FACULTE DE MEDECINE D'ORAN

Service de biostatistique

Dénombrement et analyse combinatoire

11-15/10/2015

Année universitaire 2015-2016
N. Bendimerad

1

PLAN DU COURS

2

1. Introduction

- **L'analyse combinatoire** est une branche des mathématiques qui étudie comment compter les objets.
- Elle fournit des méthodes de dénombrements particulièrement utiles en théorie des probabilités.
- Les probabilités dites combinatoires utilisent constamment les formules de **l'analyse combinatoire.**

2. Arrangements
2.1. Définition

*On appelle **arrangements de p objets toutes suites ou sélections ordonnées de p objets pris parmi les n objets.***

Le nombre d'arrangements de *p objets pris parmi n est noté :*

$\boxed{A_n^p}$ $1 \leq p \leq n$ et $n, p \in N$

Remarque :

- Si $n < p$, alors $A_n^p = 0$
- $A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$
- Deux arrangements de *p objets sont donc **distincts s'ils diffèrent par la nature des objets qui*** les composent ou ***par leur ordre dans la suite.***

Page 01

2. Arrangements
2.2. Exemples

(1) **Dans un enchaînement** d'une séquence d'**ADN** , on distingue **4 nucléotides [A (Adénine), C** (Cytosine), G (Guanine) et T (Thymine)].

Il existe différents arrangements possibles de deux nucléotides ou dinucléotides avec $p=2$ et $n=4$.

2. Arrangements
2.2. Exemples

(2) Le nombre de mots de 5 lettres (avec ou sans signification) formés avec les 26 lettres de l'alphabet correspond au nombre d'arrangements possibles avec $p=5$ et $n=26$.

Dans les (1) et (2) , l'ordre des éléments dans la suite est essentiel.

Ainsi pour l'exemple (2), le mot NICHE est **différent** du mot CHIEN.

- Mais dans les deux exemples, une base ou une lettre de l'alphabet **peut se retrouver plusieurs fois (arrangements avec répétition)**

2. Arrangements
2.2. Exemples

- (3) Les trois médailles dans l'ordre lors d'une compétition de natation de 10 individus, constitue un des arrangements possibles avec *p=3 et n=10.*

alors que dans l'exemple (3) , les trois médaillés à l'arrivée sont forcément différents (**arrangements sans répétition).**

Nb: Il faut donc distinguer le nombre d'arrangements avec répétition et le nombre d'arrangements sans répétition .

2. Arrangements
2.3. avec répétitions

- Lorsqu'un objet peut être observé **plusieurs fois dans un arrangement, le nombre** d'**arrangement avec répétition de *p objets pris parmi n, est alors :***

$$A_n^p = n^p \text{ avec } 1 \leq p \leq n$$

2. Arrangements
2.3. avec répétitions

Pour le premier objet tiré, il existe *n manières de ranger l'objet parmi n.*

Pour le second objet tiré, il existe également *n possibilités d'arrangements car le premier* objet fait de nouveau parti des *n objets. On parle de* ***tirage avec remise.***

Ainsi pour les *p objets tirés, il y aura n x n x n x.....x n (p fois) arrangements possibles, soit*

$$\boxed{A_n^p = n \times n \times n \times \dots \times n = n^p}$$

Exemples :

(1) Concernant l'exemple de **la séquence d'ADN, le nombre de dinucléotides attendus si l'on** fait l'hypothèse qu'une base peut être observée plusieurs fois dans la séquence (ce qui correspond effectivement à la réalité) est donc :
$A_4^2 = 4^2$ ***= 16 dinucléotides possibles***

Les 16 dinucléotides identifiables dans une séquence d'ADN sont :

AA AC AG AT CA **CC** CG CT
GA GC **GG** GT TA TC TG **TT**

Page 04

2. Arrangements
2.4. sans répétitions

- Lorsque chaque objet ne peut être observé qu'*une seule fois dans un arrangement, le nombre* d'**arrangements sans répétition de *p* *objets pris parmi n est alors :***

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad \text{avec} \quad 1 \leq p \leq n$$

n ! = n.(n- 1).(n- 2).(n- 3).(n- 4)...............2.1

ex: 8! =8.7.6.5.4.3.2.1 et 0 ! = 1.

2. Arrangements
2.4. sans répétitions

- Pour le premier objet tiré, il y a *n manières de ranger l'objet parmi n.*
- Pour le second objet tiré, il n'existe plus que *n-1 manières de ranger l'objet car le premier* objet ne peut plus être pris en compte.

On parle de **tirage sans remise.**

Exemples 1:

Concernant l'exemple de la **séquence d'ADN, le nombre de dinucléotides attendu dans une** séquence si l'on fait l'hypothèse qu'une base n'est observée qu'une seule fois est donc :

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12 \text{ dinucléotides possibles}$$

Sous cette contrainte, les 12 dinucléotides possibles sont :

~~AA~~ AC AG AT CA ~~CC~~ CG CT
GA GC **~~GG~~ GT TA TC TG ~~TT~~**

Ceci correspond aux 16 arrangements possibles avec répétition $A_n^p = n^p$ **auxquels sont soustraits les 4 dinucléotides (*n*)** ***résultant de l'association d'une même base.***

Exemples 2:

- Un groupe de douze amis organise un concours de ski. Combien y a-t-il de podiums différents ?
- nous formons un arrangement simple ou sans répétition (de k éléments choisis parmi n).

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

- Dans notre exemple:

$$\boxed{A_n^p} = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \cancel{9!}}{\cancel{9!}}$$
$$= 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$$

Page 06

3.Permutations
3.2. définition

Etant donné un ensemble *E de n objets, on appelle* **permutations de n objets distincts toutes suites ordonnées de *n objets ou tout arrangement n à n de ces objets.***

Le nombre de permutations de *n objets est noté :* $\boxed{P_n}$

3.Permutations
3.2. sans répétition

La permutation de *n objets constitue un cas particulier d'* **arrangement sans répétition de *p*** objets pris parmi *n lorsque p = n .*

Ainsi le nombre de permutations de *n objets est*

$$\boxed{P_n} = \boxed{A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!}$$

Page 07

Exemple 1 :

- De combien de manière peut on placer 8 convives autour d'une table .

Le nombre de manières de placer 8 convives autour d'une table est :

$$P_8 = 8! = 40\ 320 \text{ possibilités}$$

Exemple 2:

Combien existe-t-il de permutations des lettres a, b et c?

Par énumération, nous trouvons

(a; b; c), (a; c; b), (b; a; c), (b; c; a), (c; a; b) et (c; b; a)

Dans notre exemple: 3! = 6.

3.Permutations
3.2. avec répétition

Dans le cas où il existerait **plusieurs répétitions *k* *d'un même objet parmi les n objets, le*** nombre de permutations possibles des *n objets doit être rapporté aux nombres de permutations* des *k objets identiques.*

Le nombre de permutations de *n objets est alors :*

$$\boxed{P_n = \frac{n!}{k!}}$$

En effet, les permutations de *k objets identiques sont toutes identiques et ne comptent que* pour une seule permutation.

Exemple :

Considérons le mot « CELLULE ». Le nombre de mots possibles (avec ou sans signification) que l'on peut écrire en permutant ces 7 lettres est :

$$P_7 = \frac{7!}{2!3!}$$

en considérant deux groupes de lettres identiques : L (3 fois) et E (2 fois).

Page 09

4. Combinaisons
4. 1. définition

Si l'on reprend l'**exemple de la séquence d'ADN, à la différence des arrangements où les** dinucléotides AC et CA formaient deux arrangements distincts, ces derniers ne formeront qu'une seule combinaison.

Pour les combinaisons, on ne parle plus de suite ni de série puisque la **notion d'ordre des objets n'est plus prise en compte.**

On parle alors de tirages avec ou sans remise.

4. Combinaisons
4. 1.sans remise

Etant donné un ensemble *E de n objets, on appelle* **combinaisons de p objets tout ensemble** de *p objets pris parmi les n objets sans remise.*

Le nombre de combinaisons de *p objets pris parmi n est noté :* C_n^p

Remarque : On a nécessairement $1 \leq p \leq n$

Si *n < p, alors par convention:* $C_n^p = 0$

4. Combinaisons
4. 1.sans remise

Le nombre de combinaisons de p objets pris parmi n et sans remise est :

$$\boxed{C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ notée } \binom{n}{p} \text{ avec } 1 \le p \le n}$$

Exemples :

(1) Le tirage au hasard de 5 cartes dans un jeu de 32 (main de poker) est une combinaison avec *p=5 et n=32.*

(2) La formation d'une délégation de 5 personnes parmi un groupe de 50 constitue une combinaison avec *p=5 et n=50.*

Pour ces deux exemples, les objets tirés sont clairement distincts

- Le nombre de **combinaisons de *p objets pris parmi n et sans remise est :***

$$\boxed{C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}} \quad \text{avec } \mathbf{1 \le p \le n}$$

Exemples 1 :

Dans une classe de 21 élèves, nous voulons choisir une délégation de 3 élèves. Combien de délégations différentes pouvons-nous former ?

- le premier délégué: 21 personnes possibles
- le deuxième délégué: 20 personnes possibles
- le troisième délégué: 19 personnes possibles

Mais en choisissant de la sorte la délégation, nous avons tenu compte de l'ordre, qui est ici sans importance.

Il faut donc diviser par le nombre de permutations qui existent dans la délégation, soit 3!. Ce qui donne:

$$\binom{21}{3} = \frac{21!}{3!18!} =$$ 1330 délégations différentes

Exemples 2 :

- Dans le cadre de l'exemple de **la séquence d'ADN, le nombre de dinucléotides attendus sans** tenir compte de l'ordre des bases dans la séquence (hypothèse justifiée dans le cas de l'ADN non codant) est donc :

$$C_4^2 = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1}$$ **= 6 dinucléotides**

Les 6 dinucléotides possibles sous cette hypothèse sont :

AC CA	AG GA	AT TA	CG GC	CT TC	GT TG

Exemples 3 :

De combien de manières peut-on choisir un lot de 3 antibiotiques parmi 8 ?

- $C_8^3 = \frac{8\,!}{3\,!(8-3)\,!}$ Donc le nombre de manières de choisir 3 antibiotiques parmi 8 est égal à **112.**

4. Combinaisons
4. 1.avec remise

Le nombre de **combinaisons de** ***p objet parmi n avec remise est :***

$$\boxed{C^{p}_{n+p-1} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}}$$

- Soit la constitution de mots de 3 lettres à partir d'un alphabet à 5 lettres avec remise, **ainsi**

$$C_7^3 = C_{5+3-1}^3 = C_{n+p-1}^p \text{ avec } n=5 \text{ et } p=3$$

$$C_7^3 = \frac{(7+3-1)\,!}{3\,!(7-1)\,!} = \frac{9\,!}{3\,!\ 6\,!} = \frac{\cancel{9}.\cancel{8}.7.\cancel{6}!}{\cancel{3}.\cancel{2}.1.\cancel{6}!} = \mathbf{3.4.7 = 84}$$

Page 13

Résumé

k éléments parmi n	Sans répétition	Avec répétition
Ordre indifférent	**Combinaison** $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$C^p_{n+p-1} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$
Ordre important	**Arrangement sans répétition** $A^n_k = \frac{n!}{(n-k)!}$ Si $k = n$: **Permutation** $n!$	Arrangement avec répétition n^k Permutation avec répétition $P_n = \frac{n!}{k!}$

Page 14