CINÉTIQUE DU SOLIDE

RACHID MENINA

VII. Géométrie des masses et éléments de cinétique

Introduction

En Cinématique (chapitres précédents) les mouvements des corps (solides ou systèmes de solides) sont considérés en omettant l'inertie de ces derniers et les systèmes de forces qui leurs sont appliqués (c'est-à-dire les causes). En réalité (c.-à-d. en Dynamique) les mouvements des systèmes sont étroitement liés aux causes d'une part et à leur ***inertie*** d'autre part.

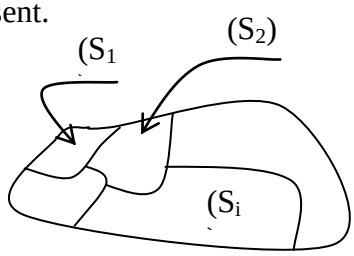
La notion d'inertie ***caractérise la propriété du corps de changer plus au moins rapidement sa vitesse sous l'effet des forces qui lui sont appliquées***. On a souvent tendance à simplifier les choses en liant celle-ci à une quantité scalaire positive invariable en Mécanique Rationnelle, appelée «***masse*** » du corps et qui fait référence à la quantité de matière contenue dans le volume de ce dernier. En effet dans le cas général, le mouvement du solide ne dépend pas uniquement de sa masse et des forces appliquées. Le caractère du mouvement peut être lié aux dimensions géométriques de ce dernier et par la suite à la distribution de sa masse dans le volume qu'il occupe.

La théorie associant les masses à leurs positions est connue sous l'appellation : « **Géométrie des masses** ». Elle permet la détermination de la **M**asse, de la position du **C**entre de masse et des **M**oments, **P**roduits et **T**enseurs d'inertie des systèmes. Associés à la distribution des vitesses, ces notions permettent à leur tour la détermination des **éléments de cinétique** tels que **Q**uantité de **M**ouvement, **M**oments **C**inétiques et **É**nergie **C**inétique qui constituent les éléments clefs sur lesquels s'articulent les théorèmes généraux de la dynamique.

7.1 Masse et Centre de masse (Centre d'inertie):

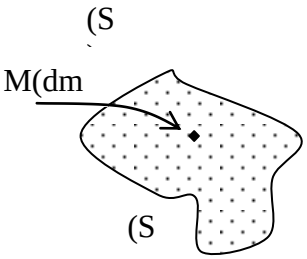
7.1.1 Notion de Masse:

À chaque solide (système) (S) est associée une quantité scalaire, positive et invariable ***m*** qui quantifie la matière contenue dans le volume de ce dernier. Scalaire additif, la masse ***m*** d'un système (S) est la somme des masses des éléments qui le composent.



- ✓ Pour une distribution discrète le système (S) est un ensemble d'éléments (S_i) c'est-à-dire $(S)=\sum_i (S_i)$ alors :

$$\boxed{m=\sum_i m_i}$$ m_i étant la masse de l'élément (S_i)



- ✓ Pour une distribution continue ((S) continu):

$$\boxed{m=\int_{(S)} dm}$$

dm est l'élément de masse au point $M\in(S)$ c.-à-d. M décrivant tout le système (S). Selon que le système occupe un volume, une surface ou une courbe l'intégrale sera explicitée comme suite :

RACHID MENINA

- Pour un système (S) occupant un volume V :

$$\boxed{m = \int_V \rho(M)dv}$$

$\rho(M)$ est la densité ou la masse volumique au point M et dv l'élément de volume du système (S).

- Pour un système (S) occupant une surface $\boldsymbol{s}$ (cas des plaques fines où l'épaisseur est négligeable devant les deux autres dimensions):

$$\boxed{m = \int_s \sigma(M)ds}$$

$\sigma(M)$ est la densité surfacique au point M et ds l'élément de surface du système (S).

- Pour un système (S) occupant une courbe $\boldsymbol{C}$ de longueur $\boldsymbol{L}$ (deux dimensions sont négligeables devant la troisième qui représente la longueur du système; exemple d'une courbe ou d'une tige fine):

$$\boxed{m = \int_L \lambda(M)dl}$$

$\lambda(M)$ est la densité linéique au point M et dl l'élément de longueur du système (S).

Remarque :

Pour les systèmes (solides) homogènes, la densité est constante par rapport à la position dans le solide. Alors :

$\boxed{m = \rho\int_V dv}$ pour les systèmes volumiques,

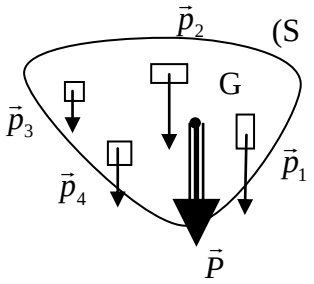
$\boxed{m = \sigma\int_s ds}$ pour les systèmes surfaciques et

$\boxed{m = \lambda\int_L dl}$ pour les systèmes linéiques.

7.1.2 Centre d'inertie (centre de masse) des solides:

Il s'agit là de déterminer la position du centre de masse du solide. Pour établir les relations qui donnent les coordonnées de ce dernier ou les composantes de son vecteur position nous allons utiliser la notion du centre de gravité.

Soit un solide (S) de masse m se composant de n éléments de masses respectives m_i. Si ce dernier est soumis au champ de pesanteur uniforme d'accélération $\vec{g}$, chaque élément sera soumis à la force de pesanteur $m_i\vec{g} = \vec{p}_i$. L'ensemble $\{\vec{p}_i\}$ est un système de forces parallèles (de même sens) orientées vers le bas.



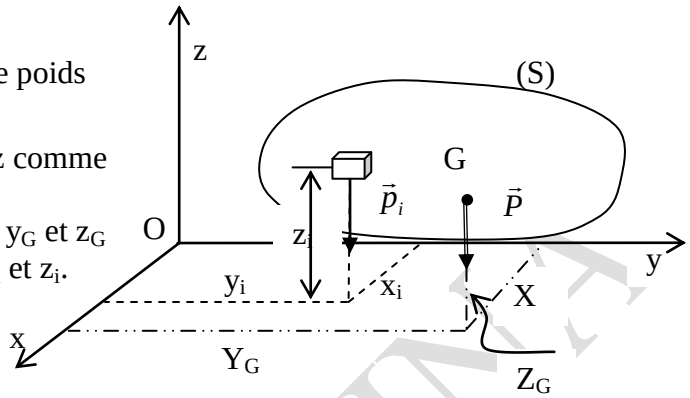
Pour un tel système la ligne d'action de la résultante $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$ passe toujours (et ceci quelque soit la disposition du solide dans l'espace) par un même point G qui est le centre de ces forces et qu'on nomme centre de gravité (en référence

RACHID MENINA

au champ de pesanteur). Ce point est invariablement lié au solide et il peut ne pas appartenir au volume qu'occupe ce dernier. Nous verrons par la suite que le vecteur accélération $\vec{g}$ étant constant il pourra être éliminé des relations et G sera désigné par centre de masse ou d'inertie du solide.

7.1.3 Coordonnées du centre G :

Soit un solide composé de n éléments de poids (en modules) respectifs p_i , $i=1,\ldots, n$, disposé dans le repère orthonormé Oxyz comme indiqué sur la figure ci contre.
Son centre G a comme coordonnées x_G, y_G et z_G et chaque élément les coordonnées x_i, y_i et z_i.
Le théorème de Varignon du moment de la résultante $\vec{P}(=\sum_i \vec{p}_i)$ par rapport aux axes de coordonnées Ox et Oy donne :



- ✓ $mt_{/Ox}(\vec{P}) = \sum_i mt_{/Ox}(\vec{p}_i)$ soit $y_G \cdot P = \sum_i y_i \cdot p_i \Rightarrow y_G = \dfrac{\sum_i y_i \cdot p_i}{P}$

- ✓ $mt_{/Oy}(\vec{P}) = \sum_i mt_{/Oy}(\vec{p}_i)$ soit $x_G \cdot P = \sum_i x_i \cdot p_i \Rightarrow x_G = \dfrac{\sum_i x_i \cdot p_i}{P}$

Les $\vec{p}_i$ étant // à Oz dans la position du solide sur la figure ci-dessus, la troisième relation qui donne z_G s'obtient en appliquant le théorème de Varignon pour l'axe Ox mais dans une position du repère Oxyz où le plan Oxz est horizontal (le solide restant lié au repère).

Ce qui donne : $z_G = \dfrac{\sum_i z_i \cdot p_i}{P}$.

Finalement les coordonnées du centre G seront données par :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{P}\sum_i x_i p_i \\ y_G = \dfrac{1}{P}\sum_i y_i p_i \\ z_G = \dfrac{1}{P}\sum_i z_i p_i \end{cases}$$

En éliminant l'accélération de la pesanteur de ces expressions on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{m}\sum_i m_i x_i \\ y_G = \dfrac{1}{m}\sum_i m_i y_i \\ z_G = \dfrac{1}{m}\sum_i m_i z_i \end{cases}}$$

RACHID MENINA

En multipliant la première relation par $\vec{i}$, la deuxième par $\vec{j}$ et la troisième par $\vec{k}$ et en sommant les résultats on obtient une relation qui définit le vecteur position de G en fonction des vecteurs positions des éléments composant le système :

$$\boxed{\vec{r}_G = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec{r}_i}$$

Dans le cas d'une distribution continue les coordonnées de G seront données par :

$$\boxed{\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_{(S)} x\, dm \\ y_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_{(S)} y\, dm \\ z_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_{(S)} z\, dm \end{cases}}$$

x, y et z étant les coordonnées de l'élément dm ; soit $\vec{r}_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_{(S)} \vec{r}\, dm$.

Remarques :

1. En remplaçant $\vec{r}_G$ par $\overrightarrow{OG}$ et $\vec{r}$ par $\overrightarrow{OM}$, sachant que G est fixe relativement à (S), la relation $\vec{r}_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_{(S)} \vec{r}\, dm$ devient après manipulation $\displaystyle\int_{(S)} \overrightarrow{OG}\, dm = \overrightarrow{OG}\, m = \int_{(S)} \overrightarrow{OM}\, dm$ **(a)**

Or $\forall M \in (S)$ on a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM} \Rightarrow \displaystyle\int_{(S)} \overrightarrow{OM}\, dm = \int_{(S)} \overrightarrow{OG}\, dm + \int_{(S)} \overrightarrow{GM}\, dm$ **(b)**

En comparant (a) et (b) on en déduit que $\displaystyle\int_{(S)} \overrightarrow{GM}\, dm = \vec{0}$.

Le centre de masse G est un point invariablement lié à (S) qui se caractérise par :

$$\forall M \in (S) \quad \int_{(S)} \overrightarrow{GM}\, dm = \vec{0}$$

2. Pour le calcul des coordonnées de G des systèmes composés on utilisera les relations discrètes.

3. Si le solide présente un vide (creux), on utilise 2) pour un système qui se composera du solide sans creux et du creux en affectant le signe (-) au creux.

4. Si le solide est homogène le centre de masse devient le centre géométrique du volume, de la surface ou de la courbe qu'occupe ce dernier.

5. Si le solide présente un élément de symétrie tel que plan ou axe de symétrie, ce dernier sera nécessairement situé sur cet élément de symétrie.

7.1.4 Centre de masse d'un solide occupant une surface ou une courbe plane :

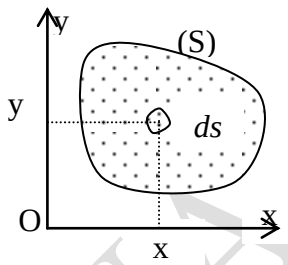
Exemples : plaque mince (disque) ou fil défini par une courbe appartenant à un plan.
Dans les deux cas la masse du corps étant répartie sur un plan le centre de masse ne peut que se trouver sur ce dernier. Les coordonnées du centre sont en nombre de deux, la troisième coordonnée est automatiquement nulle.

RACHID MENINA

7.1.4.1 *Solide occupant une surface plane :*

Il s'agit d'une distribution surfacique ou superficielle. En se référant à la figure ci-contre $dm = \rho dv = \rho e ds = \sigma(x,y)ds$ avec *e* épaisseur constante de la plaque.

Le centre G aura comme coordonnées : $\begin{cases} x_G = \dfrac{\int_{(S)} \sigma(x,y)\, x ds}{\int_{(S)} \sigma(x,y)\, ds} \\ y_G = \dfrac{\int_{(S)} \sigma(x,y)\, y ds}{\int_{(S)} \sigma(x,y)\, ds} \end{cases}$



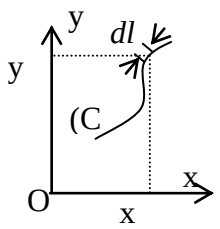
Cas où $\sigma(x,y) = Cste$ (corps homogène) :

$$\boxed{x_G = \frac{\int_{(S)} x\, ds}{s} \text{ et } y_G = \frac{\int_{(S)} y\, ds}{s}}$$

7.1.4.2 *Solide occupant une courbe plane :*

Il s'agit d'une distribution linéique. La section *s* du fil (de longueur L) est constante. En se référant à la figure ci-contre $dm = \rho dv = \rho s dl = \lambda(x,y)dl$.

Le centre G aura comme coordonnées : $\begin{cases} x_G = \dfrac{\int_{(C)} \lambda(x,y)\, x dl}{\int_{(C)} \lambda(x,y)\, dl} \\ y_G = \dfrac{\int_{(C)} \lambda(x,y)\, y dl}{\int_{(C)} \lambda(x,y)\, dl} \end{cases}$



Cas où $\lambda(x,y) = Cste$ (corps homogène) :

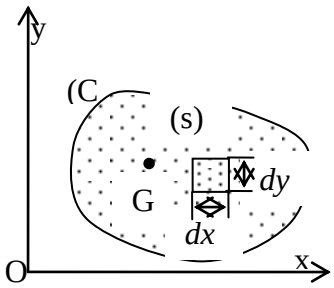
$$\boxed{x_G = \frac{\int_{(C)} x\, dl}{L} \text{ et } y_G = \frac{\int_{(C)} y\, dl}{L}}$$

7.1.5 Détermination des coordonnées du centre G des figures géométriques planes par intégration :

Le calcul est basé sur un choix approprié de l'élément *dm*.

7.1.5.1 *Cas des surfaces délimitées par des courbes:*

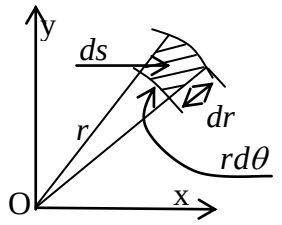
Soit un solide (S) homogène occupant une surface s délimitée par une courbe (C). Si on choisit pour *ds* le rectangle de côtés *dx* et *dy* alors *ds* = *dxdy*.



RACHID MENINA

Les coordonnées de G s'obtiendront en procédant à une double intégration le long des x puis des y en utilisant les formules établies plus haut, à savoir : $x_G = \dfrac{\int_{(S)} x\,dxdy}{s}$ et $y_G = \dfrac{\int_{(S)} y\,dxdy}{s}$

avec $s = \int_{(S)} dxdy$

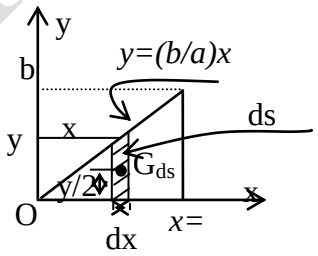


En coordonnées polaires r et θ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ et $ds = r\,d\theta\,dr = rdr\,d\theta$. Là aussi on utilisera une double intégration.

Cependant dans la majorité des cas en faisant un choix approprié de l'élément de surface ds on peut aboutir sur une simple intégration ; c'est ce qu'on découvre à travers les deux exemples suivants :

✓ **Surface délimitée par les droites d'équations *y = (b/a)x* et *x=a* et l'axe des *x*.**

En choisissant comme élément ds la surface hachurée sur la figure ci-dessous qu'on peut assimiler à un rectangle de côtés y et dx alors $ds = y\,dx$ et le centre de cet élément G_{ds} aura comme coordonnées : $x_{G_{ds}} = x$ et $y_{G_{ds}} = y/2$

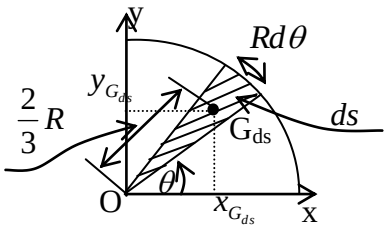


$$x_G = \frac{\int_{(S)} x_{G_{ds}} ds}{\frac{ab}{2}} = \frac{\int_0^a xydx}{\frac{ab}{2}} = \frac{\int_0^a x\frac{b}{a}xdx}{\frac{ab}{2}} = \frac{\frac{b}{a}\int_0^a x^2dx}{\frac{ab}{2}} = \frac{\frac{b}{a}\frac{a^3}{3}}{\frac{ab}{2}} = \frac{2}{3}a$$

$$y_G = \frac{\int_{(S)} y_{G_{ds}} ds}{\frac{ab}{2}} = \frac{\int_0^a \frac{y}{2}ydx}{\frac{ab}{2}} = \frac{\int_0^a \left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2dx}{ab} = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2\int_0^a x^2dx}{ab} = \frac{1}{3}b\,.$$

✓ **Surface d'1/4 de disque de rayon R disposé selon la figure ci-contre.**

L'élément de surface est le secteur hachuré de surface $ds = \dfrac{R\,Rd\theta}{2} = \dfrac{R^2d\theta}{2}$ et de centre G_{ds} situé à $\frac{2}{3}R$ de O c.-à-d. de coordonnées : $x_{G_{ds}} = \frac{2}{3}R\cos\theta$ et $y_{G_{ds}} = \frac{2}{3}R\sin\theta$.



Il s'agit de la surface d'un triangle isocèle de base $Rd\theta$ et de hauteur R.
Le centre G du ¼ de disque aura comme coordonnées :

$$x_G = \frac{\int_{(1/4\ disque)} x_{G_{ds}} ds}{\frac{\pi R^2}{4}} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2R}{3}\cos\theta\frac{R^2}{2}d\theta}{\frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4R}{3\pi}$$ et $y_G = \dfrac{4R}{3\pi}$ (les calculs pour y_G sont identiques à ceux de x_G).

RACHID MENINA

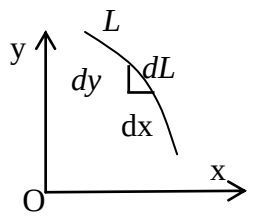
7.1.5.2 *Cas des courbes planes:*

Soit un corps homogène occupant une courbe plane (C) de longueur L et d'équation $y = f(x)$ ou $x = f^{-1}(y)$ et $r = f(\theta)$ ou $\theta = f^{-1}(r)$, selon qu'on utilise les coordonnées cartésiennes ou les coordonnées polaires.

Les coordonnées du centre G sont données par les formules suivantes :

$x_G = \frac{1}{L}\int_{(C)} x_{G_{dl}} dL$ et $y_G = \frac{1}{L}\int_{(C)} y_{G_{dl}} dL$. Il faut alors trouver l'expression de dl en fonction de x et y ou r et θ selon le cas de coordonnées qu'on utilise.

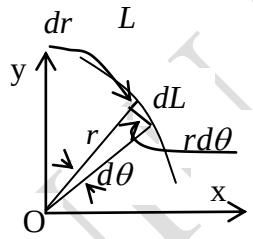
Système de coordonnées cartésiennes



$$(dL)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

- $dL = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ si $y = f(x)$ ou
- $dL = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$ si $x = f^{-1}(y)$

Système de coordonnées polaires



$$(dL)^2 = (rd\theta)^2 + (dr)^2$$

$dL = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$ pour $r = r(\theta)$.

Exemple de calcul des cordonnées d'une courbe plane :

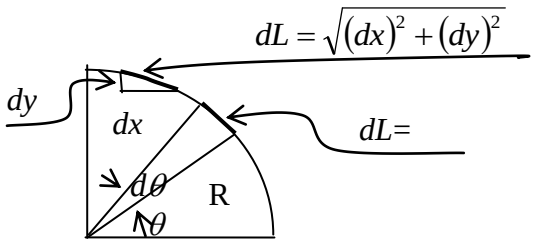
Soit à déterminer les coordonnées du ¼ de cercle de rayon R disposé comme indiqué sur la figure ci-dessous à droite. La longueur de la courbe est $L = \frac{\pi}{2}R$.

- En coordonnées polaires : (voir figure)

$x_{G_{dL}} = R\cos\theta,\ y_{G_{dl}} = R\sin\theta$ et $dL = Rd\theta$; alors

$$x_G = \frac{1}{\frac{\pi R}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos\theta d\theta = \frac{2R}{\pi}\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R}{\pi} \text{ et}$$

$$y_G = \frac{1}{\frac{\pi R}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\sin\theta d\theta = \frac{2R}{\pi}(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R}{\pi}.$$



- En coordonnées cartésiennes : (voir figure ci-dessus)

$x_{G_{dL}} = x,\ y_{G_{dl}} = y$ et $dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$.

RACHID MENINA

L'équation du ¼ de cercle $x^2+y^2=R^2$ donne $y=\sqrt{R^2-x^2}$ soit $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$

D'où $dL=\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\dfrac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx$ d'où :

$$x_G=\frac{1}{\frac{\pi R}{2}}\int_0^R x_{G_{dL}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^R\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx=\frac{2}{\pi}\left(-\sqrt{R^2-x^2}\Big|_0^R\right)=\frac{2R}{\pi}$$

$$y_G=\frac{1}{\frac{\pi R}{2}}\int_0^R y_{G_{dL}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^R\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx=\frac{2}{\pi}\left(x\Big|_0^R\right)=\frac{2R}{\pi}.$$

Remarque :

La réduction du nombre d'intégrations par un choix approprié de l'élément différentiel d'intégration est aussi valable pour les corps occupants des volumes. Il est même possible, dans certains cas, de passer d'une intégrale triple à une intégrale simple ; ce qui réduit considérablement les calculs.

7.1.6 Théorèmes de Guldin :

Une autre méthode simple de détermination des centres des courbes et des surfaces planes, due à **Guldin**, consiste en deux théorèmes qui portent son Nom. Elle est basée sur la génération de surfaces ou de volumes de révolution en faisant tourner des courbes ou des surfaces planes autour d'axes qui ne les coupent pas.

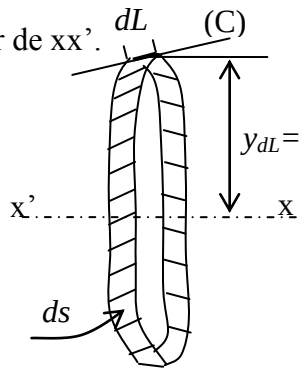
Théorème I:

Soit un élément dL d'une courbe (C) de longueur L en rotation autour de xx'.

L'élément de surface engendré par la rotation de dL est $ds=2\pi y_{dL}dL$

D'où la surface de révolution $s=\int_{(S)}ds=\int_{(C)}2\pi y_{dL}dL=2\pi\underbrace{\int_{(C)}y\,dL}_{y_{G_{(C)}}L}$

$$\Rightarrow\boxed{s=2\pi y_{G_{(C)}}L}$$



Énoncé du théorème I:

L'aire d'une surface de révolution est égale au produit de la longueur de la courbe plane génératrice par la distance parcourue par le centre de cette dernière dans sa rotation autour de l'axe de révolution.

RACHID MENINA

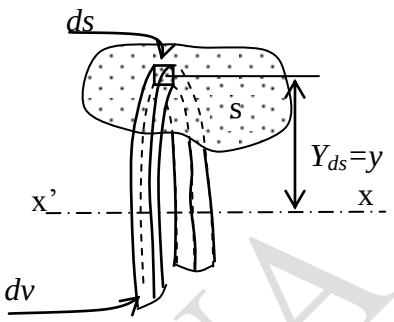
Théorème II:
Soit un élément de surface *ds* d'une surface plane d'aire *s* en rotation autour d'un axe xx'.

L'élément de volume engendré par la rotation de *ds* est :

$dv = 2\pi y_{ds} ds$. D'où le volume de révolution

$$V = \int_{(V)} dv = \int_{s} 2\pi y_{ds} ds = 2\pi \underbrace{\int_{s} y ds}_{y_{G(s)} s}$$

$$\Rightarrow \boxed{V = 2\pi y_{G_{(s)}} s}$$



Enoncé du théorèmeII:

Le volume d'un solide de révolution est égal au produit de l'aire de la surface génératrice par la distance parcourue par le centre de cette dernière dans sa rotation autour de l'axe de révolution.

7.2 Moments, produits et tenseurs d'inertie :

La position du centre de masse ne suffit pas à elle seule pour définir complètement la distribution de la masse dans le système (solide). Soit par exemple un système composé de deux masselottes identiques disposées sur une tige non pesante, l'ensemble pouvant tourner dans un plan horizontal autour du milieu de la tige. Si les deux masselottes sont équidistantes par rapport au milieu de la tige, le centre de masse qui sera confondu avec le milieu de la tige sera indépendant de la distance des masses à ce dernier. En faisant varier cette distance le centre de masse ne changera pas de position mais la répartition de la masse changera ce qui influencera le mouvement (rotation) du système autour du milieu de la tige. Plus la distance est grande plus l'inertie l'est aussi. D'où la nécessité d'introduire, dans le cas du mouvement de rotation, d'autre notions qui tiennent compte des distances dans le solide ou le système, à savoir les moments, produits et tenseurs d'inertie.

7.2.1 Moments et produits d'inertie :

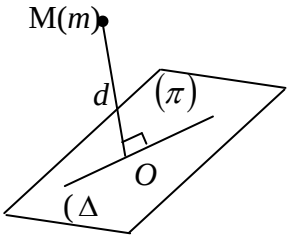
Les moments et produits d'inertie sont des caractéristiques de la répartition de la masse en mouvement. On les utilise dans les cas des mouvements autres que le mouvement de translation.

7.2.1.1 Définitions :

a) On appelle moment d'inertie de la masse ponctuelle *m* (située en un point M) par rapport à un plan (π), un axe (Δ) ou un point *O* le produit md^2 où *d* est la distance de M à (π), (Δ) ou *O*.

Soit :

$$\boxed{I_{/(\pi),\,(\Delta),\,O} = md^2}$$



RACHID MENINA

b) Si $(S)=\{S_i, i=1,\ldots,n\}$ de masse m_i chacun, un ensemble de points matériels par exemple, alors :

$$\boxed{I_{/(\pi),\,(\Delta),\,O} = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2}$$

c) Si (S) se présente comme une distribution continue de la masse alors :

$\boxed{I_{/(\pi),\,(\Delta),\,O} = \int_{(S)} d^2 dm}$ où d est la distance de l'élément de masse dm à (π), (Δ) ou O.

d) **Rayon de giration** : On appelle rayon de giration d'un solide de masse m par rapport à un axe (Δ) la distance $R_{giration}$ donnée par :

$$\boxed{R_{giration} = \sqrt{I_{/(\Delta)}/m}}$$

e) On appelle produit d'inertie de la masse ponctuelle m (située en un point M) relativement aux deux axes de coordonnées Ox_i, Ox_j $i \neq j$ le produit mx_ix_j où x_i respectivement x_j est la coordonnée de M suivant Ox_i respectivement Ox_j, soit :

$$\boxed{I_{Ox_ix_j}(m) = mx_ix_j}$$

7.2.1.2 Expressions analytiques générales des moments et produits d'inertie d'une distribution continue :

Soit un solide continu (S) dans un repère $Oxyz$ et un élément de masse dm situé en un point M(x,y,z) de (S).

✓ Le moment d'inertie par rapport à l'origine du repère O est donné par :

$$\boxed{I_{/O}(S) = \int_s \left(x^2+y^2+z^2\right) dm}$$

✓ Les moments d'inertie par rapport aux trois axes de coordonnées Ox, Oy et Oz sont donnés par :

$$\boxed{\begin{aligned} I_{/Ox}(S) &= I_{xx}(S) = \int_s \left(y^2+z^2\right) dm, \\ I_{/Oy}(S) &= I_{yy}(S) = \int_s \left(x^2+z^2\right) dm \quad \text{et} \\ I_{/Oz}(S) &= I_{zz}(S) = \int_s \left(x^2+y^2\right) dm. \end{aligned}}$$

✓ Les moments d'inertie par rapport aux plans xOy, xOz et yOz sont donnés par :

$$\boxed{I_{/xOy}(S) = \int_s z^2 dm,\ I_{/xOz}(S) = \int_s y^2 dm \ \text{ et } \ I_{/yOz}(S) = \int_s x^2 dm}$$

RACHID MENINA

Remarque:

On voit bien de ce qui précède que $\boxed{I_{/O} = I_{/xOy} + I_{/xOz} + I_{/yOz} = \frac{1}{2}\left(I_{/Ox} + I_{/Oy} + I_{/Oz}\right)}$.

✓ Les produits d'inertie relativement aux axes *Ox-Oy*, *Ox-Oz* et *Oy-Oz* sont donnés par :

$$\boxed{I_{Oxy}(S) = I_{xy}(S) = \int_S xydm,\ I_{Oxz}(S) = I_{xz}(S) = \int_S xzdm \text{ et } I_{Oyz}(S) = I_{yz}(S) = \int_S yzdm}$$

La notation $I_{x_i x_j}(S)$ avec $i \neq j$ est utilisée quant ça ne prête pas à une confusion.

7.2.2 Tenseurs d'inertie:

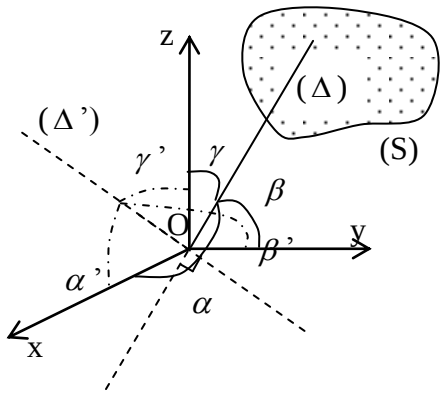
7.2.2.1 Définition:

On appelle **matrice** ou **tenseur d'inertie en *O* du solide (*S*), relativement au repère** $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ **ou R(*Oxyz*), la matrice** : $\begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{xx} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{xx} \end{pmatrix}$, **notée** $\tau_{O/R}(S)$ **dont les éléments sont les moments et produits d'inertie (à un signe prés) du solide (*S*) relativement aux axes *Ox*, *Oy* et *Oz*.**

7.2.2.2 Expressions du moment et produit d'inertie en fonction du tenseur $\tau_{O/R}(S)$:

Il s'agit là d'exprimer le moment d'inertie d'un solide (*S*) par rapport à un axe (Δ) quelconque mais passant par *O* et le produit d'inertie relativement à deux axes (Δ) et (Δ') orthogonaux en *O* en fonction du tenseur d'inertie en ce même point relativement au repère $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soient deux droites (Δ) et (Δ') ⊥ en *O* et de vecteurs directeurs $\vec{u}_\Delta = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_{\Delta'} = \begin{pmatrix} \cos\alpha' \\ \cos\beta' \\ \cos\gamma' \end{pmatrix}$



et soit donné le tenseur d'inertie en O, relativement au repère *R* de base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, $\tau_{O/R}(S)$.

On démontre que :

1. le moment d'inertie du solide (*S*) par rapport à (Δ), relativement au repère $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, s'exprime par : $\boxed{I_{/(\Delta)}(S) = \vec{u}_\Delta^T \tau_{O/R}(S)\vec{u}_\Delta}$

avec $\vec{u}_\Delta^T = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ le vecteur directeur transposé (ou ligne) de la droite (Δ).

2. le produit d'inertie de (*S*) relativement aux deux droites (Δ) et (Δ') ⊥ en *O*, relativement au repère $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, s'exprime par : $\boxed{I_{/(\Delta),(\Delta')}(S) = -\vec{u}_{\Delta'}^T \tau_{O/R}(S)\vec{u}_\Delta}$

avec $\vec{u}_{\Delta'}^T = (\cos\alpha',\ \cos\beta',\ \cos\gamma')$ le vecteur directeur transposé (ou ligne) de la droite (Δ').

RACHID MENINA

7.2.3 Tenseur d'inertie et changement de repères par rotation:

Soient deux repères orthonormés $R\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ et $R'\left(O,\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'\right)$ dont l'un est en rotation par rapport à l'autre et la matrice $M_{R-R'}$ de passage de la base de R vers celle de R'.

$$\begin{pmatrix}\vec{i}'\\ \vec{j}'\\ \vec{k}'\end{pmatrix}=M_{R-R'}\begin{pmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{pmatrix}=M_{R'-R}\begin{pmatrix}\vec{i}'\\ \vec{j}'\\ \vec{k}'\end{pmatrix} \text{ avec } M^T_{R'-R}=M_{R-R'}$$

Alors :

$$\boxed{\begin{aligned}&\tau_{O/R'}(S)=M^T_{R-R'}\tau_{O/R}(S)M_{R-R'} \text{ et}\\ &\tau_{O/R}(S)=M^T_{R'-R}\tau_{O/R'}(S)M_{R'-R}\end{aligned}}$$

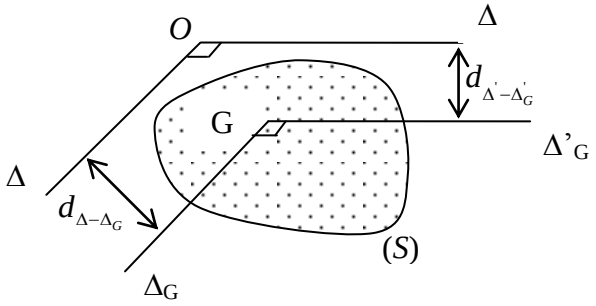
7.2.4 Moments et axes principaux d'inertie:

Le tenseur $\tau_{O/R}$ est une matrice d'une transformation linéaire symétrique et réelle dans la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. D'après le cours d'algèbre linéaire, elle admet trois (3) valeurs propres réelles et positives λ_i et trois vecteurs propres $\vec{e}_i$ qui sont les vecteurs directeurs des axes principaux d'inertie (notés API). Les λ_i sont les moments principaux d'inertie correspondants. Les produits d'inertie relativement aux axes principaux d'inertie sont nuls.
Lorsque la matrice d'inertie est déterminée au centre de masse on l'appelle matrice d'inertie centrale. Les axes principaux d'inertie sont nommés, dans ce cas, axes principaux centraux.
En plus de la détermination des API par la méthode classique s'appuyant sur la recherche des vecteurs propres, il possible de se baser sur les règles suivantes pour savoir si on est en présence ou non d'API :

- Tout axe de symétrie est un API,
- Tout axe perpendiculaire à une distribution plane est un API,
- Tout plan de symétrie d'un solide est perpendiculaire à un API et
- Si tous les produits qui contiennent l'indice de l'axe sont nuls ce dernier est un API (c'est-à-dire un axe perpendiculaire à deux API est un API).

7.2.5 Tenseurs d'inertie relativement à des repères d'origines différentes mais d'axes parallèles/ Théorème de Huygens:

Rappelons d'abord le théorème de Huygens



7.2.5.1 Théorème de Huygens :

Soient deux axes Δ et Δ' perpendiculaires entre eux et deux autres axes passants par G centre de masse de (S), Δ_G et Δ'_G **eux aussi perpendiculaires entre eux, tels que** $\Delta//\Delta_G$ et $\Delta'//\Delta'_G$. Alors :

RACHID MENINA

a) les moments d'inertie par rapport aux deux axes Δ et Δ_G sont liés par la relation suivante :

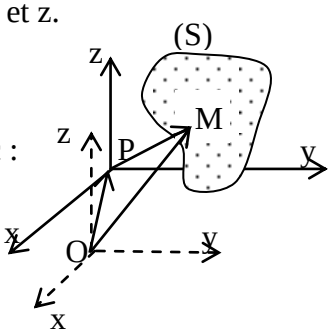
$$\boxed{I_\Delta(S) = I_{\Delta_G}(S) + md^2_{\Delta-\Delta_G}}$$ où $d_{\Delta-\Delta_G}$ est la distance de Δ à Δ_G

b) le produit d'inertie relativement aux deux axes Δ et Δ' est lié au produit d'inertie relativement aux deux axes Δ_G et Δ'_G par la relation suivante :

$$\boxed{I_{\Delta,\Delta'}(S) = I_{\Delta_G,\Delta'_G}(S) + md_{\Delta-\Delta_G}d_{\Delta'-\Delta'_G}}$$ où $d_{\Delta-\Delta_G}$ est la distance de Δ à Δ_G et $d_{\Delta'-\Delta'_G}$ la distance de Δ' à Δ'_G.

7.2.5.2 Tenseurs d'inertie relativement à deux repères d'origines différentes mais d'axes parallèles :

Soit maintenant donné $\tau_{O/R_O}(S)$ avec $R_O = R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ noté aussi *R(Oxyz)* et un solide (*S*) de masse *m*. Soit aussi un second repère $R_P = R(P,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ d'origine *P* de coordonnées x_P, y_P et z_P relativement au repère R_O. Le repère R_P et le repère R_O ont leurs axes parallèles. Tout point de (S) aura comme coordonnées relativement à R_O : x, y et z.



Alors $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = (x - x_P)\vec{i} + (y - y_P)\vec{j} + (z - z_P)\vec{j}$

Le moment d'inertie par rapport à l'axe *Px* est donnée par :

$I_{Px} = \int_{(S)} d^2_{M/Px}dm$ où $d_{M/Px}$ est la distance de *M* à l'axe *Px*. Soit donc :

$$I_{Px} = \int_{(S)} \left(y^2_{M/P} + z^2_{M/P}\right)dm$$

Sachant que $x_{M/p} = x - x_P, y_{M/p} = y - y_P$ et $z_{M/p} = z - z_P$; alors

$$I_{Px} = \int_{(S)} \left((y - y_P)^2 + (z - z_P)^2\right)dm$$

$$= \int_{(S)} \left(y^2 + z^2\right)dm + y_P^2 \int_{(S)} dm - 2y_P \int_{(S)} ydm + z_P^2 \int_{(S)} dm - 2z_P \int_{(S)} zdm$$

$$= I_{Ox} + m\left(\left(y_P^2 + z_P^2\right) - 2y_P y_G - 2z_P z_G\right)$$

Soit $I_{Px} = I_{Ox} + m\left(\left(y_P^2 + z_P^2\right) - 2y_P y_G - 2z_P z_G\right)$ et par permutations x—y—z—x

$$I_{Py} = I_{Oy} + m\left(\left(z_P^2 + x_P^2\right) - 2z_P z_G - 2x_P x_G\right)$$

$$I_{Pz} = I_{Oz} + m\left(\left(x_P^2 + y_P^2\right) - 2x_P x_G - 2y_P y_G\right)$$

x_G, y_G et z_G sont les coordonnées du centre de masse G relativement au repère R_O.

De même le produit d'inertie relativement à *Px* et *Py* est donné par $I_{Pxy} = \int_{(S)} x_{M/P} y_{M/P} dm$. Soit donc :

RACHID MENINA

$$I_{Pxy} = \int_{(S)} (x - x_P)(y - y_P)\,dm$$

$$= \int_{(s)} xydm + m(x_P y_P - x_P y_G - x_G y_P)$$

Soit : $I_{Pxy} = I_{Oxy} + m(x_P y_P - x_P y_G - x_G y_P)$ et par permutations

$$I_{Pyz} = I_{Oyz} + m(y_P z_P - y_P z_G - y_G z_P)$$

$$I_{Pxz} = I_{Oxz} + m(x_P z_P - x_P z_G - x_G z_P).$$

Si $\underline{P \equiv G}$ alors les relations précédentes deviennent :

$$\begin{cases} I_{Gx} = I_{Ox} - m\left(y_G^2 + z_G^2\right) \\ I_{Gy} = I_{Oy} - m\left(z_G^2 + x_G^2\right) \\ I_{Gz} = I_{Oz} - m\left(x_G^2 + y_G^2\right) \\ I_{Gxy} = I_{Oxy} - m x_G y_G \\ I_{Gyz} = I_{Oyz} - m y_G z_G \\ I_{Gxz} = I_{Oxz} - m x_G z_G \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} I_{Ox} = I_{Gx} + m\left(y_G^2 + z_G^2\right) \\ I_{Oy} = I_{Gy} + m\left(z_G^2 + x_G^2\right) \\ I_{Oz} = I_{Gz} + m\left(x_G^2 + y_G^2\right) \\ I_{Oxy} = I_{Gxy} + m x_G y_G \\ I_{Oyz} = I_{Gyz} + m y_G z_G \\ I_{Oxz} = I_{Gxz} + m x_G z_G \end{cases}} \quad \textbf{(\$)}$$

Les six relations (\$) traduisent le théorème de Huygens qui exprime les moments et produits d'inertie relativement à un repère dont l'origine est quelconque mais dont les axes sont parallèles aux axes du repère dont l'origine est au centre de masse G en fonction des éléments du tenseur en G et des distances des axes du premier repère par rapport aux axes du second repère.

Si on utilise les tenseurs en O et en G on aura :

$$\begin{pmatrix} I_{Ox} & -I_{Oxy} & -I_{Oxz} \\ -I_{Oxy} & I_{Oy} & -I_{Oyz} \\ -I_{Oxz} & -I_{Oyz} & I_{Oz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{Gx} & -I_{Gxy} & -I_{Gxz} \\ -I_{Gxy} & I_{Gy} & -I_{Gyz} \\ -I_{Gxz} & -I_{Gyz} & I_{Gz} \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} \left(y_G^2 + z_G^2\right) & -x_G y_G & -x_G z_G \\ -x_G y_G & \left(z_G^2 + x_G^2\right) & -y_G z_G \\ -x_G z_G & -y_G z_G & \left(x_G^2 + y_G^2\right) \end{pmatrix} \text{ ou}$$

$$\boxed{\tau_{O/R_O}(S) = \tau_{G/R_G}(S) + m D_{G/R_O}}$$

Avec m masse de (S), $R_O = R\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, $R_G = R\left(G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ et

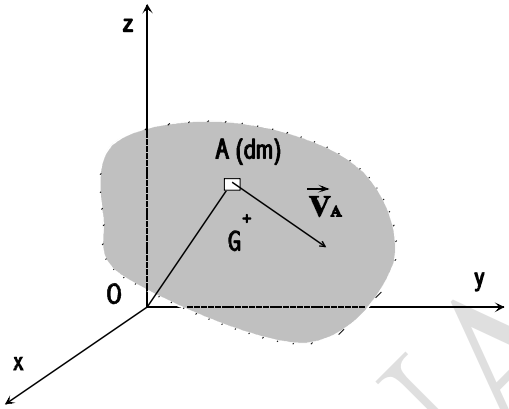
$$D_{G/R_O} = \begin{pmatrix} \left(y_G^2 + z_G^2\right) & -x_G y_G & -x_G z_G \\ -x_G y_G & \left(z_G^2 + x_G^2\right) & -y_G z_G \\ -x_G z_G & -y_G z_G & \left(x_G^2 + y_G^2\right) \end{pmatrix}.$$

RACHID MENINA

7.3 Quantité de mouvement, moment et énergie cinétiques des solides :

Soit un solide (S) de masse m en mouvement dans le repère R(Oxyz).

La quantité de mouvement $\vec{Q}^R$, le moment cinétique $\vec{L}_O^R$ par rapport au point O et l'énergie cinétique $\boldsymbol{E_c}$ du solide sont donnés respectivement par les expressions suivantes :



$$\vec{Q}^R = \int_S \vec{V}_A^R dm \qquad (1)$$

$$\vec{L}_O^R = \int_S \left(\vec{OA} \times \vec{V}_A^R\right) dm \qquad (2)$$

$$E_c = \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{V}_A^R\right)^2 dm \qquad (3)$$

Les formes finales des expressions de ces trois notions seront explicitées en fonction du type de distribution des vitesses et par conséquent du type de mouvement du solide.

7.3.1 Solide en translation pure:

$\forall$ A $\in$ (S) $\vec{V}_A^R = \vec{V}_G^R$, G étant le centre de masse du solide, alors :

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{Q}^R = m\vec{V}_G^R \\ &\vec{L}_O^R = \vec{OG} \times m\vec{V}_G^R \\ &E_c = \frac{1}{2} m \left(\vec{V}_G^R\right)^2 \end{aligned}}$$

7.3.2 Solide en rotation autour d'un axe fixe :

Soit Oz l'axe de rotation alors $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ et $\forall$ A $\in$ (S) $\vec{V}_A^R = \vec{\omega} \times \vec{OA}$,

- $\vec{Q}^R = \int_S \vec{V}_A^R dm = \int_S \left(\vec{\omega} \times \vec{OA}\right) dm = \vec{\omega} \times \int_S \vec{OA} dm = \vec{\omega} \times m\vec{OG}$

soit :

$$\boxed{\vec{Q}^R = m\vec{V}_G^R}$$

RACHID MENINA

- $\vec{L}_O^R = \int_S \vec{OA}\times(\vec{\omega}\times\vec{OA})dm = \int_S \left[\vec{OA}^2\cdot\vec{\omega} - (\vec{OA}\cdot\vec{\omega})\vec{OA}\right]dm$

$$= \int_S \left[(x^2+y^2+z^2)\omega\vec{k} - (\omega z)(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\right]dm = -\omega\vec{i}\int_S xz\,dm - \omega\vec{j}\int_S yz\,dm + \omega\vec{k}\int_S (x^2+y^2)dm$$

soit :

$$\boxed{\vec{L}_O^R = -I_{xz}\omega\vec{i} - I_{yz}\omega\vec{j} + I_{zz}\omega\vec{k}}$$

- $E_c = \frac{1}{2}\int_S (\vec{V}_A^R)^2 dm = \frac{1}{2}\int_S \vec{V}_A^R\cdot(\vec{\omega}\times\vec{OA})dm = \frac{1}{2}\int_S \vec{\omega}\cdot(\vec{OA}\times\vec{V}_A^R)dm = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\int_S (\vec{OA}\times\vec{V}_A^R)dm$

soit :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L}_O^R = \frac{1}{2}I_{zz}\omega^2}$$

7.3.3 Solide en mouvement plan :

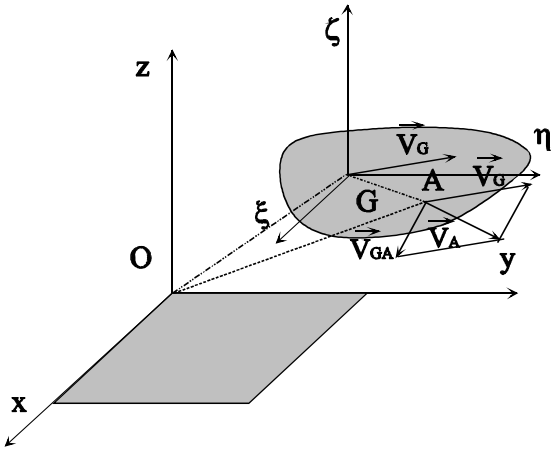
Au cours du mouvement plan d'un solide tous ses points se déplacent parallèlement à un plan fixe appelé plan de base. Le solide sera donc identifié par la section formée par l'intersection de ce dernier avec un plan parallèle au plan de base et passant par le centre de masse G. Toute étude se rapportera à cette section .

Soit Gξη la section en question (parallèle au plan fixe Oxy), les deux repères Gξηζ et Oxyz ayant leurs axes parallèles deux à deux. Le mouvement plan sera alors décomposé en une translation avec le centre de masse G et une rotation autour de l'axe Gζ.

Les expressions du moment cinétique en O et l'énergie cinétique du solide seront obtenues en tenant compte de la distribution des vitesses dans le cas du mouvement plan à savoir :

$\vec{V}_A^R = \vec{V}_G^R + \vec{V}_{A/G} = \vec{V}_G^R + \vec{V}_{GA} = \vec{V}_G^R + \vec{\omega}\times\vec{GA}$.

Aussi, on aura besoin de la décomposition du vecteur position de A, soit: $\vec{OA} = \vec{OG} + \vec{GA}$.



- $\vec{L}_O^R = \int_S (\vec{OA}\times\vec{V}_A^R)dm = \int_S (\vec{OG}+\vec{GA})\times\vec{V}_A^R dm = \vec{OG}\times\int_S \vec{V}_A^R dm + \int_S (\vec{GA}\times\vec{V}_A^R)dm$

$$= \vec{OG}\times m\vec{V}_G^R + \int_S \vec{GA}\times(\vec{V}_G^R + \vec{V}_{A/G})dm$$

$$= \vec{OG}\times m\vec{V}_G^R + \underbrace{\left(\int_S \vec{GA}dm\right)}_{m\vec{GG}=\vec{0}}\times\vec{V}_G^R + \int_S (\vec{GA}\times\vec{V}_{A/G})dm = \vec{OG}\times m\vec{V}_G^R + \int_S (\vec{GA}\times\vec{V}_{A/G})dm$$

RACHID MENINA

soit :

$$\boxed{\vec{L}_O^R = \vec{OG}\times m\vec{V}_G^R + \vec{L}_G^{R_G}}$$

si Gζ est un API, en considérant que $\vec{k}$ est le vecteur directeur de cet axe, alors $\vec{L}_G^{R_G} = I_{G\zeta}\omega\vec{k}$ et

$$\boxed{\vec{L}_O^R = \vec{OG}\times m\vec{V}_G^R + I_{G\zeta}\omega\vec{k}}$$

- $$E_c = \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{V}_A^R\right)^2 dm = \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{V}_G^R + \vec{\omega}\times\vec{GA}\right)^2 dm$$

$$= \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{V}_G^R\right)^2 dm + \int_S \vec{V}_G^R\cdot\left(\vec{\omega}\times\vec{GA}\right)dm + \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{\omega}\times\vec{GA}\right)^2 dm$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\vec{V}_G^R\right)^2 + \vec{V}_G^R\cdot\vec{\omega}\times\int_S \vec{GA}\quad dm + \frac{1}{2}\int\left(\vec{V}_A^{R_G}\right)^2 dm$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}m\left(\vec{V}_G^R\right)^2 + E_c^{R_G}}$$

si Gζ est un API alors :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}m\left(\vec{V}_G^R\right)^2 + \frac{1}{2}I_{G\zeta}\omega^2}$$

7.3.4 Solide en rotation autour d'un point fixe dans l'espace :

Soit O le point en question et *R(Oxyz)* le repère dans lequel s'effectue le mouvement de rotation. La vitesse angulaire $\vec{\omega}$ aura trois composantes dans ce repère.

$\forall$ A $\in$ (S) $\vec{V}_A^R = \vec{\omega}\times\vec{OA}$ avec $\vec{\omega}\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}$ alors :

- $$\vec{L}_O^R = \int_S \left(\vec{OA}\times\vec{V}_A^R\right)dm = \begin{pmatrix}L_{ox}^R\\ L_{oy}^R\\ L_{oz}^R\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz}\\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz}\\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{L}_O^R = \tau_{O/Oxyz}\cdot\vec{\omega}}$$

Le tenseur d'inertie est souvent déterminé relativement à un repère lié au solide pour que ses éléments soient indépendants du temps. Si de plus les axes sont des API alors :

$$\boxed{\vec{L}_O^R = \begin{pmatrix}L_1^R\\ L_2^R\\ L_3^R\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I_1\omega_1\\ I_2\omega_2\\ I_3\omega_3\end{pmatrix}}$$

RACHID MENINA

- $E_c = \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{V}_A^R\right)^2 dm = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L}_O^R = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T\cdot\tau_{O/Oxyz}\cdot\vec{\omega}$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T\cdot\tau_{O/Oxyz}\cdot\vec{\omega}}$$

Si les axes sont des API alors :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}\left[I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right]}$$

7.3.5 Solide en mouvement libre dans l'espace :

Théorèmes de Koenigs :

- Moment cinétique en O : $\boxed{\vec{L}_O^R = \vec{L}_G^{R_G} + \vec{OG}\times\vec{Q}^R}$

- Énergie cinétique : $\boxed{E_c = \frac{1}{2}m\left(\vec{V}_G^R\right)^2 + E_c^{R_G}}$

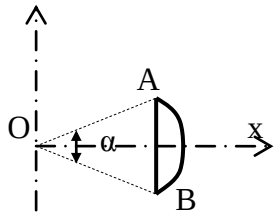
RACHID MENINA

Exercices d'application sur la cinétique du solide :

Ex 1 :

Déterminer la position du centre de gravité de la courbe fermée, formée par l'arc de cercle $\widehat{AB}$ et sa corde $\overline{AB}$.

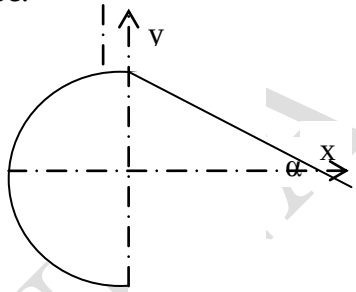
OA = OB = R et α = 60°, Ox étant axe de symétrie de la courbe.



Ex 2 :

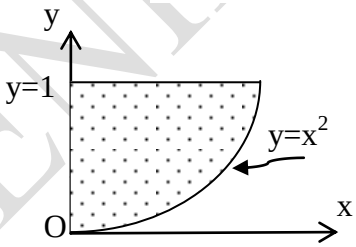
La courbe ci-contre est formée d'un demi-cercle de rayon R et d'un segment de droite de longueur L disposés comme indiqué sur la figure.

Déterminer l'angle α et la Longueur L pour que le centre de gravité de la courbe soit à l'origine du repère (Oxy).

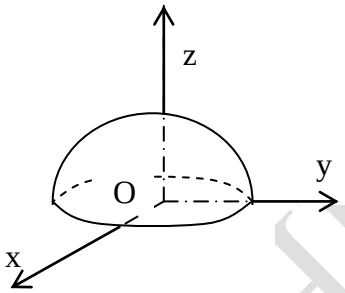


Ex 3 :

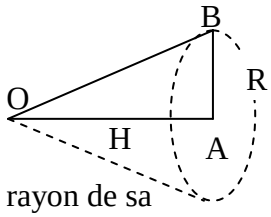
Déterminer la position du centre de la surface délimitée par la courbe $y=x^2$, la droite y=1 et l'axe des y.



Ex 4 :



Déterminer la position du centre de la surface composée le celle de la demi-sphère et de sa base de rayon R.



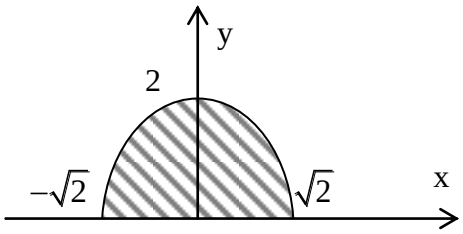
Ex 5 :

La surface d'un cône sans sa base est $S_{cône} = \pi R\sqrt{R^2 + H^2}$ où R est le rayon de sa base et H sa hauteur. Retrouver ce résultat en utilisant :

1. $S_{cône} = \int ds$ avec un choix approprié de l'élément ds pour effectuer une simple intégration.
2. Le théorème de Guldin en faisant tourner OB autour de OA.

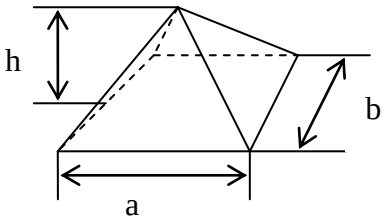
Ex 6 :

Calculer le volume engendré par la rotation de la surface, délimitée par la parabole d'équation $y=2-x^2$ et l'axe des x, dans sa rotation autour de Ox.



Ex 7 :

Déterminer le centre de gravité de la pyramide régulière de hauteur h et de base rectangulaire $a \times b$.



RACHID MENINA

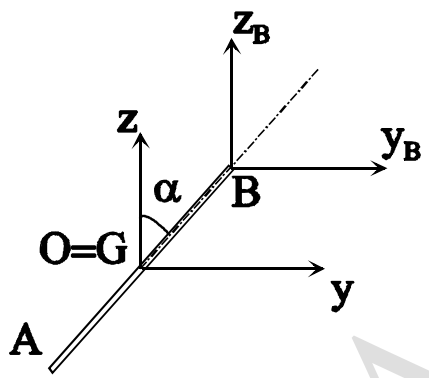
Ex 8 :

Déterminer les tenseurs d'inertie :

$\tau_{G/Gxyz}$ et $\tau_{B/Bx_By_Bz_B}$ de la barre AB de la figure ci-contre si :

$AG = GB = l$, $m_{AB} = m$ et

$AB \in$ plan yoz.

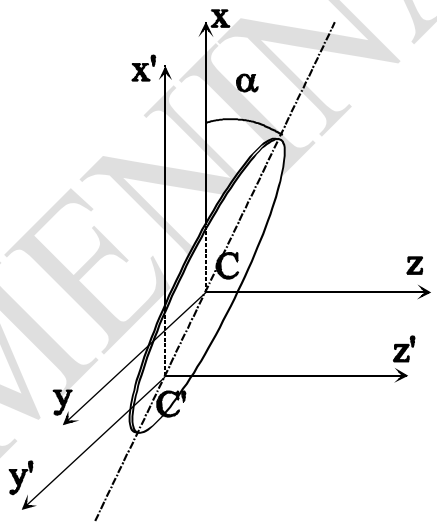


Ex 9 :

Soit le disque de centre C, de rayon R et de masse m, disposé dans le repère $Cxyz$ comme indiqué sur la figure ci-contre. Les repères $Cxyz$ et $C'x'y'z'$ sont tels que leurs axes respectifs sont // deux à deux, $CC' = a < R$ et Cx fait un angle α avec le plan du disque.

Déterminer les tenseurs :

$\tau_{C/Cxyz}$ et $\tau_{C'/C'x'y'z'}$.

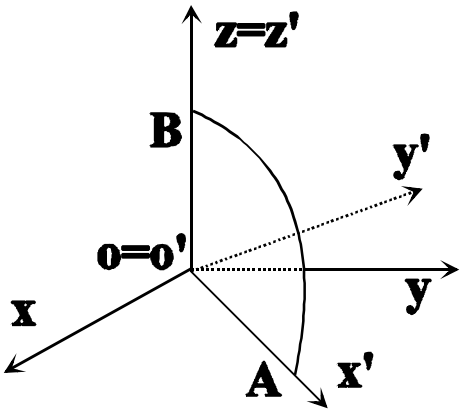


Ex 10 :

Soit une plaque homogène d'épaisseur négligeable ayant la forme d'1/4 de disque de rayon R et de centre O', tournant avec ω=*constante* autour d'un axe vertical $O'z$ confondu avec $O'B$ comme indiqué sur la figure ci-contre.

Le repère $O'x'y'z'$ est lié à la plaque (avec $O'z' \equiv O'B$, $O'x' \equiv O'A$, $O'y'$ est$\perp$ à la plaque).

La masse de la plaque étant m, déterminer le moment cinétique en O' et l'énergie cinétique de la plaque.



RACHID MENINA