

Comparaison de pourcentages

Test de l'écart réduit

D^r : BENILHA. S
Service de Biostatistique
Faculté de Médecine d'Oran

Introduction:

- Pourcentage:
 - Variable qualitative dichotomique : (Présence/Absence, Malades/Non malades,...).
 - **P**: le pourcentage (inconnu) d'individus présentant la caractéristique dans la **population**.
 - **p**: le pourcentage observé sur un **échantillon** de taille n dont k individus présentent la caractéristique.
- Types de Comparaison:

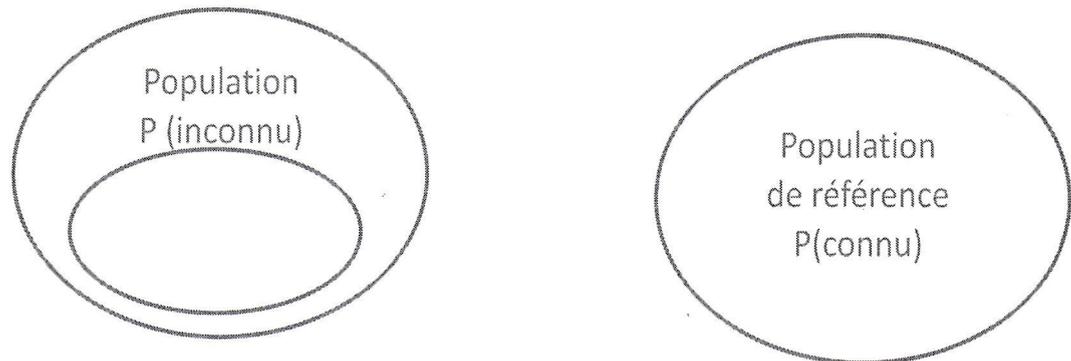
il existe trois type de comparaison:

 - Comparaison d'un pourcentage observé à un pourcentage théorique.
 - Comparaison de deux pourcentages observés:
 - Échantillons indépendants.
 - Comparaison de deux pourcentages observés:
 - Échantillons appariés .

1. Comparaison d'un pourcentage observé à un pourcentage théorique

Intérêt: déterminer si un pourcentage p observé sur un échantillon de taille n est différent d'une valeur théorique P .

⇒ Comparer p à P .



Démarche:

1-Formuler une hypothèse

Hypothèse nulle H_0 :

- $p = P$ où P est le pourcentage de la population dont l'échantillon est issu.

Hypothèses alternatives H_1 :

- $p \neq P$

2-Fixer le risque α à 5 %

3-Choisir la statistique:

- **Test z** « Test de l'écart réduit » (loi normale centrée réduite)

4-Conditions d'application :

- **$n \cdot P \geq 5$ et $n \cdot (1 - P) \geq 5$**

N.B: $q = 1 - P$

5-Calculer la statistique Z:

$$Z = \frac{|p - P|}{\sqrt{\frac{P * (1-P)}{n}}}$$

6-Comparer la valeur calculé de z à la valeur critique de $z_{\alpha} = 1,96$:

si $|z| \geq z{\alpha}$: la différence est significative au risque α et donc H_0 est rejetée ,
 H_1 est retenue.

si $|z| < z{\alpha}$ la différence n'est pas significative au risque α et donc H_0 est
retenue.

• **Exemple 1:**

- En France, 7% des personnes hospitalisées contractent une infection nosocomiale dans l'établissement où elles sont soignées.
- Sur un échantillon de 250 personnes soignées à l'hôpital H, 28 ont contracté une infection nosocomiale.
- Le pourcentage observé sur l'échantillon diffère-t-il de la référence nationale au risque $\alpha = 5\%$?

Démarches:

1.Poser les hypothèses:

- H_0 : Le pourcentage observé sur l'échantillon (p) ne diffère pas de la référence nationale (P),
c.à.d : $p = P$
- H_1 : Le pourcentage observé sur l'échantillon diffère de la référence nationale , c.à.d : $p \neq P$

2.Détermination du risque α à 5 %:

3.Choix du test :Test de l'écart réduit(test Z)

4.Vérification des conditions d'application:

- Sachant que : $n = 250$, $P = 0.07$ $q = 1 - P = 1 - 0.07 = 0.93$
- $np = 250 \times 0,07 = 17,5 \geq 5$, $nq = 250 \times 0,93 = 232,5 \geq 5$

5. Calcul de la statistique Z:

$$Z = \frac{|p - P|}{\sqrt{\frac{P * (1-P)}{n}}} = \frac{0,112 - 0,07}{\sqrt{\frac{0,07 * (1 - 0,07)}{250}}} = 2,625$$

Comparer un pourcentage à une valeur théorique:

- Lecture

Table de l'écart-réduit (loi normale)

α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,10	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,20	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,30	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860

Table pour les petites valeurs de la probabilité

α	$1 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-9}$
ϵ_{α}	3,29053	3,89059	4,41717	4,89164	5,32672	5,73073	6,10941

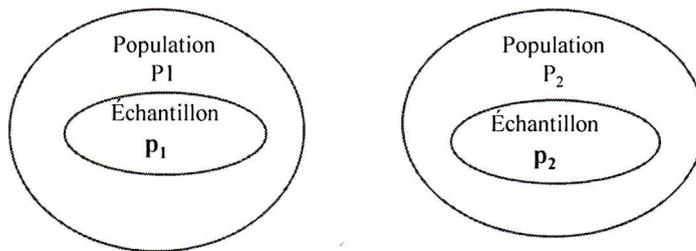
6. Comparaison et conclusion:

$$z = 2,625 \geq z_{0,05} = 1,96 : \text{rejet de } H_0$$

On montre, au risque 5%, une différence significative entre le pourcentage de personnes hospitalisées contractant une infection nosocomiale à l'hôpital H et dans l'ensemble du pays ($p < 0,01$).

- Intérêt : comparer 2 proportions (p_1 et p_2) dans 2 groupes indépendants de tailles n_1 et n_2 :

2. Comparaison de deux pourcentages observés: Échantillons indépendants



1. Formuler une hypothèse:

- Hypothèse nulle H_0 :
- $p_1 = p_2$ (p_1 et p_2 , pourcentages de la population dont sont issus les échantillons 1 et 2)
- Hypothèses alternatives H_1 :
- $p_1 \neq p_2$

2. Fixer le risque α à 5 %

3. Choisir la statistique : Test de l'écart réduit (test z)

4. Conditions d'application :

- $n_1 \cdot p_0 \geq 5$ et $n_1 \cdot (1 - p_0) \geq 5$
- $n_2 \cdot p_0 \geq 5$ et $n_2 \cdot (1 - p_0) \geq 5$ Avec

$$p_0 = \frac{n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2}{n_1 + n_2}$$

5. Calculer la statistique Z:

- p_0 : l'estimation de la proportion commune

$$z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot (1 - p_0)}{n_1} + \frac{p_0 \cdot (1 - p_0)}{n_2}}}$$

$$p_0 = \frac{n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2}{n_1 + n_2}$$

6. Conclusion et prise de décision:

Confronter la valeur de z calculée à la valeur critique z_α .

$z < z_\alpha$: H_0 est retenue la différence n'est pas significative au risque α .

$z \geq z_\alpha$: H_0 n'est pas retenue, donc H_1 est retenue la différence est significative au risque α .

• Exemple 2

- On désire comparer l'efficacité de deux traitements T1 et T2 sur 100 patients atteints d'une maladie M.
- On tire au sort 2 deux groupes de 50 patients, un groupe est soumis à T1, le second à T2.
- Le pourcentage de guérison chez les patients soumis à T1 est de 30%, chez ceux soumis à T2 de 40 %.
- Le taux de guérison est-il différent entre les 2 traitements ?

1. Poser l'hypothèse nulle:

- H_0 : Le taux de guérison n'est pas différent entre les 2 traitements donc $p_1 = p_2$.
- H_1 : Le taux de guérison est différent entre les 2 traitements donc $p_1 \neq p_2$.

2. Détermination du risque $\alpha = 5\%$.

3. Choix du test: Test de l'écart réduit (Test Z).

4. Vérification des conditions d'application:

$$p_0 = \frac{n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2}{n_1 + n_2}$$

$$p_0 = \frac{50 \times 0,3 + 50 \times 0,4}{50 + 50} = 0,35$$

$$q_0 = 1 - p_0 = 1 - 0,35 = 0,65$$

$$n_1 \cdot p_0 = 50 \times 0,35 = 17,5 \geq 5$$

$$n_2 \cdot q_0 = 50 \times 0,65 = 32,5 \geq 5$$

5. Calcul de la variable testée:

$$z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot (1 - p_0)}{n_1} + \frac{p_0 \cdot (1 - p_0)}{n_2}}}$$

$$z = \frac{0,3 - 0,4}{\sqrt{\frac{0,35 \times 0,65}{50} + \frac{0,35 \times 0,65}{50}}} = 1,05$$

Comparer 2 pourcentages observés - Échantillons indépendants -

- Lecture

Table de l'écart-réduit (loi normale)

α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,10	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,20	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,30	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860

- $z = 1,05 < z_{0,05} = 1,96$: H_0 est retenue

6. Conclusion : il y'a pas de différence significative entre les taux de guérison avec les 2 traitements, au risque 5%.

3. Comparer deux pourcentages observés - Séries appariées -

- Intérêt : on s'intéresse aux taux de guérison chez des sujets ayant reçu un traitement T1 et des sujets appariés ayant reçu un traitement T2.
- on cherche à comparer p_1 et p_2 (les taux de guérison avec T1 et T2).
- Tableau des valeurs

- Pour tenir compte de l'appariement, il faut faire apparaître quels sont les sujets qui appartiennent aux mêmes paires.
- Pour chaque paire d'individus, on peut observer, selon s'il y a présence (+) ou absence (-) du caractère étudié, l'une des 4 configurations possibles.

Échantillon 1	Échantillon 2	Nombre de paires
+	+	a
+	-	b
-	+	c
-	-	d

Éch. 2

		+	-	Total
Éch. 1	+	a	b	a+b
	-	c	d	c+d
	Total	a+c	b+d	n

- Les paires concordantes n'apportent pas d'information sur la liaison entre le traitement et la guérison. On doit donc se fonder sur la répartition des paires discordantes.

1. Formuler une hypothèse:

- H_0 : le pourcentage observé de paires -+ n'est significativement pas différent de la valeur théorique .
- H_1 : le pourcentage observé de paires -+ est significativement différent de la valeur théorique .
- 2. Fixer le risque α à 5 %

- 3.Choix du test: test de l'écart réduit de séries appariées
- 4. Conditions d'application : $b+c \geq 10$
- 5.Calculer la statistique Z:

$$Z = \frac{b - c}{\sqrt{b + c}}$$

- 6.comparaison et conclusion :
- $Z < Z_{\alpha}$: H_0 est retenue la différence n'est pas significative au risque α .
- $Z \geq Z_{\alpha}$: H_0 n'est pas retenue, donc la différence est significative au risque α

• Exemple 3

- On désire comparer l'efficacité de deux traitements T_1 et T_2 chez 100 patients atteint d'une maladie M.
- Les deux traitements sont administrés aux patients. L'ordre d'administration des 2 traitements est tiré au sort en ménageant une période dite de *wash-out* entre les 2 administrations.
- Les résultats sont les suivants :
- Le taux de guérison est-il différent entre les deux traitements ?

		T_1	
		Succès	Échec
T_2	Succès	24	16
	Échec	6	54

- On cherche à comparer les pourcentages observés :

1. Hypothèses :

- H_0 : Le taux de guérison n'est pas différent entre les deux traitements ($p_1 = p_2$)
- H_1 : Le taux de guérison est différent entre les deux traitements ($p_1 \neq p_2$)

2. fixer le risque à 5 %

3. choix du test : test de l'écart réduit (séries appariées)

4. conditions d'application vérifiées :

$$\text{nombre de paires discordantes} = 16 + 6 = 22 \geq 10$$

$$p_1 = \frac{24+6}{100} = 0,3$$

$$p_2 = \frac{24+16}{100} = 0,4$$

$$Z = \frac{b - c}{\sqrt{b + c}} = \frac{16 - 6}{\sqrt{16 + 6}} = 2,13$$

6. Conclusion:

$$Z = 2,13 > 1,96 \quad \text{donc}$$

On montre, au risque 5%, une différence significative entre les taux de guérison avec les 2 traitements ($p < 0,05$).