x^2+y^2\right)^{1/2}\right]_{x=0}^{x=R} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\left(R^2+y^2\right)^{1/2}-|y|\right]$

Il est possible d'en déduire le champ par:

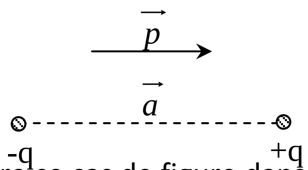
$$E = -\frac{dV}{dy} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{y}{\left(R^2+y^2\right)^{1/2}}\right)$$

III. Dipôle électrique

III.1. Définition

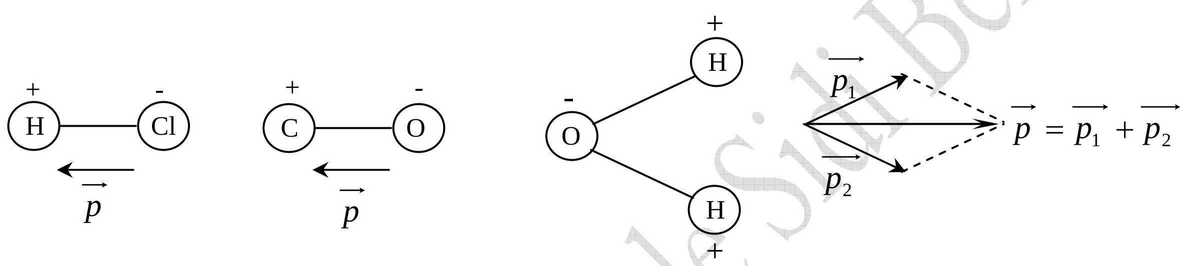
Il est constitué par l'arrangement de deux charges ponctuelles égales de signes différents.

Le moment électrique dipolaire est défini par:



$$\vec{p} = q\vec{a}$$

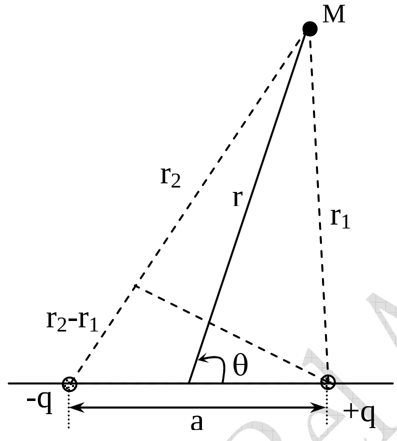
Cette étude particulière est justifiée, car on rencontre ce cas de figure dans certaines molécules (Ex: HCl, H_2O, CO, etc…………)



Moment dipolaire de certaines molécules polaires

Molécule	p (C.m)
HCl	$3{,}43\ 10^{-30}$
HBr	$2{,}60\ 10^{-30}$
HI	$1{,}26\ 10^{-30}$
CO	$0{,}40\ 10^{-30}$
H_2O	$6{,}2\ 10^{-30}$
H_2S	$5{,}3\ 10^{-30}$
SO_2	$5{,}3\ 10^{-30}$
NH_3	$5{,}0\ 10^{-30}$
C_2H_5OH	$3{,}6\ 10^{-30}$

III. Potentiel et Champ créés par un dipôle à grande distance



Le potentiel au point M dû au dipôle s'écrit:

$$V = k\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right) = kq\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right)$$

Si la distance r est grande par rapport à a,

on peut écrire:

$r_2 - r_1 \approx a\cos\theta$ et $r_1 r_2 \approx r^2$

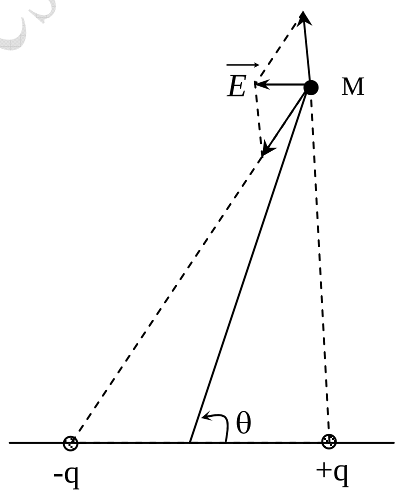
et l'on aura:

$$V = kq\frac{a\cos\theta}{r^2} = k\,qa\,\frac{\cos\theta}{r^2} = k\,p\,\frac{\cos\theta}{r^2} \qquad (p = qa)$$

Le champ est donné par: $dV = -\vec{E}\,\vec{dl}$

On fera les calculs en coordonnées polaires.

A prendre en considération que le gradient d'une fonction f s'exprime par:



En coordonnées cartésiennes:

$$\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

En coordonnées polaires:

$$\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{\theta}\frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Il vient

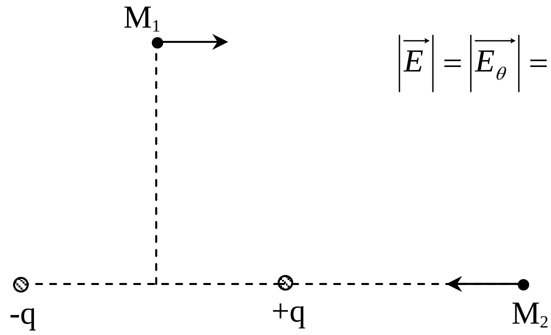
$$\vec{E}\begin{cases} E_r \\ E_\theta \end{cases} \qquad \vec{dl}\begin{cases} dl_r = dr \\ dl_\theta = r\,d\theta \end{cases}$$

$$dV = -\vec{E}\,\vec{dl} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} dV = -(E_r\,dr + E_\theta\,r\,d\theta) \\[2ex] dV = \dfrac{\partial V}{\partial r}dr + \dfrac{\partial V}{\partial \theta}d\theta \end{cases}$$

Par identification, on aura:

$$\begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \end{cases} \qquad V = k\,p\,\frac{\cos\theta}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} = \dfrac{2k\,p\cos\theta}{r^3} \\ \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = \dfrac{k\,p\sin\theta}{r^3} \end{cases}$$

<u>Positions particulières:</u>

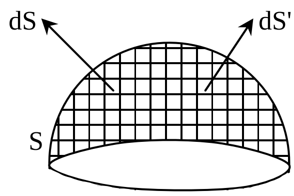


$$\left|\vec{E}\right| = \left|\overrightarrow{E_\theta}\right| = \left|\frac{2k\,\vec{p}}{r^3}\right| \qquad (\theta = \pi/2)$$

$$\left|\vec{E}\right| = \left|\overrightarrow{E_r}\right| = \left|\frac{2k\,\vec{p}}{r^3}\right| \qquad (\theta = 0)$$

IV. Flux du champ électrique: Théorème de Gauss

IV.1. Représentation d'une surface



On décompose (S) en élément dS très petits;

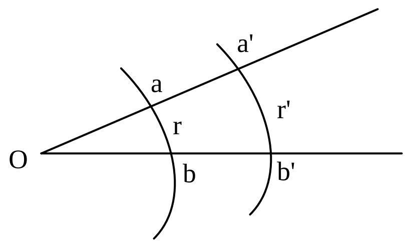
chaque élément dS est représenté par un vecteur $\overrightarrow{dS}$:

- appliqué sur dS
- de grandeur dS
- dirigé selon la normale au plan dS
- sur une direction arbitraire qui sera conservée pour tous les éléments de S.

Ainsi : $S = \iint \left|dS\right|$

IV.2. Angle solide

✓ *<u>Angle dans le plan</u>*



$\overset{\frown}{ab}$: longueur de l'arc

$\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{ab}}{r} = \dfrac{\overset{\frown}{a'b'}}{r'}$ est indépendant de r

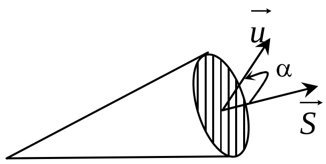
au maximum : $\alpha = \dfrac{2\pi r}{r} = 2\pi$

$[\alpha] = radian$: rad

✓ *Angle solide*

Par analogie avec ce qui précède, on définit l'angle solide Ω comme ayant pour mesure la surface S interprétée sur la sphère de rayon unité.

$[\Omega] = stéradian$: st



$$\Omega = \frac{\vec{S}\,\vec{u}}{r^2} = \frac{S\cos\alpha}{r^2}$$

Pour une surface d'orientation normale:

$$\Omega = \frac{S}{r^2} \qquad (\alpha = 0)$$

Cette définition conduit au résultat suivant :

- pour tout l'espace : $\Omega = \frac{S}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \;\; st$

- Une calotte sphérique de centre O de rayon r a une surface telle que :

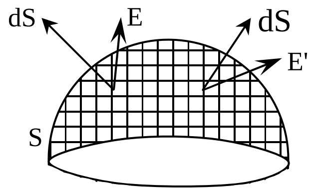
$$S = \Omega\, \mathrm{r}^2$$

- Si l'angle solide est petit : $dS = d\Omega\ \mathrm{r}^2$

- Soit $d\sum$ une surface s'appuyant, autour de M, sur le même angle solide $d\Omega$, et dont le plan fait un angle θ avec celui de dS, on a $dS = d\sum cos\theta$

$\Rightarrow$ $$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \frac{d\sum cos\theta}{r^2}$$

IV. 3. Flux du vecteur champ électrostatique



- On appelle flux de $\vec{E}$ à travers dS, élément de S, la quantité scalaire positive ou négative :

$$d\Phi = \vec{E}\ \cdot \vec{dS}$$

- Le flux total de $\vec{E}$ à travers S est l'intégrale sur toute la surface :

$$\Phi = \iint_S d\Phi = \iint_S \vec{E}\ \cdot \vec{dS}$$

Remarque

Dans le cas général, $\vec{E}$ varie d'une surface élémentaire à l'autre.

IV. 4. Théorème de Gauss

Le flux du champ électrique à travers une surface fermée entourant des charges q_i est :

$$\boldsymbol{\Phi} = \iint_S \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{\sum \boldsymbol{q_i}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$$

$\sum \boldsymbol{q_i}$ **: représente la somme algébrique des charges intérieures.**

IV. Applications

Exercice 01

Calculer le champ électrique E créé par une charge ponctuelle q en un point distant de r par rapport à celle-ci.

Exercice 02

Etudier le champ électrique créé par une charge distribuée uniformément sur un plan infini. σ est la densité superficielle de cette charge.

Exercice 03

Etudier le champ électrique créé par une distribution sphérique de charges. On prendra en considération le cas d'une sphère de rayon a et de charge totale Q. la distribution de charge est soit superficielle (σ=cte) ou volumique (ρ=cte).

Exercice 04

On définit trois sphères concentriques de rayons « a », « b » et « c », tels que a<b<c. La sphère de rayon « a » est chargée en surface avec une répartition surfacique constante « σ ». Le volume compris entre les sphères de rayons « b » et « c » est chargé en volume avec une répartition volumique constante « ρ ».

1. Calculer le champ électrique « E » créé en tout point de l'espace en fonction du rayon « r » (r variant de 0 à l'infini)
2. Tracer l'allure de « E » en fonction de r.

<u>Rq</u> : on prendra $\rho = \dfrac{3\sigma a^2}{b^3}$ pour tout l'exercice.