Faculté de Médecine d'Oran
Service de Biostatistique

Variable aléatoire discrète. lois usuelles de probabilité: loi de bernouilli, loi binomiale , loi de poisson

ANNEE UNIVERSITAIRE
2015/2016

1

Variables aléatoires discrètes

Introduction

2

Dans la plupart des phénomènes aléatoires,
le résultat d'une épreuve peut se traduire
par une « grandeur » mathématique, très souvent représentée par
un nombre entier ou un nombre réel.
La notion mathématique qui représente efficacement ce genre de situation concrète est celle
de la **variable aléatoire (notée également v.a.).**

- le nombre de consultants par séance
- le nombre d'enfants dans un couple

sont des exemples de variables aléatoires.

3

Définition

Une variable aléatoire est dite **discrète si elle ne prend que des valeurs discontinues.**

L'ensemble des nombres entiers est discret.

En règle générale, toutes les variables qui résultent d'un **dénombrement ou d'une numération sont** de type discrètes.

4

En résumé: on dit que x est une variable aléatoire si sa valeur est fixée par le **résultat d'une épreuve** et une variable discrète si elle ne peut prendre que des **valeurs isolées**.

Soit x une variable pouvant prendre l'ensemble des valeurs :

$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ x_n,$

avec les probabilités

$p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ p_n,$

respectivement, telles que :

$p_1+p_2+p_3+p_4+\ldots\ldots\ldots\ldots+p_n = \Sigma Pi = 1$

5

Loi de probabilité :

- On dit qu'on a définit une loi de probabilité (fonction de distribution) d'une variable aléatoire discontinue si on arrive à déterminer toutes les valeurs que peut prendre la variable xi et toutes les probabilités correspondantes Pi.
- On peut présenter une loi de probabilité par un ensemble des couples de valeurs associées de xi et Pi, au moyen d'un tableau

x_i	X_1 X_2 X_3............X_n	Σ
P_i	P_1 P_2 P_3 P_n	1

6

<u>Exemple 1 :</u> On jette un dé équilibré <u>une seule fois.</u>
Soit x la variable aléatoire désignant le nombre de points obtenus.
1-Déterminer la loi de probabilité de cette variable.
2-Représenter graphiquement cette loi
<u>Réponse :</u>
1-Loi de probabilité :

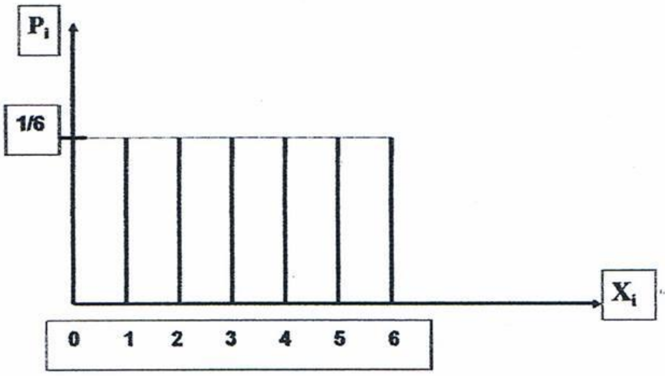
x_i	1	2	3	4	5	6	Σpi
P_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

Connaissant toutes les valeurs possibles de la variable xi et les valeurs correspondantes de Pi, on a donc défini la loi de probabilité de cette variable.

7

Représentation graphique de la Loi de Probabilité

- En portant les valeurs de Xi en abscisses et celles des Pi en ordonnées, on obtient un **digramme en bâtons**



8

Exemple 2: On lance une **paire de dés (2)**.
Soit x la somme des points obtenus de chaque face.
A- Déterminer la loi de probabilité de cette variable.
B- Construire le graphe correspondant.

Réponse :

On peut dénombrer tous les cas possibles en construisant le tableau suivant :

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

On remarque que les valeurs possibles de x sont toutes les valeurs entières de 2 à 12 ; $x \in [2 ; 12]$.

9

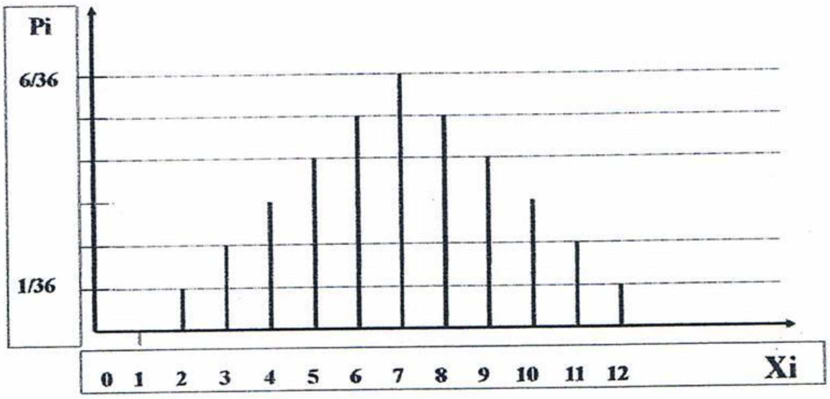
-Loi de probabilité :

Xi	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σp_i
Pi	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	1

Donc on a bien défini la loi de probabilité de cette variable, puisqu'on a déterminé toutes les valeurs possibles de xi et les valeurs des probabilités correspondantes Pi.

10

-Représentation graphique de loi probabilité



11

Espérance mathématique

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire discontinue, notée E (x) :

$E(x) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4 + \dots\dots\dots + p_n x_n \Rightarrow$

$\boxed{E(x) = \Sigma PIXI}$

Pour l'exemple 1 :

$E(x) = (1/6).1 + (1/6).2 + \dots\dots\dots + (1/6).6 = 21/6$

$\Rightarrow E(x) = 21/6: 3,5$

x la variable aléatoire désignant le nombre de points obtenus, il y a en moy 3,5 points

Pour l'exemple 2 :

$E(x) = (1/36).2 + (2/36).3 + \dots\dots\dots + (1/36).12 = 7 \Rightarrow E(x) = 7$(en moy, la somme des pts est de 7)

Variance

La variance d'une variable aléatoire discontinue notée $\sigma^2 x$ ou V(x) est définie par :

$$\boxed{V(x) = \sum Pi\,[\,xi - E(x)]^2}$$

La formule de définition peut s'écrire encore :

$$\boxed{V(x) = \sum Pi\, x_i^2 - [\,E(x)]^2}$$

13

Exemple 1 :

X_i	1	2	3	4	5	6	Σ
P_I	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1
$P_I X_I$	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6	$\sum P_I X_I = 21/6$
$P_I X_I^2$	1/6	4/6	9/6	16/6	25/6	36/6	$\sum P_I X_I^2 = 91/6$

→ **$E(x) = \sum Pi.\, xi = 21/6$ $\quad$ $E(x) = 21/6$**

→ **$V(x) = \sum Pi\, xi^2 - [E(x)]^2 = 91/6 - [21/6]^2$**
$V(x) = 2{,}9$

14

la fonction de répartition F(x)

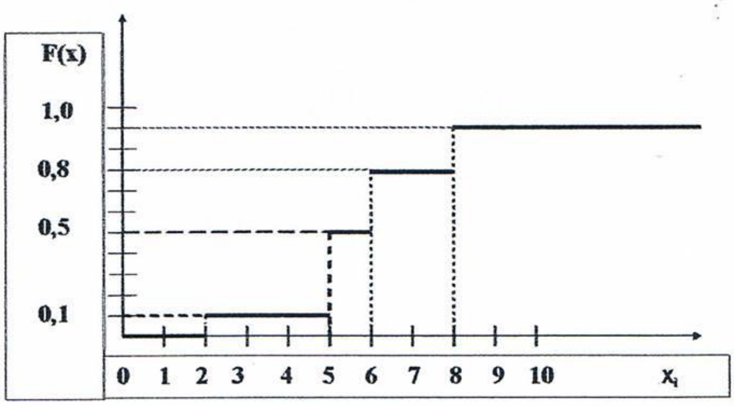
Soit à déterminer la fonction de répartition de la loi de probabilité définie par :

Xi	2	5	6	8	Σ
Pi	0,1	0,4	0,3	0,2	1
F (x)	0,1	0,1	0,5	0,8	1

F (x) = **0** pour $x < 2$
F (x) = 0,1 pour $2 \leq x < 5$
F (x) = 0,1 + 0,4= 0,5 pour $5 \leq x < 6$
F (x) = 0,1 + 0,4 + 0,3= 0,8 pour $6 \leq x < 8$
F (x) = 0,1 + 0,4 + 0,3 + 0,2 = **1** pour $x \geq 8$

15

La représentation graphique : La fonction de répartition F(x)



La fonction de répartition F(x) est la fonction cumulative qui correspond à la courbe cumulative (sigmoide) de la variable statistique.
C'est une fonction en escalier, toujours croissante.

16

Notions probabilistes (Concepts théoriques)	Notions statistiques (Concepts pratiques)
Probabilité d'un événement	Fréquence relative
Variable aléatoire	Variable statistique
Loi de probabilité	Distribution statistique (empirique)
Espérance mathématique d'une variable aléatoire $E(X)$ *ou* μ	Moyenne arithmétique d'une variable statistique $\overline{x}$
Variance d'une variable aléatoire V(X) ou σ^2	Variance d'une variable statistique s^2

17

lois usuelles de probabilité: loi de Bernouilli, loi binomiale , loi de Poisson.

18

Loi de Bernouilli

- **Une variable aléatoire de Bernouilli (v.a) a deux réalisations possibles :**
  succès (X=1), échec (X=0).

  Concerne toutes les épreuves binaires : succès/échec, présence/absence, oui/non, vrai/faux, malade/non malade.

- **La loi de probabilité de Bernouilli est définit par le paramètre p ;** B(p) pour $0 \leq p \leq 1$
  ensemble des valeurs **X** = {0, 1}

- **X=1, Probabilité de succès : p**
- **X=0, Probabilité d'échec : 1-p**

La loi de Bernouilli

Calcul de la Moyenne et la variance

Xi	pi	Xi.pi	$pi.X_i^2$
0	1-p = q	0	0
1	p	p	p
Somme	1	p	p

➔ E(X) = p

$Var(X) = \sum pi\, Xi^2 - [E(x)]^2 = p - p^2 = p(1-p) = p\, q$

➔ Var(X)= p q

- **-de Moyenne : p**
  -de Variance : p(1– p)=p q

20

exemples:

(i) Succès dans un jeu binaire

Exemple 1: pile/face.

$X = 1$(si pile), $X = 0$ (sinon face),

alors X~B(1/2).

Exemple 2: jeu de dé.

$X = 1$(si résultat = 3), $X = 0$ (sinon; autres)

alors X~B(1/6).(p:1/6, q:5/6)

(ii) Réponse oui/non dans un sondage

Exemple:

X = 1(si une personne approuve la loi), X = 0 sinon) alors X~B(p), avec une probabilité p 21

La loi binomiale

Une v. a. X qui prend les valeurs entières x telles que x= 0,1,2,...n pour n entier positif,

$0 \leq p \leq 1$, q = 1- p,

avec la loi de probabilité de paramètres n et p; B(n , p)

$$f(x) = P(X = x) = \boxed{C_n^x p^x q^{n-x}}$$

n = le nombre **<u>d'épreuves de Bernouilli</u>**

p = la probabilité de succès

x= le nombre d'évènements

$$P(X = x) = B(x; n, p) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} = C_n^x p^x q^{n-x}$$

s'appelle une v. a. binomiale

La loi binomiale

- Paramètres d'une distribution binomiale
  Si X est une v. a. binomiale alors :

$$E(X) = np$$

$$V(X) = npq$$

<u>Exemple 1 d'application</u>

- <u>exemple</u>: on lance 7 fois une pièce de monnaie bien équilibrée.

1- Quelle est la probabilité d'avoir 4 fois face?

2- Calculer l'espérance mathématique E(x) et la variance V(x)

Solution:

Cette variable suit une loi binomiale de paramètres B(7,1/2).

n=7 (nombre d'épreuves)

les 2 éventualités: **p=(succès),q=(échec)**

p=1/2 (avoir face)

q=1-p=1/2(ne pas avoir face. avoir pile)

1/p(x=4)= C_7^4 $(0.5)^4$ $(0.5)^3$ = 0.2734

2/E(x)=n p=7.0,5=3,5(en moy 3,5 fois face quand on jette 7 fois une pièce)

V(x)=n p q=3,5.0,5=1,75

25

<u>Exemple 2 d'application</u>

Exemple: lot de 1000 articles dont 10% défectueux

On tire 15 articles.

X = nombre d'articles défectueux obtenus.

$X \sim$ Bin(15, 1/10)

- 1- Quelle est la probabilité d'avoir 2 articles défectueux ?
- 2- Calculer l'espérance mathématique E(x) et la variance V(x)

26

Solution:

Cette variable suit une loi binomiale de paramètres B(15,1/10).

n=15 (nombre d'épreuves)

les 2 éventualités: **p=(articles défectueux)**

q=(articles non défectueux)

p=1/10(avoir)

q=1-p=9/10 (ne pas avoir)

1/p(x=2)= $C_{15}^{2}\,(0.1)^{2}\,(0.9)^{13}$ =0,2669

2/E(x)=n p=15.0,1=1,5

V(x)=n p q=1,5.0,9=1,35.

27

Exemple : Une urne contient 10 boules dont trois rouges. On effectue 8 tirages et on suppose que les tirages sont équiprobables.

On note X le nombre de boules rouges obtenues.

1°) Justifier que la variable X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

2°) Calculer la probabilité d'obtenir au plus 3 boules rouges p(x≤3).

3°) Calculer l'espérance mathématiques E(X) et l'écart type s(X) de la variable aléatoire X.

Les résultats sont tabulés (on peut directement tirer les probabilités de la table de la loi binomiale)

28

Loi de Poisson :

Une v. a. d. X qui prend toutes les valeurs entières x telles que x = 0, 1, 2,... avec la loi de probabilité :

$$\boxed{p(x) = \frac{\lambda^{x}}{x!} \cdot e^{-\lambda}}$$

e = 2,71 (base du logarithme népérien) et
λ : espérance mathématique E (x), appelée encore en pratique la moyenne.

s'appelle une v. a. de Poisson de paramètre λ

29

- La loi de Poisson est une loi de probabilité pour *<u>les événements rares</u>* (probabilité faible)
- est utilisée généralement dans le cas de la variable aléatoire discontinue *<u>distribuée dans le temps</u>*.

Utilisation de la loi de Poisson (exemples):
- la fréquence annuelle d'une maladie parasitaire est de 10 cas/50 millions d'habitants
- Nombre de requêtes sur un serveur de minuit à 6h.

30

- Paramètres d'une distribution de Poisson:

$$E(x) = V(X) = n\,p = \lambda$$

Les résultats sont tabulés (on peut directement tirer les probabilités de la table de la loi de Poisson)

31

Application de la loi de Poisson

Exemple1:

Sachant que dans un service d'urgences on accueille en moyenne 5 entorses par week-end, quelle est la probabilité d'observer 3 entorses au cours du prochain week-end?

- Loi de Poisson, avec $\lambda = 5$ et $x = 3$

$P(X = x) = e^{-\lambda} . \lambda^{x} /x!$

$P(X = 3) = 2{,}71^{-5}. 5^3/3! = 0.14$

Exemple2:

Sachant que la fréquence annuelle d'une maladie parasitaire est de 10 cas/50 millions d'habitants .

Quelle est la probabilité d'observer 3 cas pendant une année dans une région qui compte 10 millions d'habitants?

- Loi de Poisson, avec $\lambda = n\,p = 10^7\ 10/5.\ 10^7 = 2$ et $x = 3$

$P(X = x) = e^{-\lambda} . \lambda^{x} /x!$

$P(X = 3) = 2{,}71^{-2}. 2^3/3! =$

32

Exemple 3:

Dans un atelier, le nombre d'accidents au cours d'une année suit une loi de Poisson de paramètre 5. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. Il a plus de 6 accidents au cours de l'année p(x>6)

Loi de Poisson, avec $\lambda = 5$ et x = 7 ou 8 ou 9 ....

$P(x>6) = 1- P(x \leq 6) = 1- (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) +$

$P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6))=$

$P(X = x) = e^{-\lambda} . \lambda^{x} /x!$

P(x>6) = 1- ....

33