2016/2017
Département de Médecine

Première Année Médecine
Faculté de Constantine

Probabilités

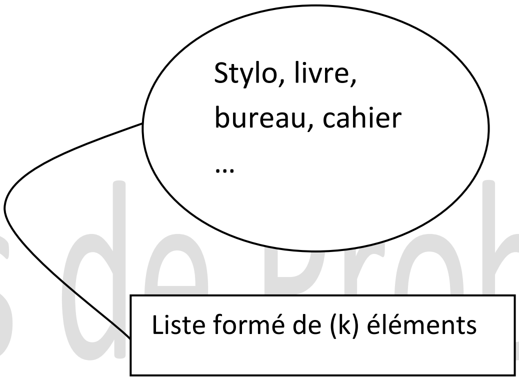
Chapitre I. Analyse combinatoire

Former des listes des éléments de (k) éléments à partir de (n) éléments suivant des conditions pour dénombrer les façons de créer ces listes.

L'analyser combinatoire a pour bute le dénombrement des dispositions que l'on peut faire à l'aide des éléments d'un ensemble fini.

Une liste formée de (k) éléments présenté par (n) éléments >>Disposition d'un (k) éléments présenté par (n) éléments.

Exemple :



Ensemble de (n) éléments

Présenté par :

Ça peut être: stylo, livre, règle…

1. Terminologie et définitions :

Il s'agit de savoir combien, à partir d'un ensemble de (n) éléments, on peut construire de groupes composés de (k) éléments.

Pour former des groupes (listes), on a deux critères :

- L'ordre.
- La répétition.

Donc :

Disposition	Avec ordre	Arrangement $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ pour $k \leq n$,	Avec répétition
			Sans répétition
	Sans ordre	Combinaison $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	Avec répétition
			Sans répétition

Définition du Disposition :
Nous disposons d'un ensemble fini, tous sous-ensembles ou listes construites à partir de cette ensemble en respectent certaines conditions, s'appelle disposition.

Un cas particulière : Quand n=k , on a :
Permutation (arrangement de (n) éléments sans répétition de (k) objet prisent parmi (n) lorsque k=n)

$$\boxed{P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!}$$

N.B :

Pour dire si l'ordre est important ou non, on doit essayer plusieurs positions. Si les listes sont différentes, l'ordre est important, si les listes sont les mêmes (on le même sens) l'ordre n'est pas important.

Exemple :

LISTE 1 ← A, B, C, D

D, B, C, A → LISTE 3

LISTE 2 ← A, C, D, B

C, B, A, D → LISTE 4

Les listes sont différents à chaque fois donc l'ordre est important.

2. Dénombrement :

a. Arrangement sans répétition : dans l'exemple 1

Le nombre d'arrangement sans répétition de (k) éléments parmi (n) éléments est :

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \text{pour } k \leq n,$$

Exemple : $A_5^3 = 5 * 4 = 20 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!}$

n – k + 1 = 5 – 2+1 = 3

20 Nombres d'arrangement sans répétition de 2 éléments pris de 5 éléments.

b. Arrangement de k éléments pris de k éléments sans répétition (permutation sans répétition) : dans l'exemple 4

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

Exemple :

$$P_3 = A_3^3 = 3! = 3 * 2 * 1 = 6$$

c. Arrangement avec répétition: dans l'exemple 5

Le nombre de listes (d'arrangement) avec k éléments pris de (n) éléments

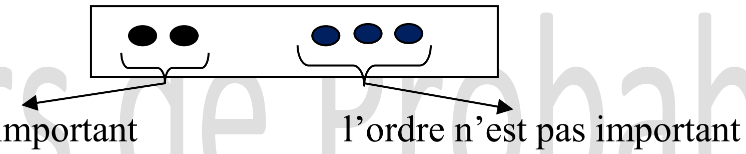
$$\Longrightarrow \quad A_n^k = n^k$$

d. Combinaison sans répétition: dans l'exemple 2

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \quad \binom{n}{k} \Longrightarrow \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Cas particulière et conseils pratique :

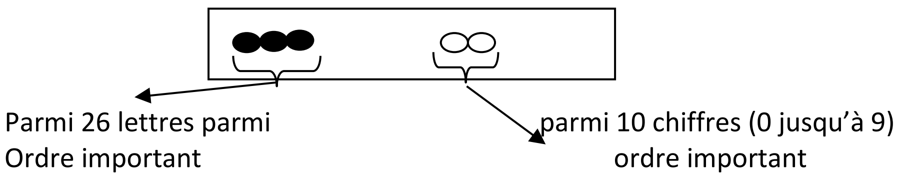
A. Les dispositions sont construites avec les éléments puis dans le même ensemble Seulement l'ordre existe sur une partie de la disposition, mais pas sur l'autre partie, comme dans l'exemple 3 :



A_{20}^2 x C_{18}^2

$\Longrightarrow$ Même résultat si on commence par 3 parmi 20 sans ordre et 2 parmi 17 avec ordre : C_{20}^3 x A_{17}^2

B. Les dispositions sont constitués avec des éléments puisés dans des ensembles différents, Exemple : Un mot de passe est composés de 3 lettres latines différents suivie de chiffre différents.



Donc : $A_{26}^3 X A_{10}^2$

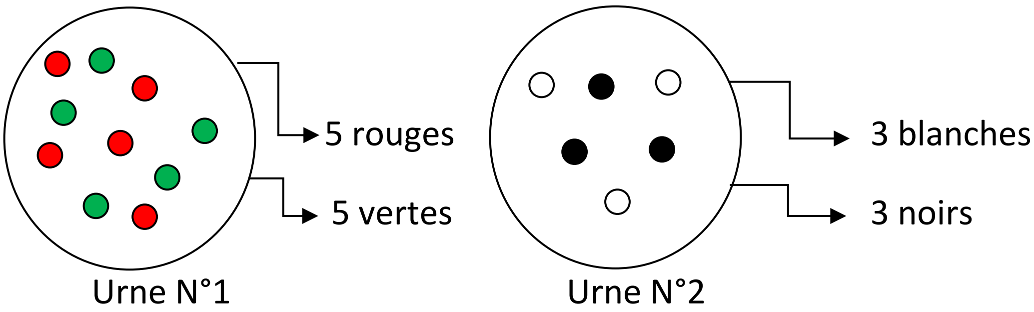
C. Somme des produits :

<u>Exemple</u> : Nous disposons 2 urnes, la première contient 10 boules numérotées de 1 à 10, la deuxième de 1 à 6

- Dans la première, les boules portent un numéro paire sont rouges, et les boules portent un numéro impaire sont vertes.

- Dans la deuxième, les boules portent un numéro paire sont blanches, et les boules portent un numéro impaire sont noirs.

On retire sans remise 3 boules de la première urne et 2 boules de la deuxième urne. Combien y a-t-il des cas ? le tirage donne les couleurs de drapeau Algérien



Donc : soit on choisit : - rouge, rouge, verte **ET** 2 blanches **OU**
- rouge, verte, verte **ET** 2 blanches.

$$\Rightarrow \quad C_5^2 \; x \; C_5^1 \; \text{x} \; C_3^2$$
$$C_5^1 \; x \; C_5^2 \; \text{x} \; C_3^2$$

3. Exemples :

Exemple 1. 5 athlètes sont au départ d'une course. A l'arrivée, le premier gagnera une médaille d'or, le deuxième une médaille d'argent et le troisième une médaille de bronze.
Pour que a leur arrive, les gagnants trouvent leur liste déjà prête, il nous faut préparer toutes les listes possibles, combien y en a-t-il ?

La solution : donc l'ordre est très important dans notre liste donc c'est l'arrangement.
Il n'y a pas de répétition car le gagnant peut prendre une seule médaille.
Donc notre disposition est : un Arrangement sans répétition.

n=5 ; k=3 $$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

Exemple 2. 5 athlètes sont au départ d'une course. Les trois premiers a l'arrivé se partagent le même prix (à part égale). Combien y a-t-il de groupes gagnants possibles ?

La solution :l'ordre n'est pas très important ici donc c'est une combinaison.
Il n'y a pas de répétition car les gagnants ne peuvent pas prendre plusieurs médailles.
Donc notre disposition est : une Combinaison sans répétition.

n=5 ; k=3 $$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5\times4\times3}{3\times2} = 10$$

Exemple 3. Les 2tudiants de l'institut ont créé une association. Ils ont organisés des élections pour choisir les membres du comité qui doit gérer cette association. Ce comité se compose :

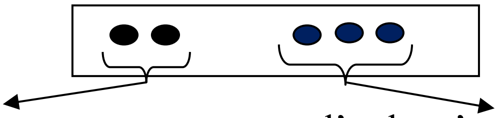
- Un président.

- Un vice-président.
- Un trésorier.

Ces postes seront attribués conformément au nombre de voix récoltés par chacun des candidats.
5 candidats ce sont présentes.
A combien de comités possibles peut-on s'attendre ?

La solution :

- l'ordre est important quand on parle de président, vice-président, trésorier donc on parle d'un arrangement et un membre peut prendre qu'une seule position dans le comité donc c'est sans répétition ; c'est **un arrangement sans répétition.**
- L'ordre n'est pas important quand on parle du reste des membres qui on le même titre (membre du comité) donc on parle d'une combinaison et il exige deux membre de ce comité qui on le même titre donc un seule membre ne peut pas prendre les deux positions, c'est-à-dire, sans répétition ; c'est **une combinaison sans répétition**



L'ordre important l'ordre n'est pas important

A_{20}^{2} x C_{18}^{2}

Même résultat si on commence par 3 parmi 20 sans ordre et 2 parmi 17 avec ordre : C_{20}^{3} x A_{17}^{2}

Exemple 4. De combien de façon différentes peut-on placer 5 personnes dans une voiture ?
N.B : Ils savent tous conduire.

La solution :

n=5 ; k=5 ; n=k=5

- Disposition sans répétition (une personne ne peut pas avoir deux places au même temps)
- L'ordre n'est pas important (de façons différentes)

Donc c'est une Permutation sans répétition .

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

Exemple 5. Un numéro de téléphone est une succession de six chiffres. Combien y a-t-il de numéro possible ?

- L'ordre est très important donc on parle d'un arrangement.
- On peut répéter les n=chiffres dans un numéro donc c'est avec répétition.

Donc : c'est **un arrangement avec répétition.**

n=10 ; k=6 $A_{10}^{6} = 10^{6}$

Exemple 6. Une section d'étudiants de première année est formes de 6 groupes. Un jour, dans l'amphithéâtre où toute la section était réunir, on a demandé aux étudiants de proposer 4 volontaires pour représenter leur section.
« Les volontaires n'inscrivent pas leurs noms sur le listes mais seulement les numéros des groupes auxquels ils appartiennent. »
Combien y a-t-il de listes possibles ?

La solution :

La phrase entre « » Nous fait comprendre que les dispositions sont du genre 1442 ou 4332. Avoir l'écriture de 1442 ou 1424 signifie la même chose pour nous :un représentant de groupe 1, un représentant de groupe 2 et deux représentants du groupe 4.
Ici, les éléments peuvent se répéter et l'ordre n'a aucune importance, donc on parle ici de **combinaison avec répétition.**

Probabilités

Chapitre II. Terminologie et position du problème

Pour résoudre n'importe quel exercice en Probabilité, il faut faire une traduction (n'est pas possible seulement si on connaît les termes du probabilité).

I. Terminologie et position de problème :

Nous aurons à définir les termes suivants :

1) Expérience aléatoire.
2) Ensemble fondamentale.
3) Evènement élémentaire.
4) Evènement composé.
5) Opération sur les éléments.

TERME	DEFINITION	EXEMPLE:
1. EXPERIENCE ALEATOIRE	Lors le résultat d'une expérience ne peut pas être d'avance, avec certitude, nous disons que cette expérience est aléatoire.	a) Le jet d'un dé est une expérience aléatoire. b) La durée de vie d'un être humain est une expérience aléatoire.
2. ENSEMBLE FONDAMENTALE	L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle **ensemble fondamentale** ou **univers des possibilités.** On le note généralement **Ω**.	a) **Ω**= {1, 2, 3, 4, 5, 6} b) On jette un dé mais successivement jusqu'à obtenir la face 6, **Ω** = N*
3. EVENEMENT ELEMENTAIRE	Les éléments de l'ensemble fondamental, ils s'appellent événements élémentaires. On les note généralement ω	a) Dans le jet du dé, l'apparition de chacun de la face est un évènement élémentaire, « 2 » est un évènement élémentaire par exemple. b) Evènement élémentaire d'un élément de **Ω** (∈ **Ω**)

		c) Evénement élémentaire est un sous ensemble de $\Omega (\subset \Omega)$ P.S : l'expérience aléatoire ne peut réaliser qu'un seul événement élémentaire a la fois.
4. EVENEMENT COMPOSE	Un événement est dit composé s'il existe un ou plusieurs événements élémentaires tels que la réalisation de l'un quelconque d'entre eux signifie sa réalisation. En d'autres termes un événement composé est un sous-ensemble fondamental.	Revenons à l'exemple du jet de dé. Nous pouvons nous intéressé aux événements suivants : a) Le résultat du jet du dé est un nombre pair : $A = \{2, 4, 6\}$ b) Le résultat du jet du dé est un nombre carré : $B = \{1, 4\}$ c) Le résultat du jet du dé est un nombre inférieur à 7 : $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$ (c'est un événement certain) d) Le résultat du jet du dé est un nombre supérieur à 6 : $D = \emptyset$ (c'est un événement impossible)

Résumé :

En probabilité	En théorie des ensembles
Ensemble fondamental	Ensemble Ω
ω est un événement élémentaire	ω est événement de Ω ($\omega \in \Omega$)
A est événement composé	A est un sous-ensemble de Ω ($A \subset \Omega$)

II. Relations :

- ω réalise l'événement A équivaut ($\omega \in A$).
- la réalisation de A impliqué la réalisation du B équivaut ($A \subset B$).
- A et B sont équivalents équivaut $A = B = \Omega$ (c'est l'ensemble).

5. Opération sur les événements :

1- La complémentarité :

$\bar{A}$ équivaut (l'élément contraire de A s'est réalisé)

Exemple : soit E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} notre ensemble, et soit A = {2, 4, 6} un sous-ensemble de E.

Le complémentaire de A dans E est le sous-ensemble suivant $\bar{A} = c_e A$= {1, 3, 5}.

P.S : on peut utiliser la notation $\bar{A}$ au lieu de la notation $c_e A$, pour désigner le complémentaire de A dans E.

2- L'intersection :

A∩B équivaut (les deux éléments A et B se sont réalisé au même temps ou simultanément).

Exemple : soit E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} notre ensemble, et soit A = {2, 4, 6} et B= {1, 2, 4} deux sous-ensembles de E.

L'intersection des deux sous-ensembles A et B est le sous- ensemble suivant : I = A∩B = {2, 4}.

P.S : dans le cadre des ensembles, l'intersection de deux sous-ensembles signifie leur partie commune.

3- L'union ou la réunion :

$A \cap B$ **équivaut (l'un, au moins, des deux événements s'est réalisé)**

(Au moins) on a 3 possibilités qui nous donnent :
Soit : c'est le A s'est réalisé.
Soit : c'est le B s'est réalisé.
Soit : c'est les deux (A et B) se sont réalisé.

Exemple : soit E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} notre ensemble, et soit A = {2, 4, 6} et B= {1, 2, 4} deux sous-ensembles de E.

L'union des sous-ensembles A et B est le sous-ensemble suivant : U =$A \cap B$= {1, 2, 4, 6}.

4- La différence de deux ensembles :

A\B équivaut (parmi les deux événements, seulement le premier s'est réalisé)

Exemple : soit E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} notre ensemble, et soit A = {2, 4, 6} et B= {1, 2, 4} deux sous-ensembles de E.

La différence de A par rapport à B est le sous-ensemble suivant : D= A\B= {6}

P.S :

$\omega \in A \backslash B$:

- (ω appartient à A) → (l'évènement correspond s'est réalisé).
- (ω n'appartient pas à B) → (l'évènement correspond ne s'est pas réalisé).

5- La différence asymétrique de deux éléments :

A∆B équivaut (parmi les deux événements un, et un seul, s'est réalisé).

Exemple : soit E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} notre ensemble, et soit A = {2, 4, 6} et B= {1, 2, 4} deux sous-ensembles de E.
la différence symétrique de A et B est le sous-ensemble suivant :
D_S= A ∆ B = {1, 6}
$\omega \in A \Delta B$:

- (ω appartient à A et n'appartient pas à B) → (le premier évènement s'est réalisé seul).
- (ω appartient à B et n'appartient pas à A) → (le deuxième évènements'est réalisé seul).
- Donc : A ∆ B = (A\B) U(B\A).

III. Notation

Symbole	Définition
A	L'événement s'est réalisé.
$\bar{A}$	L'événement ne s'est pas réalisé.
$A \cap B$	Les événements A et B se sont réalisé en même temps.
$A \cup B$	L'un, au moins, des événements A et B s'est réalisé.
$A \cap \bar{U}$	L'événement A s'est réalisé et U ne s'est pas réalisé.
$\bar{A} \cap U$	L'événement A ne s'est pas réalisé et U s'est réalisé.
$\bar{A} \cup B$	L'événement A ne s'est pas réalisé ou B s'est réalisé.
$\overline{A \cup B}$	Aucun des deux événements A et B ne s'est réalisé.
$\overline{A \cap B}$	Les événements A et B ne se sont pas réalisé en même temps.

Probabilités

Chapitre III. Axiomes des probabilités

Les probabilités sont des nombres distribués sur des événements. Ces distributions doivent vérifier certain conditions ; les trois axiomes suivants forment ces conditions :

- Axiome 1 : la probabilité de tout événement est un nombre réel qui ne peut pas être que positif ou nul, c'est-à-dire : $\forall A \in P(\Omega)$; $P(A) \geq 0$.
- Axiome 2 : la probabilité de l'évènement certain est égale à l'unité ; c'est-à-dire :
$$P(\Omega) = 1$$
- Axiome 3 : si deux évènements sont incompatibles alors la probabilité de leur union est égale à le somme de leur probabilités ; c'est-à-dire :

Si : $A \cap B = \emptyset$ Alors : $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

Les 3 axiomes des probabilités énumérés constituent un système minimal.

A partir de ces axiomes, on a 3 propriétés qui vont permettre de calculer beaucoup de probabilités.

Propriétés des probabilités

1) Les probabilités de l'évènement impossible sont nulles :

C'est-à-dire $P(\emptyset) = 0$ permis $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$

Et donc en vertu de l'axiome 3 nous avons : $P(\Omega \cap \emptyset) = P(\emptyset) + P(\Omega)$

Or : $P(\Omega \cap \emptyset) = P(\Omega)$

Et en vertu de l'axiome 2 : $P(\Omega) = 1$

Par conséquence : $P(\emptyset) + P(\Omega) = 1$

D'où : $P(\emptyset) = 0$

2) Les probabilités de tout évènement est nombre compris entre zéro et un :

C'est-à-dire : $\forall A \in P(\Omega)$ nous avons : $0 \leq P(A) \leq 1$.

Démonstration :

Soit A un événement quelconque de $P(\Omega)$.

Nous avons tout d'abord, grâce à l'axiome 1 déjà l'inégalité de gauche $0 \leq P(A)$.

Ceci étant admis pour tout évènement.

Par ailleurs nous avons, d'une part $A \cup \bar{A} = \Omega$.

Qui, en vertu de l'axiome 2, conduit à : $P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$.

D'autre part, $A \cap \bar{A} = \emptyset$

Qui, en vertu de l'axiome 3, conduit à : $P(A \cap \bar{A}) = P(A) + (\bar{A})$.

Ce qui signifie donc que : $P(A) + (\bar{A}) = 1$.

Or, $P(A)$ et $(\bar{A})$ sont toutes les deux des quantités positives ou nulles d'après l'axiome 1.

Pour obtenir 1, on a dû additionner ces deux quantités positives ; c'est-à-dire la preuve qu'aucune de ces quantités n'est supérieures à 1.

Ainsi : $P(A) \leq 1$.

Ce qui achève la démonstration donc : $0 \leq P(A) \leq 1 \rightarrow$ une application de l'ensemble des parties de Ω dans l'ensemble [0 ; 1].

3) Probabilités d'un événement composé :

$A \subset \Omega$, on cherche P(A), on a ici 2 cas :

Le 1er cas : la probabilité d'un cet évènement composé est égale a la probabilité de l'évènement élémentaire.

Le 2éme cas : la probabilité d'un événement composé peut être déterminée a partir des probabilités des évènements élémentaires qui le constituent → ces de l'équiprobabilité.

Pour le 1er cas :

$\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \omega_3 ; \ldots ; \omega_n \}$et $A \subset \Omega \rightarrow A=\{\omega_1 ; \omega_2 ; \omega_3 ; \ldots ;\omega_k \}$; $k \leq n$.

$P(\omega_1) ; P(\omega_2) ; \ldots P(\omega_n)$ sont connus et donnés;

$P(A) = P(\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \{\omega_3\} \cup \ldots \cup \{\omega_k\})$

$P(A) = P\{\omega_1\} + P\{\omega_2\} + P\{\omega_3\} + \ldots + P\{\omega_k\}$.

Exemple :

Reprenons l'exemple du lancer du dé.

Dans cette exemple, l'ensemble des événements élémentaires c'est-à-dire l'univers des possibilités est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si les probabilités des événements élémentaires sont comme suit :

Faces	1	2	3	4	5	6
Probabilités correspondantes	0,1	0,3	0,05	0,15	0,25	0,15

Quelles sont les probabilités des événements composés suivants :

A) α : « le résultat du jet est un nombre pair ».
B) γ : « le résultat du jet est un nombre carré »
C) δ : « le résultat du jet est inférieure à 3 »
D) λ : « le résultat du jet est inférieure à 7 »
E) θ : « le résultat du jet est supérieure à 6 »

Solution : puisque le sous-ensemble associé à l'événement α est $A = \{2, 4, 6\}$; sa probabilité ce calcule donc comme suit : $P(\alpha) = P(2) + P(4) + P(6)$

$= 0,3 + 0,15 + 0,15 = 0,6$

Tous les autres de la même façons.

Pour le 2eme cas:

Présence de l'équiprobabilité → égale de chance d'apparence

$\omega_i \subset \Omega$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

$\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \omega_3 ; \ldots ;\omega_n \}$

$P(A) = P\{\omega_1\} = P\{\omega_2\} = P\{\omega_3\} = \ldots = P\{\omega_n\} = P$.

Card $(\Omega) = n$ si $A \subset \Omega \rightarrow$ card $A = k$;$k \leq n$.

$$P(A) = \frac{card\ (A)}{card\ (\Omega)} = \frac{nombre\ des\ cas\ favorables\ (\ qui\ réalise\ A\ )}{nombre\ des\ cas\ possible}$$