CINÉMATIQUE DU SOLIDE

RACHID MENINA

IV. Cinématique du solide (mouvements simples)

Introduction

La cinématique est la théorie partielle de la mécanique qui a pour objet la description des mouvements des systèmes physiques (point matériel, système de points matériels, solide et système de solides). Ça consiste à définir les caractéristiques du mouvement du système (trajectoire, vitesse et accélérations), sans tenir compte ni de son inertie ni des forces appliquées sur lui.

L'une des notions indispensables à l'établissement de cette théorie est la notion de ***solide invariable*** c.-à-d. solide dont la distance entre deux quelconques de ses points reste constante pendant son mouvement.

Nous nous intéressons dans ce cours aux mouvements des solides pendant lesquels il n'est pas possible de négliger les dimensions de ces derniers. Il est évident que dans certains cas un corps solide peut être assimilé à un point matériel, mais il existe des situations où les dimensions de ce dernier ne peuvent être négligées. Une voiture se déplaçant d'un point à un autre, par exemple, peut être assimilée à un point matériel si nous ne cherchons pas comment elle se déplace. Par contre si nous nous intéressons à la façon avec laquelle elle se déplace (le roulement sans glissement de ses roues) il n'est plus correct de négliger les dimensions de ses roues et par la suite ses dimensions.

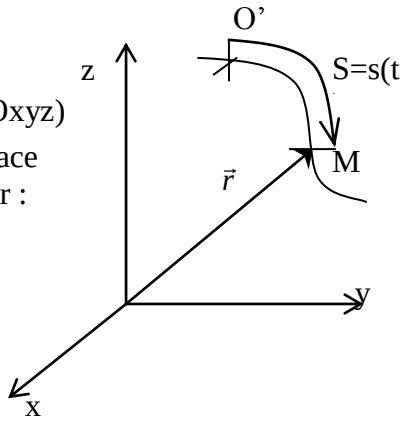
Nous commençons par rappeler certaines notions de la cinématique du point avant de passer à celle du solide.

4.1 Rappels de la cinématique du point en mouvement curviligne

4.1.1 Loi du mouvement:

Soit un point M décrivant une courbe (C) dans l'espace.

La position de ce point par rapport à un repère orthonormé (Oxyz) est donnée par le vecteur position : $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ quand M se déplace sur la courbe (C). La loi du mouvement sera donnée alors par :



$$\vec{r} = \vec{r}(t) \text{ ou } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

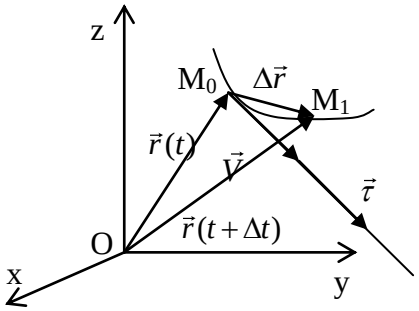
En définissant une origine sur la courbe et en l'orientant on définit l'abscisse curviligne s. La loi du mouvement sera donnée par s=s(t).

4.1.2 Vitesse d'un point en mouvement curviligne:

Soient M_0 et M_1 les positions de M aux instants t et t+Δt.

Le vecteur vitesse instantanée du point M est donnée par :

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



RACHID MENINA

- En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

- En coordonnée curviligne :

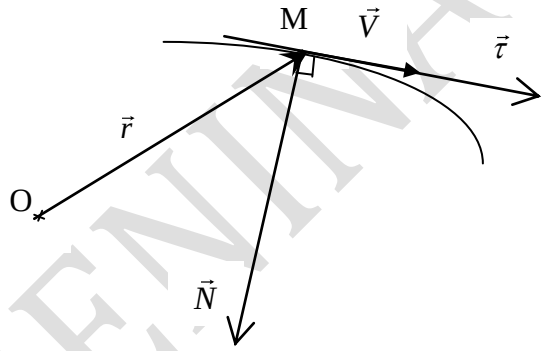
$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}$$

Où $\vec{\tau}$ est le vecteur directeur de la tangente à la trajectoire en M_0 orienté dans le sens positif de l'abscisse curviligne s, $V = \frac{ds}{dt}$ la vitesse algébrique de M à l'instant t.

Le module de $\vec{V}$ est donné par: $\|\vec{V}\| = \left|\frac{ds}{dt}\right| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

4.1.3 Accélérations d'un point en mouvement curviligne:

- composantes intrinsèques:



$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(V\vec{\tau})}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + V\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

$$= \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + V\frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} \text{ avec } \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{N}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho}\vec{N}$$

$\vec{N}$ est le vecteur directeur de la normale principale et ρ le rayon de courbure en M.

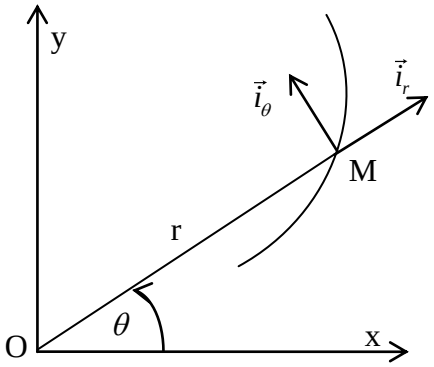
$\frac{dV}{dt}\vec{\tau}$ est le vecteur accélération tangentielle $\vec{\gamma}_t$ et $\frac{V^2}{\rho}\vec{N}$ le vecteur accélération normale $\vec{\gamma}_n$.

- composantes cartésiennes: $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$

Le module de $\vec{\gamma}$ est donné par: $\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \frac{V^4}{\rho^2}} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$

4.1.4 Cas d'une courbe plane (coordonnées polaires):

- loi du mouvement:



Équations paramétriques: $\boxed{\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases}}$

- vitesses:

$$\boxed{\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\vec{i}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{i}_r + r\frac{d\vec{i}_r}{dt} = \dot{r}\vec{i}_r + r\dot{\theta}\vec{i}_\theta}$$

$\dot{r}\vec{i}_r$ est la vitesse radiale et

$r\dot{\theta}\vec{i}_\theta$ la vitesse tangentielle.

RACHID MENINA

- Accélérations:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\gamma} &= \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\vec{i}_r + r\dot{\theta}\vec{i}_\theta\right)\\ &= \underbrace{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{i}_r}_{\text{composante radiale}} + \underbrace{\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{i}_\theta}_{\text{composante transversale}}\end{aligned}}$$

4.2 Classification des mouvements du solide:

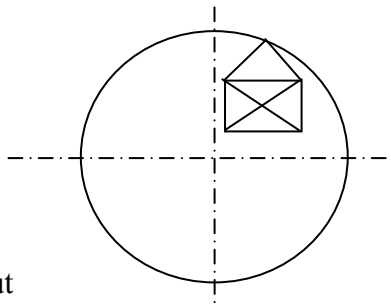
Dans tout ce qui suit on ne considère que des solides invariables. Alors, toute étude de mouvement d'un solide se subdivise en deux parties :

- Étude des caractéristiques du corps solide pris dans son ensemble (vitesse angulaire pour le mouvement de rotation par exemple…). On parlera de caractéristiques globales,

- Étude des caractéristiques de chacun de ses points (trajectoire, vitesse et accélérations).

On classifie les mouvements du solide en cinq types :

1. Mouvement de translation,
2. mouvement de rotation autour d'un axe fixe,
3. mouvement plan (parallèlement à un plan=1+2),
4. mouvement de rotation autour d'un point fixe (3 rotations autour de 3 axes concourants) et
5. mouvement libre (mouvement de rotation autour d'un point plus translation avec le point).



4.3 Mouvement de Translation d'un solide:

4.3.1 Définition:

On appelle ***mouvement de translation*** d'un solide tout mouvement pendant lequel ***chaque droite*** de ce dernier se déplace tout en ***restant parallèle à elle-même***.

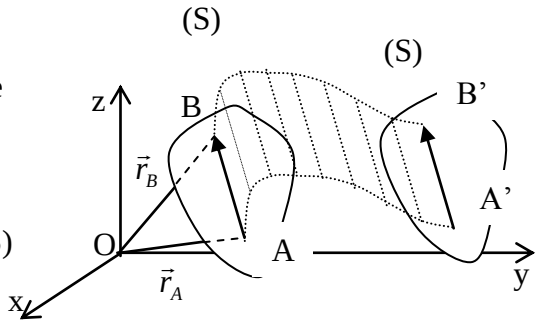
Exemple : mouvement de la nacelle d'une grande roue (Parc d'attraction) ou nacelle d'un « Ballon ».
Les propriétés du mouvement de translation sont données par le théorème suivant :

4.3.2 Théorème:

Au cours du mouvement de translation d'un solide tous ses points décrivent des trajectoires égales (superposables) et à chaque instant ils possèdent des vitesses et des accélérations égales en module et en direction.

RACHID MENINA

En effet :



Soit (S) en mvt de translation par rapport au repère Oxyz et soient A, B $\in$ (S) tels que :

$$\overrightarrow{OA}=\vec{r}_A, \overrightarrow{OB}=\vec{r}_B \text{ et } \vec{r}_B=\vec{r}_A+\overrightarrow{AB}.$$

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est tel que AB=Cste car (S) est invariable.

D'autre part la direction (support et sens) du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est fixe car (S) effectue un mouvement de translation. Donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{Cste}$ pendant le mouvement.

De la relation $\vec{r}_B=\vec{r}_A+\overrightarrow{AB}$ on en déduit que la trajectoire de B se déduit de celle de A par déplacements parallèles de tous ses points ($\in$ trajectoire de A) d'une grandeur $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

$\Rightarrow$ Les trajectoires de A et B sont superposables.

- $\vec{r}_B=\vec{r}_A+\overrightarrow{AB}$ $\quad \frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d\vec{r}_B}{dt}=\frac{d\vec{r}_A}{dt}+\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}$ avec $\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}=\vec{0}$ car $\overrightarrow{AB}$ Cst.

Donc $\boxed{\vec{V}_B=\vec{V}_A}$

- $\frac{d}{dt}\left(\vec{V}_B=\vec{V}_A\right) \rightarrow \boxed{\vec{\gamma}_B=\vec{\gamma}_A}$

Conséquence : le théorème $\Rightarrow$ le mouvement de translation d'un solide est défini par le mouvement de l'un de ses points.

$\vec{V}$, commune à tous les points, est la vitesse de translation et $\vec{\gamma}$, commune aussi à tous les points est l'accélération de translation.

NB : un mouvement de translation est en général différent du mouvement rectiligne.

4.4 Mouvement de rotation autour d'un axe fixe:

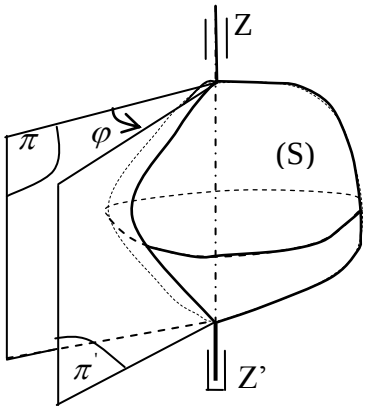
4.4.1 Définitions:

- On appelle mouvement de rotation (d'un solide) autour d'un axe fixe tout mouvement pendant lequel deux points du solide restent fixes.

- La droite passant par ces deux points est appelée axe de rotation. Du fait que le solide est invariable, tous les points $\in$ à l'axe de rotation restent fixes pendant le mouvement.

4.4.2 Caractéristiques globales du mouvement :

4.4.2.1 Loi du mouvement:



Soit un solide (S) en rotation autour de ZZ', un plan π fixe contenant ZZ' et un plan π' lié au solide et contenant ZZ'.

La position de (S) est déterminée par l'angle φ entre π et π'.

Définir la position de (S) à chaque instant revient donc à définir $\boxed{\varphi=\varphi(t)}$. C'est la loi de rotation du solide autour de l'axe fixe ZZ'.

RACHID MENINA

4.4.2.2 Vitesse angulaire ω :

Elle caractérise la rapidité de rotation du solide/ repère choisi. Si pendant Δt le solide tourne de $\Delta\varphi$ alors la vitesse angulaire moyenne est donnée par : $\boxed{\omega_{moy} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}}$ et la vitesse angulaire instantanée est donnée par :

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \omega_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{Soit} \quad \boxed{\omega = \frac{d\varphi}{dt}} \left[rd.s^{-1}\right]$$

La vitesse angulaire instantanée est égale à la dérivée première par rapport au temps de l'angle de rotation du solide.

<u>Vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$</u> :

On peut représenter la vitesse angulaire par un vecteur glissant $\vec{\omega}$ dont :

- Le support est l'axe de rotation
- Le module est $|\vec{\omega}| = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right|$ le signe $|.|$ indique aussi bien le module que la valeur absolue.
- Le sens est celui d'où la rotation du solide s'observe dans le sens contraire de la rotation des aiguilles d'une montre.

4.4.2.3 Accélération angulaire ε :

Elle caractérise la rapidité de la variation de la vitesse angulaire. Si la variation de ω correspondante à un intervalle de temps Δt est $\Delta\omega$ alors l'accélération angulaire moyenne est donnée par :

$\boxed{\varepsilon_{moy} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}}$ et l'accélération angulaire instantanée est donnée par :

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{Soit} \quad \boxed{\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}} \left[rd.s^{-2}\right]$$

L'accélération angulaire instantanée d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est égale à la dérivée première par au temps de la vitesse angulaire ω ou à la dérivée seconde par rapport au temps de l'angle de rotation φ.

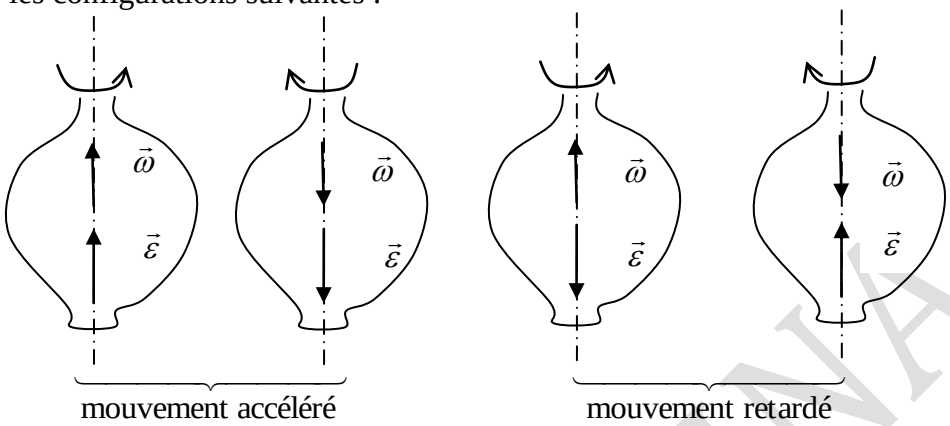
<u>Vecteur accélération angulaire $\vec{\varepsilon}$</u> :

On représente l'accélération angulaire par le vecteur glissant $\vec{\varepsilon}$ **dont :**

- Le support est l'axe de rotation
- Le module est = $|\vec{\varepsilon}| = \left|\frac{d\omega}{dt}\right| = \left|\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right|$
- Le sens coïncide avec celui de $\vec{\omega}$ si la rotation est accélérée, et de sens contraire si la rotation est décélérée.

RACHID MENINA

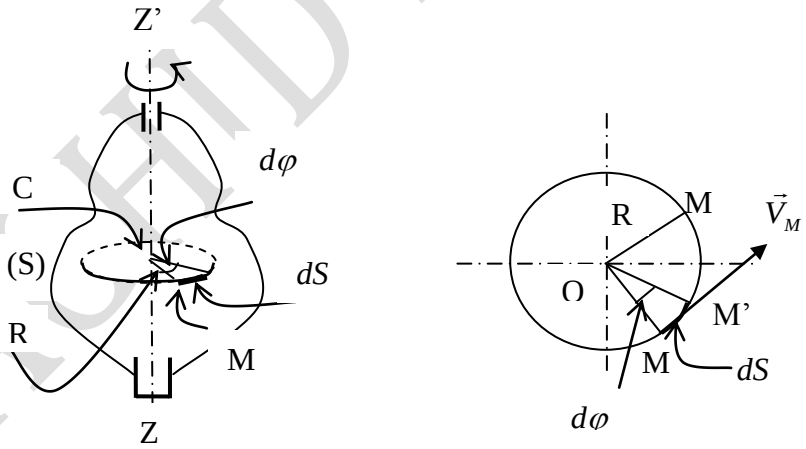
Remarque :
La rotation est accélérée si le module de $\vec{\omega}$ croit avec le temps ; elle est dite retardée si ce module décroit.
On aura alors les configurations suivantes :



4.4.3 Trajectoires, vitesses et accélérations des points d'un solide en rotation autour d'un axe fixe:

4.4.3.1 Trajectoires des points:

Au cours de la rotation du solide autour d'un axe fixe tous ses points, sauf ceux de son axe, décrivent des circonférences dans des plans perpendiculaires à l'axe.
Donc la trajectoire de chaque point (qui est un cercle) se caractérise par la distance du point à l'axe qui est le rayon du cercle décrit par ce dernier.



4.4.3.2 Vitesses des points:

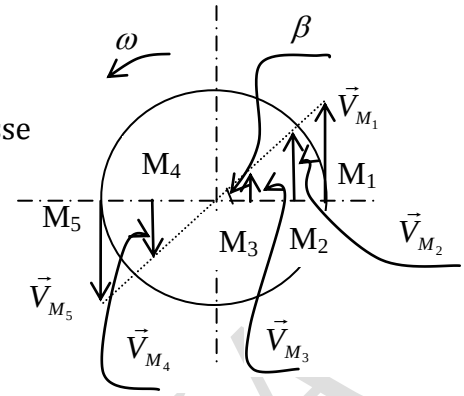
Soient ω et ε la vitesse et l'accélération de rotation du solide. Si pendant l'intervalle de temps dt le solide a tourné d'un angle $d\varphi$ alors le point M de (S) a parcouru $dS = R\,d\varphi$, voir la figure en haut.

La vitesse du point M est alors $\boxed{V_M = \frac{dS}{dt} = \frac{Rd\varphi}{dt} = R\omega}$

La vitesse du point d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est égale au produit du rayon de rotation (distance du point à l'axe de rotation) par la vitesse angulaire du corps.

RACHID MENINA

La trajectoire du point M étant un cercle $\vec{V}_M$ est porté par la tangente à ce cercle en M et est orienté dans le sens du mouvement.

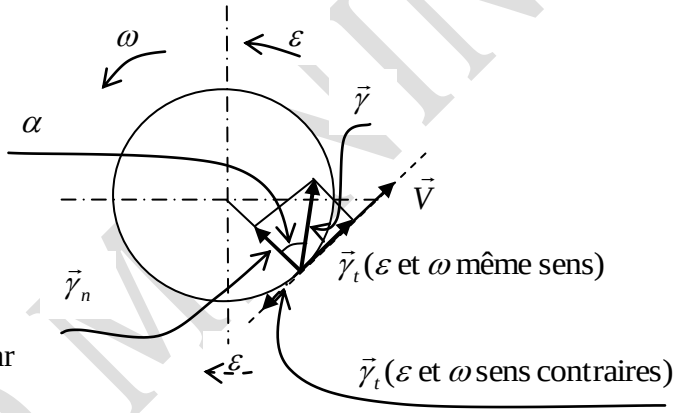


<u>Loi de distribution des vitesses</u> :

A tout instant chaque point M_i du solide à un vecteur vitesse $\vec{V}_{M_i}$ tangent en ce point au cercle qu'il décrit, dans le sens de la rotation. Le module de la vitesse est donné par $V_{M_i} = \left|\vec{V}_{M_i}\right| = R_{M_i}|\omega|$. Il en résulte :

$$\boxed{\frac{V_{M_1}}{R_{M_1}} = \ldots = \frac{V_{M_i}}{R_{M_i}} = \ldots = \frac{V_{M_n}}{R_{M_n}} = \omega = tg\beta}$$ **Loi de distribution des vitesses**

4.4.3.3 Accélérations des points:



a) Accélération tangentielle $\vec{\gamma}_t$:

$$\boxed{\gamma_t = \frac{dV}{dt} = \frac{dR\omega}{dt} = R\varepsilon}$$

L'accélération tangentielle d'un point d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est le produit du rayon de rotation par l'accélération angulaire du solide.

Le vecteur $\vec{\gamma}_t$ est perpendiculaire au rayon de rotation R et est dirigé dans le sens de rotation si celle-ci est accélérée et de sens contraire si celle-ci est retardée.

b) Accélération normale $\vec{\gamma}_n$:

$$\boxed{\gamma_n = \frac{V^2}{R} = R\omega^2}$$

L'accélération normale d'un point d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est le produit du rayon de rotation par le carré de la vitesse angulaire.

Le vecteur $\vec{\gamma}_n$ est porté par le rayon de rotation et est dirigé vers le centre (axe) de rotation.

c) Accélération totale $\vec{\gamma}$:

L'accélération totale $\vec{\gamma}$ est la somme vectorielle de $\vec{\gamma}_t$ et $\vec{\gamma}_n$. Soit $\boxed{\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n}$.

Comme $\vec{\gamma}_t \perp \vec{\gamma}_n$ alors $\boxed{\gamma = \sqrt{\gamma_t^{\,2} + \gamma_n^{\,2}} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$ et la direction de $\vec{\gamma}$ est définie par l'angle α que fait ce vecteur avec le rayon de rotation :

$$\boxed{tg\alpha = \frac{\left|\vec{\gamma}_t\right|}{\left|\vec{\gamma}_n\right|} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \text{ (indépendamment du point)}}$$

RACHID MENINA

Lois de distribution des accélérations :

Soient ω et ε la vitesse et l'accélération angulaires d'un solide en rotation autour d'un axe fixe. À un instant quelconque ω et ε sont les mêmes pour tous les points du solide. Il en résulte pour deux points indicés 1 et 2 du solide :

$$\boxed{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}=\frac{\gamma_{t1}}{\gamma_{t2}}=\frac{\gamma_{n1}}{\gamma_{n2}}=\frac{R_1}{R_2}}$$ **Loi de distribution des accélérations pour deux points du solide**.

Si on considère plusieurs points on peut écrire de ce qui précède :

$$\begin{array}{lll} \gamma_1=R_1\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4} & \gamma_{t1}=R_1\varepsilon & \gamma_{n1}=R_1\omega^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_n=R_n\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4} & \gamma_{tn}=R_n\varepsilon & \gamma_{nn}=R_{nn}\omega^2 \end{array} \quad \text{et } tg\,\alpha=\frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \text{ pour tous les points}$$

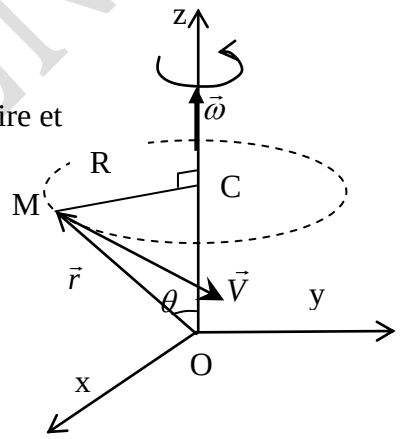
D'où :

$$\boxed{\frac{\gamma_1}{R_1}=\ldots=\frac{\gamma_n}{R_n}},\ \boxed{\frac{\gamma_{t1}}{R_1}=\ldots=\frac{\gamma_{tn}}{R_n}} \text{ et } \boxed{\frac{\gamma_{n1}}{R_1}=\ldots=\frac{\gamma_{nn}}{R_n}} \ \forall \text{ les points 1 à n de (S)}$$

Lois de distribution des accélérations

4.4.4 Expressions vectorielles des vitesses et accélérations des points d'un solide en rotation autour d'un axe fixe:

4.4.4.1 Vecteur vitesse $\vec{V}$



Soit (S) en rotation autour de Oz, $\vec{\omega}$ son vecteur vitesse angulaire et $\vec{r}$ le vecteur position d'un point M du solide par rapport au repère Oxyz.

$\vec{r}$ est constant en module mais change de direction au cours de la rotation de (S) autour de Oz. Alors :

$$\boxed{\vec{V}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{r}}$$

Le module du produit vectoriel $|\vec{\omega}\wedge\vec{r}|=|\vec{\omega}||\vec{r}|.|\sin\theta|=\omega R=V$.

D'autre part $\vec{\omega}\wedge\vec{r}$ est $\perp R$ en M et son sens dépend de celui de $\vec{\omega}$ $\Rightarrow\perp R$ et orienté dans le sens du mouvement. Donc sa direction et son sens coïncide avec de celui du vecteur vitesse $\vec{V}$

Le vecteur $\vec{\omega}\wedge\vec{r}$ coïncide donc en module, en direction et en sens avec le vecteur vitesse $\vec{V}$ défini en 4.4.3.2.

Le vecteur vitesse d'un point d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est le produit vectoriel du vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ par le vecteur position $\vec{r}$ du point en question.

Si $\vec{r}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{\omega}\begin{pmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{pmatrix}$ alors :

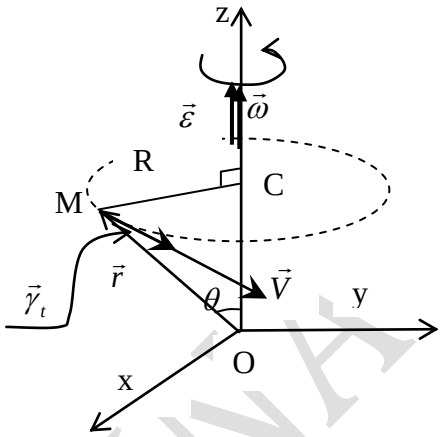
$$\boxed{\vec{V}=\vec{\omega}\wedge\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\omega_x&\omega_y&\omega_z\\x&y&z\end{vmatrix}=(z\omega_y-y\omega_z)\vec{i}+(x\omega_z-z\omega_x)\vec{j}+(y\omega_x-x\omega_y)\vec{k}}$$

RACHID MENINA

4.4.4.2 *Vecteurs accélérations*

- Accélération totale : $\vec{\gamma}$

$$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\vec{\gamma} &= \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} \ + \ \vec{\omega} \wedge \vec{V}\end{aligned}}$$



- Accélération tangentielle : $\vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} \overset{?}{=} \vec{\gamma}_t$

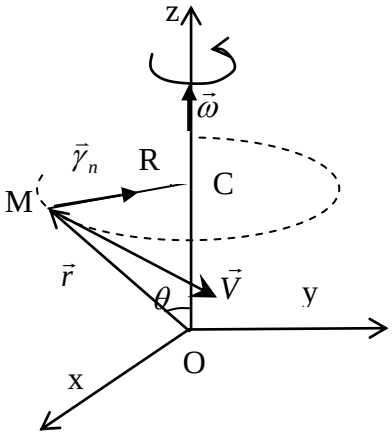
✓ $|\vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}| = |\vec{\varepsilon}||\vec{r}||\sin\theta| = |\varepsilon| R = |\vec{\gamma}_t|$,

✓ Direction de $\vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}$ $\perp$ à R en M = direction de $\vec{\gamma}_t$ et

✓ Sens dépendant de celui de $\vec{\varepsilon}$ = sens de $\vec{\gamma}_t$.

Donc $\boxed{\vec{\gamma}_t = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}}$

L'accélération tangentielle d'un point d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est le produit vectoriel du vecteur accélération de rotation $\vec{\varepsilon}$ par le vecteur position $\vec{r}$ du point considéré.



- Accélération normale : $\vec{\omega} \wedge \vec{r} \overset{?}{=} \vec{\gamma}_n$

✓ $|\vec{\omega} \wedge \vec{r}| = |\vec{\omega}||\vec{r}||\sin 90°| = \omega V = \omega R \omega = R\omega^2 = |\vec{\gamma}_n|$,

✓ Direction $\perp$ à $\vec{V}$ et $\vec{\omega}$ = direction de R et

✓ Sens vers le centre C ($\in$ axe) coïncidant avec le sens de $\vec{\gamma}_n$.

Donc $\boxed{\vec{\gamma}_n = \vec{\omega} \wedge \vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}}$

L'accélération normale d'un point d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est le produit vectoriel du vecteur vitesse de rotation $\vec{\omega}$ par le vecteur vitesse $\vec{V}$ du point en question.

RACHID MENINA

V. Mouvement plan d'un solide

Introduction

Le chapitre précédant a porté sur l'étudie de deux mouvements simples du solide, à savoir le mouvement de translation et le mouvement de rotation autour d'un axe fixe. Si nous combinons ces mouvements nous obtenons des mouvements composés qui sont plus compliqués que les deux premiers.

La combinaison d'un mouvement de translation avec un mouvement de rotation autour d'un axe fixe conduit, selon la disposition de l'axe de rotation par rapport au premier mouvement (ce dernier s'effectuant dans un plan), soit à un mouvement hélicoïdal si l'axe de rotation est confondu avec la direction de la translation rectiligne, soit à un mouvement qui se fait dans un plan ou parallèlement à un plan si l'axe de la rotation reste perpendiculaire au plan de la translation.

Un exemple du premier type de mouvement composé d'une translation et d'une rotation (mouvement hélicoïdal) est le mouvement du foret d'une perceuse. Ce mouvement n'est intéressant que dans la mesure où l'on s'intéresse au mouvement d'un point sur la surface latérale du foret. Il n'est pas développé dans ce cours. Par contre nous développerons dans ce chapitre le deuxième type de mouvement composé c.-à-d. le cas où la rotation se fait autour d'un axe qui reste perpendiculaire au plan de la translation. Il s'agit de ce qui est communément nommé ***mouvement plan***. L'exemple le plus simple de ce type de mouvement est celui du mouvement de la brosse sur le tableau lors de l'effacement de ce dernier.

Pour clore cette brève introduction sur la composition de mouvements, il faut savoir que la combinaison de plusieurs translations résulte en une translation (rien d'intéressant dans ce cas) par contre la combinaison de plusieurs rotations autour d'axes différents peut engendrer des mouvements assez intéressants par exemple la combinaison de trois rotations autour de trois axes concourants résulte en un mouvement autour d'un point fixe. Ce dernier sera développé dans le sixième chapitre.

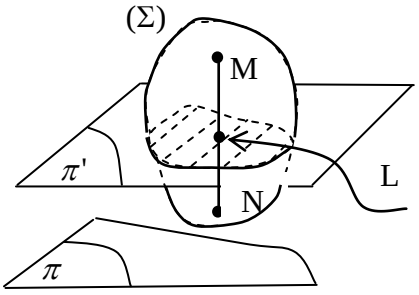
5.1 Caractéristiques globales du mouvement plan

5.1.1 Definition:

On appelle mouvement plan d'un solide tout mouvement au cours duquel tous les points du solide se déplacent parallèlement à un plan appelé <u>*plan de base*</u>.

Exemple : mouvement de la brosse sur le tableau.

5.1.2 Propriété:



Soit un plan de base (π), un solide (Σ) en mouvement Parallèlement à (π), MN un segment de (Σ)/ MN $\perp$ (π) et (π')//(π) / (π') $\cap$ (Σ)= (S) ; (S) section hachurée sur le schéma ci contre.

MN $\perp$ (π) $\Rightarrow$ MN $\perp$ (S) et MN $\cap$ (S)=L.

Aussi: (Σ) en mouvement parallèlement à (π) $\Leftrightarrow$ (S) en mouvement dans (π').

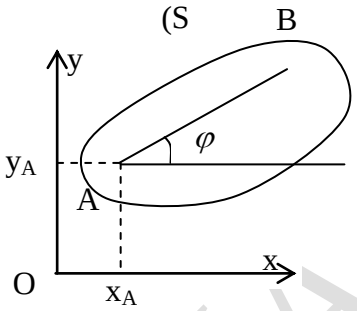
Au cours du mouvement, MN et (S) restent $\perp$ entre eux. Donc $\forall$ un point $\in$ MN, son mouvement reste identique à celui de L=$\cap$ de MN et de (S). Si nous imaginons que (Σ)= $\{M_i N_i, i=1,n\}$ alors pour étudier le mouvement de (Σ) il suffit d'étudier le mouvement de (S) dans son plan (π').

RACHID MENINA

Énoncé de la propriété :

Pour étudier le mouvement plan d'un solide il suffit d'étudier seulement le mouvement plan d'une section (S) formée par le solide et un plan parallèle au plan de base.

5.1.3 Équations du mouvement plan:



Soit (S) et AB $\in$ (S)

Position de (S) = position de AB $\in$ (S)/Oxy.

Or la position de AB est connue quand on connait les Coordonnées du point A et la direction de AB/ Ox ou Oy.

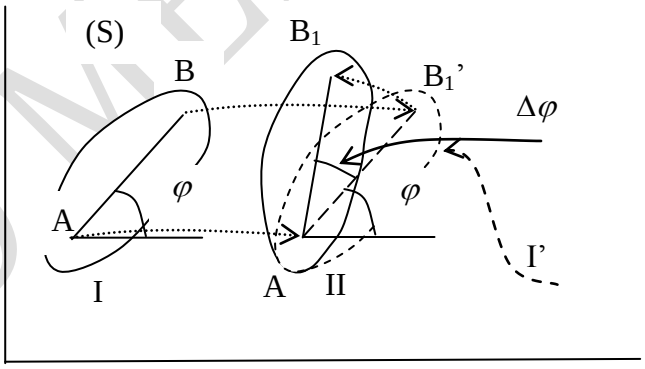
$A \rightarrow \begin{cases} x_A \\ y_A \end{cases}$ et la direction de AB/Ox est donnée par φ .

Dans le temps $\begin{cases} x_A = x_A(t) \\ y_A = y_A(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases}$ Équations du mouvement plan avec A comme pôle.

5.1.4 Décomposition en mouvements élémentaires:

Soit un solide en mouvement plan, (S) une section représentant le solide et soient les deux positions extrêmes I et II de (S).

Pour passer de I à II, on peut imaginer que la section (S) effectue d'abord un mouvement de translation de sorte que AB se déplace en restant // à elle-même ($A \rightarrow A_1$ et $B \rightarrow B_1$') puis la section (S) c.-à-d.AB effectue une rotation d'angle $\Delta\varphi$ autour de A_1 (A_1 fixe, B passe de B_1' à B_1). Le point A est dans ce cas le pôle et il peut être quelconque.



Théorème :

Le mouvement plan d'un solide peut être considéré comme une composition d'un mouvement de translation avec un pôle pendant lequel tous les points du solide se déplacent de la même façon que le pôle et d'un mouvement de rotation autour du pôle.

Si l'on revient aux équations du mouvement

$\boxed{\left.\begin{matrix} x_A = x(t) \\ y_A = y(t) \end{matrix}\right\}}$ définissent le mouvement de translation avec $v_A = \sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2}$ et $\gamma_A = \sqrt{\ddot{x}_A^2 + \ddot{y}_A^2}$ vitesse et accélération de translation.

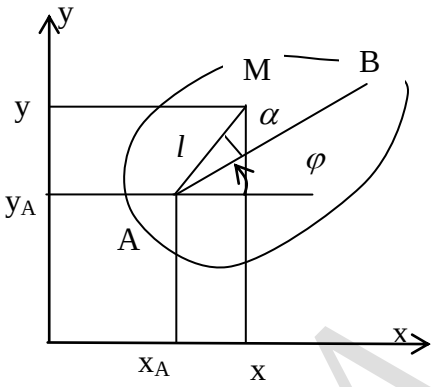
$\boxed{\varphi = \varphi(t)}$ définit le mouvement de rotation autour du pôle avec :

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \text{ et } \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \text{ vitesse et accélération angulaires.}$$

RACHID MENINA

5.2 Trajectoires des points d'un solide en mouvement plan:

Soit M∈(S), AM=l et $(\widehat{AM,AB}) = \alpha$ =Cste.



$$\begin{cases} x = x_A + AM\cos(\alpha+\varphi) \\ y = y_A + AM\sin(\alpha+\varphi) \end{cases}$$

C-à-d :

$$\boxed{\begin{cases} x = x_A + l\cos(\alpha+\varphi) \\ y = y_A + l\sin(\alpha+\varphi) \end{cases}}$$

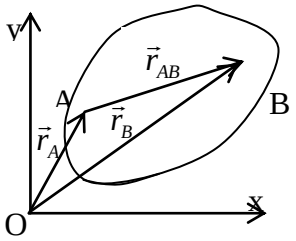
Ces deux dernières équations déterminent la loi du mouvement du point M et donnent en même temps l'équation de la trajectoire de ce dernier sous forme paramétrique.

5.3 Vitesses des points d'un solide en mouvement plan:

5.3.1 Théorème d'Euler:

La vitesse de tout point d'un solide en mouvement plan est la somme vectorielle (géométrique) de la vitesse d'un point pris comme pôle et de la vitesse « de rotation » du point considéré autour du pôle

$$\boxed{\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}}$$

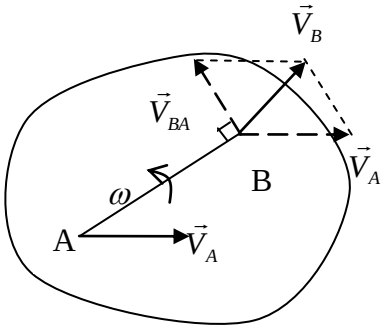


En effet $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \underbrace{\frac{d\vec{r}_B}{dt}}_{\vec{V}_B} = \underbrace{\frac{d\vec{r}_A}{dt}}_{\vec{V}_A} + \underbrace{\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}}_{?}$

$\vec{r}_{AB} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{Cste}$ en module $\xRightarrow{\text{d'aprés Euler}}$ $\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{V}_{B/A} = \vec{V}_{BA}$

où $\vec{\omega}$ est le vecteur vitesse angulaire (instantanée) ou de rotation autour de A.

d'où : $\boxed{\begin{aligned} \vec{V}_B &= \vec{V}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} \\ &= \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \end{aligned}}$



<u>Construction graphique :</u>

A→$\vec{V}_A$

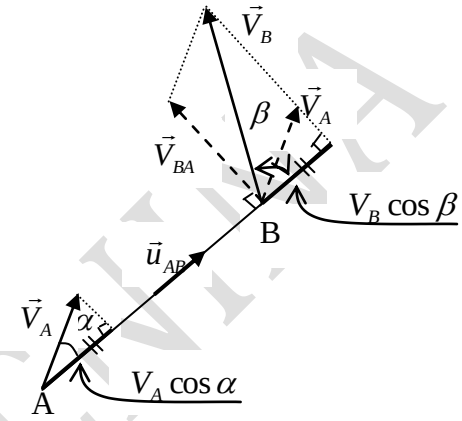
B→ on représente $\vec{V}_A$ et $\vec{V}_{BA}$ tel que $V_{BA} = \omega.AB, \omega = \frac{d\varphi}{dt}$ et $\vec{V}_{BA} \perp AB$ et dirigée dans le sens de la rotation.

$\vec{V}_B$ sera la somme vectorielle de $\vec{V}_A$ et $\vec{V}_{BA}$ en B.

RACHID MENINA

Le théorème d'Euler résulte en une relation qui peut être considérée comme une loi de distribution vectorielle des vitesses des points d'un solide en mouvement plan. Celle-ci permet de construire graphiquement $\vec{V}_B$ à partir de $\vec{V}_A$ et $\vec{V}_{BA}$ (voir construction graphique sur la page précédente) ce qui conduit, moyennant un peu de calcul, à la détermination du module et de la direction de cette vitesse. Cependant partant de cette formule vectorielle on peut par des méthodes plus simples et avec moins de calcul déterminer facilement les vitesses des points d'un solide en mouvement plan.

5.3.2 Théorème des projections des vitesses de deux points d'un solide en mouvement plan (théorème d'équiprojectivité) :



Soient deux points A et B $\in$(S) en mouvement plan de vitesses $\vec{V}_A$ et $\vec{V}_B$ / $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$ et soit $\vec{u}_{AB}$ vecteur directeur de AB.

$$(\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}).\vec{u}_{AB}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_B.\vec{u}_{AB} = \vec{V}_A.\vec{u}_{AB} + \vec{V}_{BA}.\vec{u}_{AB}$$

$\boxed{proj_{/AB}(\vec{V}_B) = proj_{/AB}(\vec{V}_A) + 0}$; $\vec{V}_{BA}.\vec{u}_{AB} = 0$ car $\vec{V}_{BA} \perp \vec{u}_{AB}$.

Soit: $\boxed{V_B \cos\beta = V_A \cos\alpha}$ (*)

Énoncé du théorème :

Les projections des vitesses de deux points d'un solide en mouvement plan sur la droite joignant ces deux points sont égales entre elles.

Alors si 3 des 4 paramètres α, β, V_A et V_B sont connus, on déduit la valeur du 4ième paramètre de la relation (*).

5.3.3 Détermination des vitesses à l'aide du CIV :

Une deuxième méthode simple de détermination des vitesses des points d'un solide en mouvement plan est basée sur la notion du **CIV** ou **CIR** (Centre Instantané des Vitesses ou Centre Instantané de Rotation). Pour se faire on imagine que le mouvement plan est une succession de rotations instantanées autour d'un centre qui change de position dans le temps. Comme on parle de centre de rotation, forcément ce dernier doit avoir à l'instant considéré une vitesse linéaire nulle.

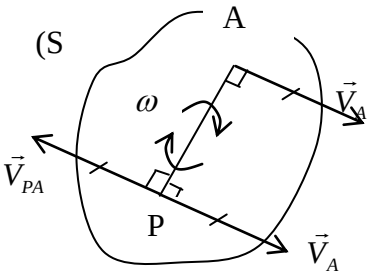
5.3.3.1 Définition du CIV:

Le CIV (ou CIR) est le point de la section (S) en mouvement plan (ou de son plan) dont la vitesse (absolue) à l'instant donné est égale à zéro c.-à-d. Si P est CIV alors $\vec{V}_P = \vec{0}$.

RACHID MENINA

5.3.3.2 *Théorème d'existence et d'unicité du CIV:*

✓ Existence du CIV :



Soit (S) en mouvement plan ($\omega \neq 0$)

A $\in$ (S) A : pôle et $\vec{V}_A$ sa vitesse $\neq \vec{0}$

Si P est CIV ($\vec{V}_P = \vec{0}$) d'après le théorème d'Euler

$0 = \vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{V}_{PA} \Rightarrow \vec{V}_A = -\vec{V}_{PA}$;

$\vec{V}_{PA}$ est la vitesse de rotation de P autour de A.

Donc $V_{PA} = \omega AP$ et $\vec{V}_{PA} \perp AP$ dans le sens de la rotation (sens de ω)

Or $\vec{V}_A = -\vec{V}_{PA} \Rightarrow V_A = \omega AP$ et $\vec{V}_A \perp AP$ dans la rotation autour de P (sens de ω).

Alors $AP = \dfrac{V_A}{\omega}$, P se trouvera sur la $\perp$ à $\vec{V}_A$ à une distance $\dfrac{V_A}{\omega}$ par rapport à A. Comme $\omega \neq 0$ P existe.

✓ Unicité :

Soient P et P' deux CIV. Si on prend P comme pôle on peut écrire : $\underset{=0}{\vec{V}_{P'}} = \underset{=0}{\vec{V}_P} + \vec{V}_{P'P}$

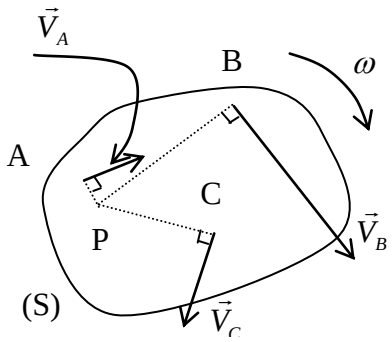
$\Rightarrow \vec{V}_{P'P} = \vec{0} \quad \Rightarrow \omega P'P = 0$ or $\omega \neq 0$ donc P'P = 0 $\Rightarrow$ P' est confondu avec P d'où l'unicité du CIV.

Énoncé du théorème :

Au cours du mouvement plan ($\omega \neq 0$) d'une section (S) il existe à tout instant dans son plan un et seulement un point dont la vitesse (absolue) est égale à zéro.

Remarque :
La notion du CIV qui considère le mouvement plan comme une succession de rotations instantanées autour des positions successives de ce point particulier conduit à la notion de « base et roulante ». En effet ce dernier décrit dans un plan fixe une première courbe fixe nommée ***base*** et dans un plan lié au solide une deuxième courbe mobile désignée par ***roulante***. Il faut savoir qu'il est possible de déterminer les équations de ces courbes et qu'elles peuvent faire partie, d'une certaine manière, de certains problèmes du mouvement plan. Toutefois nous ne considérons pas ces problèmes et nous nous contentons ici de les citer sans rentrer dans les détails.

5.3.3.3 *Détermination des vitesses au moyen du CIV:*



Soit (S) en mouvement plan avec $\omega \neq 0$, P CIV,
A, B et C $\in$ (S)

$$\xrightarrow{Théorème d'Euler} \vec{V}_A = \vec{V}_P + \vec{V}_{AP}$$
$$\vec{V}_B = \vec{V}_P + \vec{V}_{BP}$$
$$\vec{V}_C = \vec{V}_P + \vec{V}_{CP}$$

Or $\vec{V}_P = \vec{0} \Rightarrow \boxed{V_A = V_{AP} = \omega AP \quad \vec{V}_A \perp AP \text{ en A}}$ dans le sens de la rotation (sens de ω)

RACHID MENINA

$\boxed{V_B = V_{BP} = \omega BP \quad \vec{V}_B \perp BP \text{ en B}}$ dans le sens de la rotation et

$\boxed{V_C = V_{CP} = \omega CP \quad \vec{V}_C \perp CP \text{ en C}}$ dans le sens de la rotation.

Théorème:

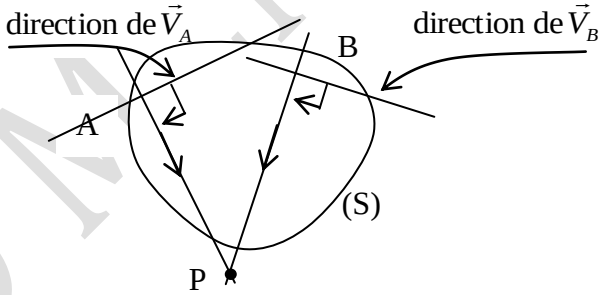
La vitesse d'un point d'un corps solide en mouvement plan est égale, en module, au produit de la vitesse angulaire de rotation par la distance du CIV au point considéré et elle est perpendiculaire en ce point au segment le joignant avec le CIV dans le sens de la rotation.

Des trois relations précédentes donnant les vitesses des points nous pouvons déduire :

$\boxed{\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP}}$, **loi de distribution des vitesses autour du CIV**

Pou pouvoir maintenant utiliser le CIV il faut d'abord le localiser. La recherche de sa position sera considérer dans le paragraphe suivant.

5.3.3.4 Détermination de la position du CIV:



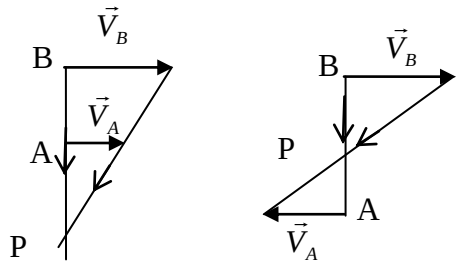
a) <u>Connues : directions de deux vitesses</u>

$P = \cap \perp$ aux directions des deux vitesses

b) <u>Connues deux vitesses $\vec{V}_A$ et $\vec{V}_B$</u>

- Directions //, $|\vec{V}_A| \neq |\vec{V}_B|$, $\vec{V}_A$ et $\vec{V}_B \perp$ AB.

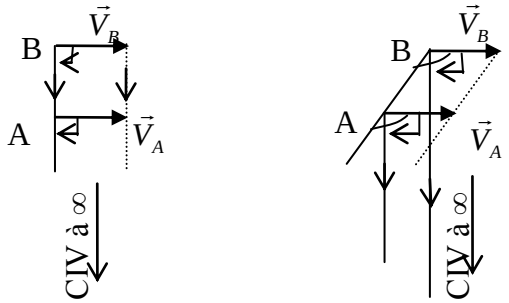
$P = \cap \perp$ aux deux vitesses et la droite joignant les extrémités des deux dernières .



même sens sens opposés

Remarque :
Dans le cas « sens opposés » les vitesses peuvent être égales en module.

- Directions //, $|\vec{V}_A| = |\vec{V}_B|$, $\vec{V}_A$ et $\vec{V}_B$ de même sens et $\perp$ ou non $\perp$ à AB.

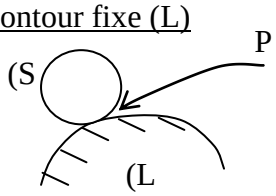


Il s'agit dans ces deux situations de translations instantanées.

RACHID MENINA

c. <u>Section plane (S) en roulement sans glissement sur un contour fixe (L)</u>

Le CIV P est le point de contact.



Remarque :
La base ici est le contour fixe (L) et la roulante est la section (S)

5.4 Accélérations des points d'un solide en mouvement plan:

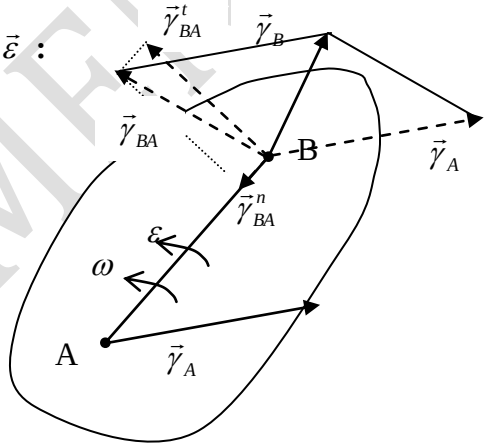
5.4.1 Théorème de Rivals:

Soient A et B $\in$ (S) $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \xrightarrow{d/dt} \boxed{\vec{\gamma}_B = \vec{\gamma}_A + \vec{\gamma}_{BA}}$

Théorème:

L'accélération d'un point d'un solide en mouvement plan est la somme géométrique de l'accélération d'un point pris comme pôle et de l'accélération de rotation autour du pôle.

Expression vectorielle de $\vec{\gamma}_B$ en fonction de $\vec{\omega}$ et $\vec{\varepsilon}$:



$$\frac{d}{dt}\left(\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}\right) \equiv \frac{d}{dt}\left(\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}\right)$$

$$\vec{\gamma}_B = \vec{\gamma}_A + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad = \vec{\gamma}_A + \underbrace{\vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{AB}}_{\vec{\gamma}^t_{BA}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{V}_{BA}}_{\vec{\gamma}^n_{BA}}$$

$\boxed{\vec{\gamma}_B = \vec{\gamma}_A + \vec{\gamma}^t_{BA} + \vec{\gamma}^n_{BA}}$ avec :

- $\vec{\gamma}^t_{BA}$ | $\left|\vec{\gamma}^t_{BA}\right| = \varepsilon AB$
  portée par la $\perp$ à AB en B dans le sens du mouvement de rotation autour de A si celui - ci est accéléré et dans le sens contraire si celui - ci est retardé.
- $\vec{\gamma}^n_{BA}$ | $\left|\vec{\gamma}^n_{BA}\right| = \omega^2 AB$
  portée par AB dans le sens B vers A.

Ll'accélération $\vec{\gamma}_B$ est la somme vectorielle de $\vec{\gamma}_A$, $\vec{\gamma}^t_{BA}$ et $\vec{\gamma}^n_{BA}$, d'où la construction graphique ci-dessus de $\vec{\gamma}_B$.

$\vec{\gamma}_B$ est le vecteur somme de $\vec{\gamma}_A$ rapporté au point B et de $\vec{\gamma}_{BA}$ de module $\boxed{\left|\vec{\gamma}_{BA}\right| = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$

et faisant un angle $\boxed{\alpha = arctg\,\frac{|\varepsilon|}{\omega^2}}$ avec BA

RACHID MENINA

Module de $\vec{\gamma}_B$:

Projection de ($\vec{\gamma}_B = \vec{\gamma}_A + \vec{\gamma}^t_{BA} + \vec{\gamma}^n_{BA}$)

$$\left.\begin{array}{l} /_{Ox} : \gamma_{Bx} = \gamma_{Ax} + \gamma^t_{BAx} + \gamma^n_{BAx} \\ /_{Oy} : \gamma_{By} = \gamma_{Ay} + \gamma^t_{BAy} + \gamma^n_{BAy} \end{array}\right\} \text{ en valeurs algébriques } \boxed{\Rightarrow \gamma_B = \sqrt{\gamma^2_{Bx} + \gamma^2_{By}}}$$

5.4.2 Détermination des accélérations des points au moyen du CIA:

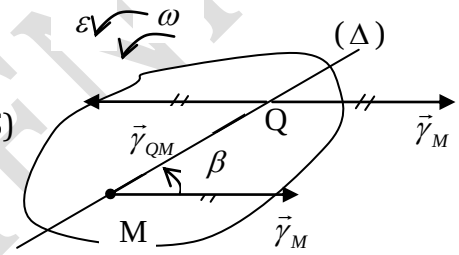
Comme dans le cas du CIV le CIA (Centre Instantané des Accélérations) ou CGA (Centre Géométrique des Accélérations) est un point dont l'accélération absolue est nulle.

5.4.2.1 Théorème 1:

Si ω et ε d'une section plane (S) représentant un solide en mouvement plan ne sont pas simultanément nulles, il existe à tout instant un et seulement un point dont l'accélération absolue est égale à zéro. Ce point est nommé CIA ou CGA.

La démonstration de l'existence et de l'unicité du CIA est identique à celle du CIV.

- Existence :



Soient ω et ε d'une section plane (S), M un point de (S) et Q le CIA. En considérant M comme pôle, d'après Rivals :

$$\vec{\gamma}_Q = \vec{\gamma}_M + \vec{\gamma}_{QM} \text{ or } \vec{\gamma}_Q = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_M = -\vec{\gamma}_{QM} \text{ soit } |\vec{\gamma}_M| = QM\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \text{ et } (\widehat{\vec{\gamma}_M, QM}) = \beta = arctg\frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$$

Donc le CIA Q se trouve sur la droite passant par M et faisant un angle β avec $\vec{\gamma}_M$ (l'angle β est représenté toujours dans le sens de ε) à une distance $QM = \dfrac{|\vec{\gamma}_M|}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$.

- Unicité : (identique à celle du CIV)

Procédure de détermination du CIA :

Pour déterminer le CIA Q connaissant $\vec{\gamma}_M$ d'un point M de (S), ω et ε,

1. On détermine β à partir de $tg\beta = \dfrac{|\varepsilon|}{\omega^2}$,

2. on mène par le point M sous l'angle β par rapport à $\vec{\gamma}_M$ une droite (Δ) de telle sorte qu'elle soit en avance sur $\vec{\gamma}_M$ si le mouvement est accéléré et en retard si ce dernier est retardé.

3. on porte sur (Δ) le segment MQ égal à $\dfrac{|\vec{\gamma}_M|}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$.

Le point ainsi obtenu est le CIA.

RACHID MENINA

5.4.2.2 *Théorème 2:*

La notion du CIA permet de traiter les accélérations des points d'un solide en mouvement plan comme si ce dernier est une rotation autour du CIA.

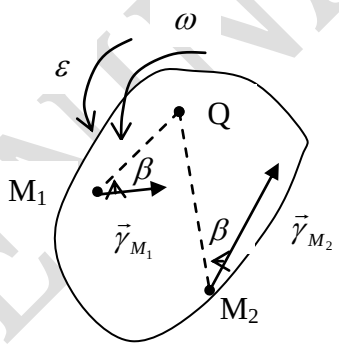
Si on prend le CIA Q comme pôle alors pout tout M de (S) on peut écrire :

$$\vec{\gamma}_M = \vec{\gamma}_Q + \vec{\gamma}_{MQ} = \vec{\gamma}_{MQ} \text{ avec } |\vec{\gamma}_M| = QM\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \text{ et } (\widehat{\vec{\gamma}_M, QM}) = \beta = arctg\frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$$

Énoncé du théorème :

L'accélération de tout point d'un solide en mouvement plan est égale à son accélération dans le mouvement de rotation autour du CIA.

5.4.2.3 *Loi de distribution des accélérations:*



Du théorème précédent on en déduit :

$$\gamma_{M_1} = QM_1\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$
$$\vdots$$
$$\gamma_{M_2} = QM_2\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\gamma_{M_1}}{QM_1} = \frac{\gamma_{M_2}}{QM_2} = \cdots = \frac{\gamma_{M_n}}{QM_n}}$$ **Loi de distribution des accélérations**

Les accélérations des points d'un solide en mouvement plan sont proportionnelles à leurs distances au CIA.

RACHID MENINA

VI. Mouvement d'un solide ayant un point fixe

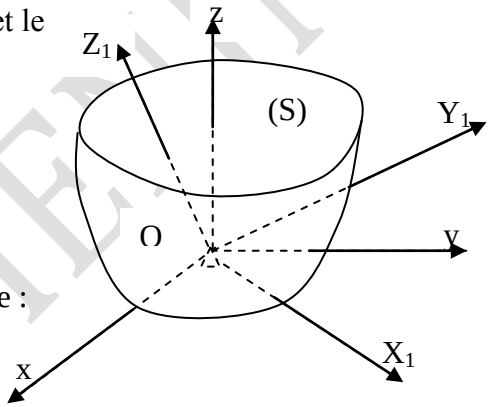
6.1 Definition

On appelle mouvement d'un solde ayant un point fixe (ou mouvement autour d'un point fixe) tout mouvement pendant lequel un point du solide (ou invariablement lié au solide) reste fixe.

Exemple : mouvement de la toupie quand son pied reste fixe.

6.2 Équations du mouvement/ angles d'Euler:

Soit un solide (S) en mouvement autour d'un point fixe Confondu avec l'origine O du référentiel fixe (Oxyz) et le référentiel ($Ox_1y_1z_1$) lié au solide (S).



La position de (S)/ (Oxyz) est connue quand celle de ($Ox_1y_1z_1$)/ (Oxyz) est connue. Or la position de $Ox_1y_1z_1$)/ (Oxyz) est déterminée par les cosinus directeurs des axes Ox_1, Oy_1 et Oz_1 c.-à-d. a_{ij} telles que :

$$\vec{i}_1 = a_{11}\vec{i} + a_{12}\vec{j} + a_{13}\vec{k}$$
$$\vec{j}_1 = a_{21}\vec{i} + a_{22}\vec{j} + a_{23}\vec{k}$$
$$\vec{k}_1 = a_{31}\vec{i} + a_{32}\vec{j} + a_{33}\vec{k}$$

Où $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont les vecteurs directeurs de (Oxyz) et $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$ et $\vec{k}_1$ sont les vecteurs directeurs de ($Ox_1y_1z_1$).

Donc apparemment la position de ($Ox_1y_1z_1$) par rapport à (Oxyz) est définie par les 9 paramètres (cosinus directeurs) a_{ij} et ces derniers sont liés par les 6 relations suivantes :

$$\vec{i}_1 \cdot \vec{i}_1 = \vec{j}_1 \cdot \vec{j}_1 = \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_1 = 1$$
$$\vec{i}_1 \cdot \vec{j}_1 = \vec{i}_1 \cdot \vec{k}_1 = \vec{j}_1 \cdot \vec{k}_1 = 0$$

Sachant que :

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$
$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

Les a_{ij} ne sont pas indépendants ; 3 seulement d'entre eux le sont et par suite la position de ($Ox_1y_1z_1$) (et celle de (S)) est définie quand on définit 3 de ces derniers.

Euler a pensé à 3 angles qui portent depuis son Nom.

RACHID MENINA

Angles d'Euler :

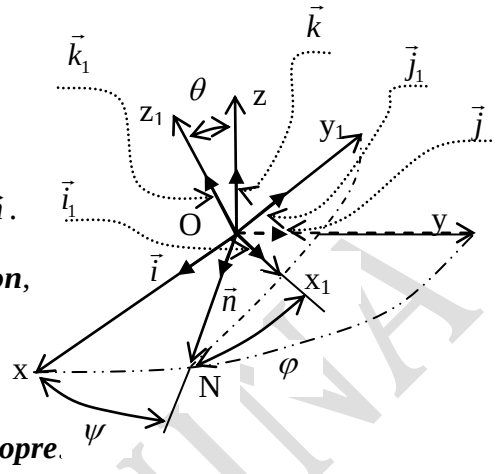
Soient les repères fixe (Oxyz) et mobile ($Ox_1y_1z_1$).

Prolongeons le plan Ox_1y_1 jusqu'à ce qu'il coupe le plan horizontal Oxy.

L'intersection des deux plans ainsi obtenue,

Orientée est désignée par $\overrightarrow{ON}$ et s'appelle :

Axe nodale ou ***ligne des nœuds*** de vecteur directeur $\vec{n}$.



- ✓ L'angle $\psi = (\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{ON}})$ est l'angle de ***précession***,
- ✓ L'angle $\theta = (\widehat{\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{Oz_1}})$ celui de la ***nutation*** et
- ✓ L'angle $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{Ox_1}})$ celui de la ***rotation propre***.

Ces angles définissent complètement la position de (S) dans l'espace relativement à Oxyz.

Au cours du mouvement ces angles varient avec le temps et les équations du mouvement seront données par:

$$\boxed{\left.\begin{aligned}\psi &= f_1(t)\\ \theta &= f_2(t)\\ \varphi &= f_3(t)\end{aligned}\right\}}$$ **Équations du mouvement de rotation d'un solide autour d'un point fixe.**

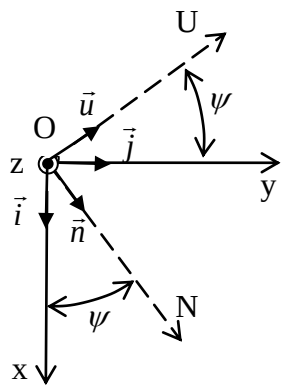
6.3 Décomposition de la rotation autour d'un point fixe en trois rotations autour de trois axes différents :

On vient de voir que le mouvement de (S) autour de O est lié à la variation des angles de précession ψ, de nutation θ et de rotation propre φ avec le temps. Ces variations d'angles donnent 3 rotations autour des axes Oz, ON et Oz_1. Examinons chaque rotation séparément.

1. Rotation d'angle ψ et d'axe Oz :

Cette rotation fait passer l'axe Ox à ON et l'axe Oy à OU c.-à-d. le trièdre (Oxyz) au trièdre (ONUz).

De la figure ci-contre on en déduit :



$$\begin{aligned}\vec{n} &= \cos\psi\,\vec{i} + \sin\psi\,\vec{j}\\ \vec{u} &= \cos\left(\psi + \pi/2\right)\vec{i} + \sin\left(\psi + \pi/2\right)\vec{j}\\ \vec{k} &= \vec{k}\end{aligned} \Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned}\vec{n} &= \cos\psi\,\vec{i} + \sin\psi\,\vec{j}\\ \vec{u} &= -\sin\psi\,\vec{i} + \cos\psi\,\vec{j}\\ \vec{k} &= \vec{k}\end{aligned}}$$

RACHID MENINA

Soit en écriture matricielle :

$$\boxed{\begin{bmatrix}\vec{n}\\ \vec{u}\\ \vec{k}\end{bmatrix} = T_\psi \begin{bmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{bmatrix}}$$ avec $$\boxed{T_\psi = \begin{vmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}}$$ matrice de passage du trièdre fixe (Oxyz) au trièdre mobile (ONUz).

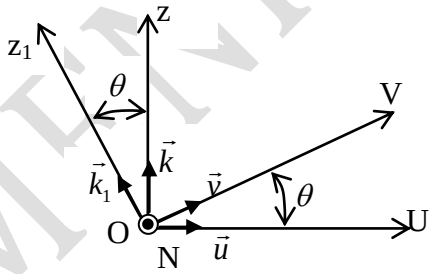
En faisant varier ψ le solide tournera autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire :

$$\boxed{\vec{\omega}_z = \vec{\omega}_\psi = \dot{\psi}\,\vec{k}}$$

2. Rotation d'angle θ et d'axe ON :

Cette rotation fait passer l'axe OU à OV et l'axe Oz à Oz_1 c.-à-d. le trièdre (ONUz) au trièdre ($ONVz_1$).

De la figure ci-contre on en déduit :



$$\boxed{\begin{aligned}&\vec{n} = \vec{n}\\ &\vec{u} = \cos\theta\,\vec{u} + \sin\theta\,\vec{k}\\ &\vec{k}_1 = -\sin\theta\,\vec{u} + \cos\theta\,k\end{aligned}}$$

Soit en écriture matricielle :

$$\boxed{\begin{bmatrix}\vec{n}\\ \vec{v}\\ \vec{k}_1\end{bmatrix} = T_\theta \begin{bmatrix}\vec{n}\\ \vec{u}\\ \vec{k}\end{bmatrix}}$$ avec $$\boxed{T_\theta = \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}}$$ matrice de passage du trièdre fixe (ONUz) au trièdre mobile ($ONVz_1$).

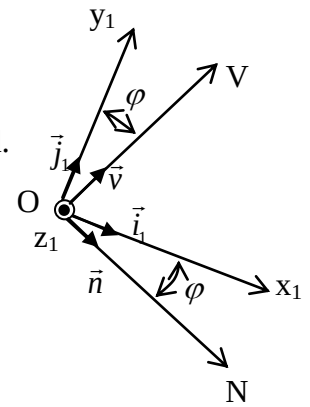
En faisant varier θ le solide tournera autour de l'axe ON avec une vitesse angulaire :

$$\boxed{\vec{\omega}_N = \vec{\omega}_\theta = \dot{\theta}\,\vec{n}}$$

3. Rotation d'angle φ et d'axe Oz_1 :

Cette rotation fait passer l'axe ON à Ox_1 et l'axe OV à Oy_1 c.-à-d. le trièdre ($ONVz_1$) au trièdre ($Ox_1y_1z_1$).

De la figure ci-contre on en déduit :



$$\boxed{\begin{aligned}&\vec{i}_1 = \cos\varphi\,\vec{n} + \sin\varphi\,\vec{v}\\ &\vec{j}_1 = -\sin\varphi\,\vec{n} + \cos\varphi\,\vec{v}\\ &\vec{k}_1 = \vec{k}_1\end{aligned}}$$

Soit en écriture matricielle :

RACHID MENINA

$$\boxed{\begin{bmatrix}\vec{i}_1\\ \vec{j}_1\\ \vec{k}_1\end{bmatrix}=T_\varphi\begin{bmatrix}\vec{n}\\ \vec{v}\\ \vec{k}_1\end{bmatrix}}$$ avec $$\boxed{T_\varphi=\begin{vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}}$$ matrice de passage du trièdre fixe ($ONVz_1$) au trièdre mobile ($Ox_1y_1z_1$).

En faisant varier φ le solide tournera autour de l'axe Oz_1 avec une vitesse angulaire :

$$\boxed{\vec{\omega}_{z_1}=\vec{\omega}_\varphi=\dot{\varphi}\,\vec{k}_1}$$

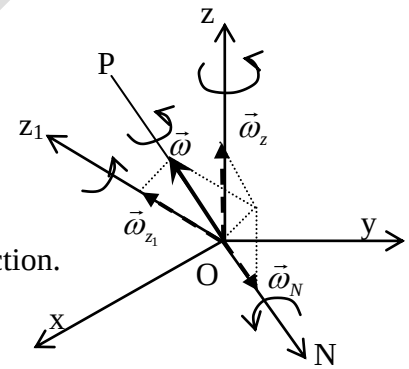
6.4 Axe, vitesse et accélération instantanés de rotation :

6.4.1 Vitesse angulaire instantanée $\vec{\omega}$:

En composant les trois rotations on fera passer le trièdre (Oxyz) au trièdre ($Ox_1y_1z_1$). En écriture matricielle on aura : $$\boxed{\begin{bmatrix}\vec{i}_1\\ \vec{j}_1\\ \vec{k}_1\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{bmatrix}}$$ avec $$\boxed{T=T_\varphi.T_\theta.T_\psi}$$

En faisant varier simultanément ψ,θ et φ le solide tournera autour de O avec une vitesse angulaire instantanée :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\omega}&=\vec{\omega}_z+\vec{\omega}_N+\vec{\omega}_{z_1}\\ &=\vec{\omega}_\psi+\vec{\omega}_\theta+\vec{\omega}_\varphi\\ &=\dot{\psi}\,\vec{k}+\dot{\theta}\,\vec{n}+\dot{\varphi}\,\vec{k}_1\end{aligned}}$$



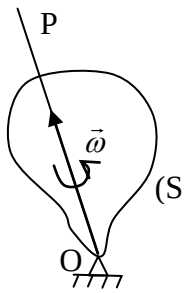
Le vecteur vitesse angulaire est variable en module et en direction.

6.4.2 Axe instantané de rotation (AIR):

6.4.2.1 Théorème d'Euler d'Alembert :

Tout déplacement d'un solide possédant un point fixe ne peut se réaliser que par une rotation de ce dernier autour d'un certain axe passant par le point fixe en question.

En effet de la composition de $\vec{\omega}$ on en déduit que la rotation du solide autour de O est à tout instant une rotation autour d'un axe OP qui porte le vecteur vitesse angulaire. Comme la direction de $\vec{\omega}$ est variable dans le temps, l'axe OP change de direction lui aussi avec le temps. C'est donc un axe instantané de rotation.



6.4.2.2 Équation de l'axe instantané de rotation :

Par analogie avec le CIV l'axe instantané de rotation, en abrégé **AIR**, est un axe du solide (ou lié au solide) dont tous les points ont à tout instant des vitesses nulles.

RACHID MENINA

Soit OP l'AIR, $\forall$ M$\in$OP $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{\omega}$ sont // alors $\vec{V}_M = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{0}$

Donc l'équation de l'AIR sous forme vectorielle est $\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \vec{0}$ avec $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

Si $\vec{\omega}\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}$ et $\vec{r}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ dans le repère fixe (Oxyz) alors ***l'équation de l'AIR OP*** exprimée dans ce même repère est : $\boxed{\dfrac{x}{\omega_x} = \dfrac{y}{\omega_y} = \dfrac{z}{\omega_z}}$.

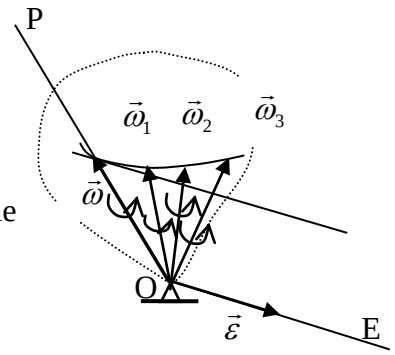
Pour exprimer l'équation de l'AIR dans le repère mobile il suffit d'exprimer $\vec{\omega}$ et $\vec{r}$ dans ce même repère.

La notion de l'AIR permet d'imaginer le mouvement du solide autour d'un point fixe comme une série de rotations instantanées de vitesses angulaires $\vec{\omega}$ autour d'axes instantanés successifs passant le point fixe O.

Les positions successives de l'axe OP engendrent dans l'espace une axoïde (dans le cas simple un cône de révolution), tandis que l'extrémité du vecteur $\vec{\omega}$ décrit une courbe sur cette surface.

6.4.3 Accélération instantanée $\vec{\varepsilon}$:

L'accélération angulaire $\vec{\varepsilon}$ du solide, qui exprime la variation de $\vec{\omega}$ (en direction et en module) en fonction du temps est : $\boxed{\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}}$



Ce vecteur est tangent à la courbe que décrit l'extrémité du vecteur $\vec{\omega}$ à l'instant considéré.

On représente ce vecteur sur un axe passant par O et parallèle à cette tangente qu'on appelle :

Axe des **A**ccélérations **I**nstantanées.

L'AAI est représenté par OE sur la figure ci-contre.

6.5 Expressions de $\vec{\omega}$ dans les repères fixe et mobile/ équations cinématiques d'Euler :

Partant de l'expression de $\vec{\omega}$ ($\vec{\omega} = \dot{\psi}\,\vec{k} + \dot{\theta}\,\vec{n} + \dot{\varphi}\,\vec{k}_1$),

- ✓ si on exprime tous les vecteurs à l'aide de la base ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) on obtient :

RACHID MENINA

$$\vec{n} = \cos\psi\,\vec{i} + \sin\psi\,\vec{j}\,,$$

$$\vec{u} = -\sin\psi\,\vec{i} + \cos\psi\,\vec{k} \quad \text{et}$$

$$\vec{k}_1 = -\sin\theta\,\vec{u} + \cos\theta\,\vec{k}$$
$$= \sin\theta\sin\psi\,\vec{i} - \sin\theta\cos\psi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}$$

Soit :

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\,\vec{k} + \dot{\theta}\cos\psi\,\vec{i} + \dot{\theta}\sin\psi\,\vec{j} + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi\,\vec{i} - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi\,\vec{j} + \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{k}$$

c.-à-d. $\vec{\omega}$ aura comme composantes :

$$\boxed{\begin{cases} \omega_x = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi \\ \omega_y = \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi \\ \omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \end{cases}}$$

expressions des composantes de $\vec{\omega}$ dans le repère fixe $(Oxyz)$

✓ si on exprime tous les vecteurs à l'aide de la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ on obtient :

$$\vec{n} = \cos\varphi\,\vec{i}_1 - \sin\varphi\,\vec{j}_1\,,$$

$$\vec{v} = \sin\varphi\,\vec{i}_1 + \cos\varphi\,\vec{j}_1$$

$$\vec{k} = \cos\theta\,\vec{k}_1 + \sin\theta\,\vec{v}$$
$$= \cos\theta\,\vec{k}_1 + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{i}_1 + \sin\theta\cos\varphi\,\vec{j}_1$$

$\vec{\omega}$ aura comme composantes :

$$\boxed{\begin{cases} \omega_{x_1} = \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi \\ \omega_{y_1} = -\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ \omega_{z_1} = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}}$$

expressions des composantes de $\vec{\omega}$ dans le repère mobile $(Ox_1y_1z_1)$

Les formules ainsi obtenues sont appelées ***équations cinématiques d'Euler***.

Remarquer que $\vec{\varepsilon}$ s'exprimera aussi bien dans le repère fixe que dans le repère mobile. Ce vecteur aura comme composantes dans le repère fixe : $\begin{cases} \varepsilon_x = \dot{\omega}_x \\ \varepsilon_y = \dot{\omega}_y \\ \varepsilon_z = \dot{\omega}_z \end{cases}$ et

$\begin{cases} \varepsilon_{x_1} = \dot{\omega}_{x_1} \\ \varepsilon_{y_1} = \dot{\omega}_{y_1} \\ \varepsilon_{z_1} = \dot{\omega}_{z_1} \end{cases}$ dans le repère mobile.

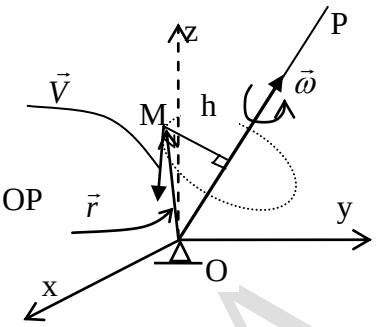
son module sera $|\vec{\varepsilon}| = \sqrt{\dot{\omega}_x^2 + \dot{\omega}_y^2 + \dot{\omega}_z^2} = \sqrt{\dot{\omega}_{x_1}^2 + \dot{\omega}_{y_1}^2 + \dot{\omega}_{z_1}^2}$.

RACHID MENINA

6.6 Vitesses des points d'un solide en rotation autour d'un point fixe:

Soit un solide (S) en rotation autour du point fixe O,

$\vec{\omega}$ son vecteur vitesse angulaire et OP l'AIR.



Étant donné qu'à chaque instant le mouvement de rotation autour du point O est une rotation autour de l'axe instantané OP, le point M de (S) décrit en ce moment un cercle autour de OP (perpendiculairement à ce dernier) et

$V = h.\omega$ où h est la distance de M à OP.

$\vec{V} \perp$ en M au plan formé par l'axe OP et le point M, dans le sens de rotation du solide.

Cependant l'axe OP change de position que se soit par rapport au solide ou par rapport au repère fixe. La grandeur de h, contrairement au mouvement de rotation autour d'un axe fixe n'est pas constante. Alors on utilisera souvent la formule vectorielle d'Euler pour exprimer la vitesse du point :

$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$, $\vec{r}$ étant le vecteur position du point M par rapport à O

$\vec{V}$ aura comme composantes $\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$ dans le repère fixe $(Oxyz)$ ou $\begin{pmatrix} V_{x_1} \\ V_{y_1} \\ V_{z_1} \end{pmatrix}$ dans le repère mobile.

$(Ox_1y_1z_1)$, comme module $|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{V_{x_1}^2 + V_{y_1}^2 + V_{z_1}^2}$ et de direction $\perp$ en M à $\vec{r}$ et $\vec{\omega}$. Le sens dépend de celui de $\vec{\omega}$ (c.-à-d. sens de rotation autour de OP).

✓ <u>Loi de distribution des vitesses</u> :

Soient A et B de points de (S) qui est en rotation autour d'un point fixe O.

$$\left.\begin{array}{l} A \rightarrow \vec{r}_A \\ B \rightarrow \vec{r}_B \end{array}\right\} \vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}$$

Les trois vecteurs sont constants en module mais variables en direction alors :

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{r}_B = \frac{d}{dt}\vec{r}_A + \frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}}$$ **Loi de distribution des vitesses.**

✓ <u>Théorème des projections</u> :

Soient A et B deux points de (S) qui est en rotation autour d'un point fixe O.

RACHID MENINA

Multipliant la relation vectorielle $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$ par le vecteur directeur de AB à savoir $\vec{u}_{AB} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$ on obtient :

$$\vec{u}_{AB}.\vec{V}_B = \vec{u}_{AB}.\vec{V}_A + \underbrace{\vec{u}_{AB}.\left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}\right)}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{AB} \perp \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}}$$

$$\Rightarrow \boxed{proj\left(\vec{V}_B\right)\Big/_{AB} = proj\left(\vec{V}_A\right)\Big/_{AB}}$$ **Expression du théorème des projections.**

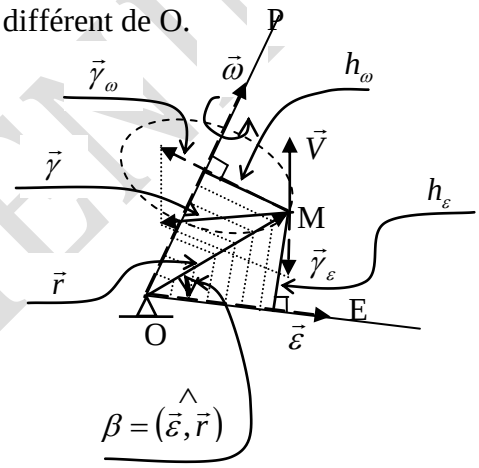
6.7 Accélérations des points du solide en rotation autour d'un point fixe:

Soient $\vec{\omega}$ et $\vec{\varepsilon}$ les vecteurs vitesses et accélérations angulaires instantanées du solide (S) en rotation autour du point fixe O, M un point de ce dernier différent de O.

$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$, $\vec{r}$ étant le vecteur position du point M / O.

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\gamma} = \underbrace{\vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}}_{=\vec{\gamma}_\varepsilon} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{V}}_{=\vec{\gamma}_\omega}}$$



a) Le produit vectoriel $\vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}$ est appelé ***accélération de rotation*** et noté $\vec{\gamma}_\varepsilon$; elle a :

- ✓ Comme module : $\left|\vec{\varepsilon}\right|\left|\vec{r}\right|\left|\sin\beta\right| = \left|\vec{\varepsilon}\right| h_\varepsilon$ avec h_ε la distance du point à l'axe instantané des accélérations OE,
- ✓ Comme direction : la $\perp$ en M au plan $(\vec{r}, OE)$,
- ✓ Comme sens : celui du coté d'où la rotation la plus courte de $\vec{\varepsilon}$ vers $\vec{r}$ se voit dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre.

b) Le produit vectoriel $\vec{\omega} \wedge \vec{V}$ est appelé ***accélération axipète*** et noté $\vec{\gamma}_\omega$; elle a :

- ✓ Comme module : $\left|\vec{\omega}\right|\left|\vec{V}\right|\sin 90° = \omega^2 h_\omega$ avec h_ω la distance du point à l'axe instantané de rotation OP,
- ✓ Comme direction : la $\perp$ en M à OP

RACHID MENINA

✓ Comme sens : celui de M vers l'axe OP.

Remarque :

$\vec{\gamma}_\varepsilon$ et $\vec{\gamma}_\omega$ ne sont pas forcement $\perp$ entre elles et par suite :

$$\boxed{|\vec{\gamma}| = \sqrt{\gamma_\varepsilon^2 + \gamma_\omega^2 + 2|\vec{\gamma}_\varepsilon||\vec{\gamma}_\omega|\cos(\vec{\gamma}_\varepsilon, \vec{\gamma}_\omega)}}$$

Parfois on a recours à la méthode analytique. Partant de l'expression $\vec{\gamma} = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ et exprimant $\vec{r}$, $\vec{\omega}$ et $\vec{\varepsilon}$ dans le même repère on détermine les composantes de $\vec{\gamma}$ dans ce dernier pour passer au calcul du module $|\vec{\gamma}| = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2}$ ou $|\vec{\gamma}| = \sqrt{\gamma_{x_1}^2 + \gamma_{y_1}^2 + \gamma_{z_1}^2}$ selon le repère utilisé.

RACHID MENINA

Exercices d'application sur la cinématique du solide :

Ex 1 :

Pendant la phase de démarrage la loi du mouvement de rotation d'une roue autour de son axe est donnée par $\varphi(t) = \frac{t^3}{3}$, φ en radians et t en secondes.

1. déterminer la vitesse angulaire ω et l'accélération angulaire ε à l'instant $t = \sqrt{30\pi}$ s.
2. à partir de cet instant le mouvement devient uniforme. Déterminer le nombre de tours par minute.
3. revenons à la phase de démarrage. Qu'elles seront la vitesse et l'accélération totale d'un point situé à 0.8 m de l'axe de rotation au moment où son accélération normale sera égale à son accélération tangentielle. En déduire la direction de l'accélération totale.

Ex 2 :

Les manchons A et B glissant le long des guides rectilignes OA et OB sont reliés par la tige AB de longueur L comme indiquée sur la figure 1. Le manchon A se déplace à vitesse constante $\vec{v}_A$. Déterminer les équations du mouvement de AB, en supposant qu'initialement A était confondu avec O. Prendre le point A comme pôle, $\widehat{BOA} = \propto = Constante$ et $\widehat{OBA} = \varphi$, φ étant l'angle de rotation du mouvement plan.

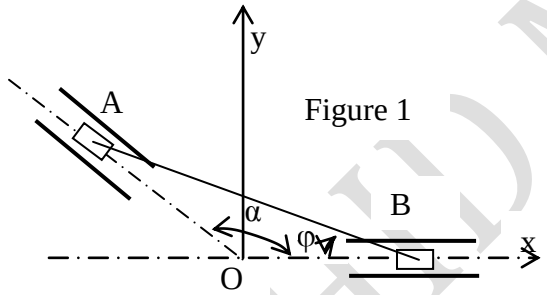


Figure 1

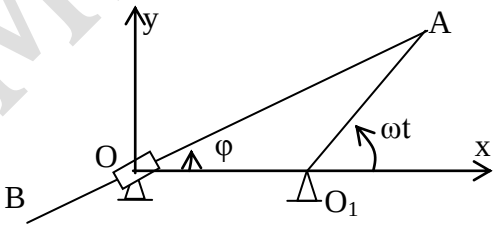


Figure 2

Ex 3 :

La manivelle O_1A de longueur L tourne à ω = Const autour de O_1. La tige AB articulée en A à O_1A peut glisser à l'intérieure du manchon creux pivotant autour de O; $OO_1 = L/2$.

1. trouver les équations du mouvement de la tige AB et les coordonnées du point M$\in$ à cette dernière tel que AM = L (prendre A comme pôle).
2. déterminer la vitesse du point de AB confondu avec O aux moments où φ = 0°, 45° et 90°. L'angle φ est indiqué sur la figure 2.

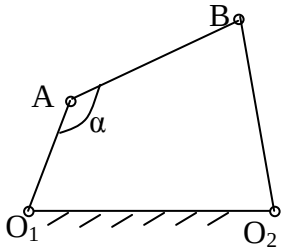


Figure 4

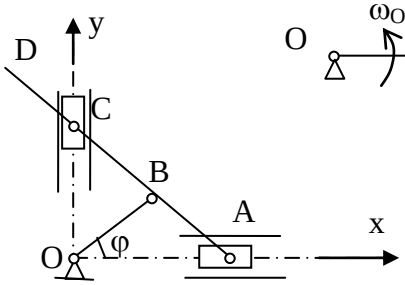


Figure 3

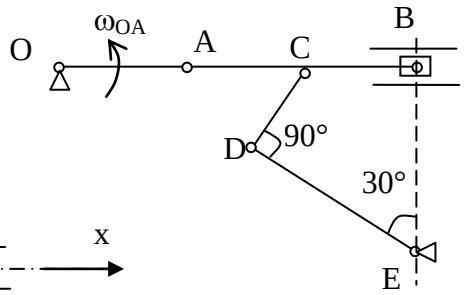


Figure 5

RACHID MENINA

Ex 4 :

Une tige OB tourne autour de l'axe O avec $\omega_{OB} = 2s^{-1}$ et entraine la tige AD dont les points A et C sont articulés sur des manchons qui se déplacent suivant les guides Ox pour A et Oy pour C (voir figure 3 sur la page précédente).

Déterminer la vitesse du point D pour $\varphi = 45°$ si OB=AB=BC=R et AD=L.

Ex 5 :

Soit le système articulé O_1ABO_2 de la figure 4, sur la page précédente. L'ensemble est astreint à se déplacer dans le plan de la figure, O_1O_2 étant fixe.

Déterminer par construction le point M$\in$ AB dont la vitesse est dirigée suivant AB et trouver l'expression de celle-ci à l'instant où $\widehat{O_1AB} = \propto$ si O_1A = R et $\omega_{O_1A} = \omega$.

Ex 6 :

Le système bielle-manivelle OAB de la figure 5, sur la page précédente, est articulé au point médian C de la bielle AB à la bielle CD du deuxième système bielle- manivelle EDC.

Déterminer ω_{ED} dans la position indiquée sur la figure si BE est verticale, $\omega_{OA}=8s^{-1}$, OA = 25 cm et DE = 100 cm.

Ex 7 :

Soit le mécanisme OLABD de commande d'une presse hydraulique de la figure 6. Déterminer l'accélération du piston D $\vec{\gamma}_D$ et l'accélération angulaire de la bielle AB ε_{AB} si dans la position indiquée sur la figure $\widehat{AOB} = 30°$ et $\widehat{OAB} = 90°$ pour $\omega_{OL}=2s^{-1}$, $\varepsilon_{OL}=4s^{-2}$ et OA = 15 cm.

Ex 8 :

L'élément OA du mécanisme articulé $OABO_1$ tourne à $\omega_{OA} = \omega$ =conste. Déterminer la vitesse angulaire et l'accélération angulaire de AB ainsi que le vecteur accélération linéaire du point B dans la position indiquée sur la figure 7 si AB = 2 OA = 2a.

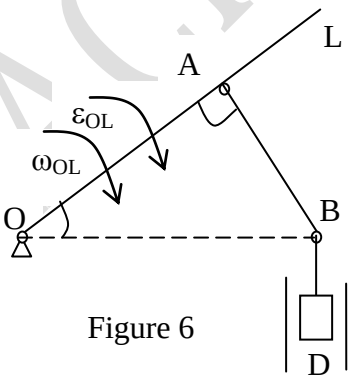


Figure 6

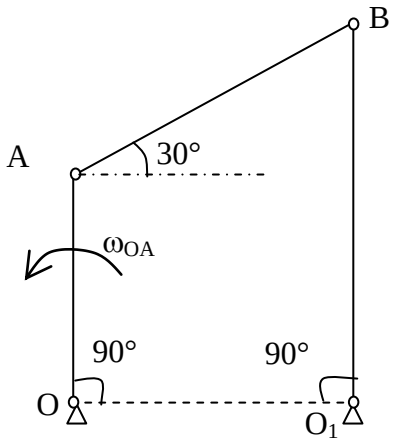


Figure 7

Ex 9 :

Soit une roue de rayon *R = 0,5 m*, roulant sans glissement sur un rail horizontal.

1) Déterminer l'accélération d'un point situé sur la jante (périphérie) de la roue, si le centre O de cette dernière se déplace uniformément à la vitesse *v*. En déduire le module de l'accélération d'un point situé à *R/2* de l'axe.

RACHID MENINA

2) Si maintenant le mouvement de O n'est plus uniforme mais avec une vitesse $v = 0{,}5\ m/s$ et une décélération $\gamma = -\ 0{,}5\ m/s^2$, trouver le CIA et $\vec{\gamma}_P$ si P est confondu avec le CIV ainsi que $\vec{\gamma}_M$, M étant le milieu de OP.

Ex 10 :

Un carré ABCD de coté 10 cm effectue un mouvement plan. Trouver la position du CIA et les vecteurs accélérations des sommets C et D si à cet instant $|\vec{\gamma}_A| = |\vec{\gamma}_B| = 10\ m/s^2$. L'accélération de A est portée par AD de A vers D et celle de B par AB de B vers A.

Ex 11:

Un obus, au cours de son mouvement dans l'atmosphère, tourne autour de son axe de symétrie Cz avec une vitesse angulaire ω, C étant le centre de gravité de l'obus. L'axe Cz tourne simultanément, avec la vitesse angulaire ω_1, autour de l'axe $C\varsigma$ dirigé suivant la tangente à la trajectoire du centre C, comme indiqué sur la figure 8.

Déterminer la vitesse du point M de l'obus dans son mouvement de rotation autour de C, si CM = r et si le segment CM est perpendiculaire à l'axe Cz ; l'angle entre Cz et $C\varsigma$ vaut γ.

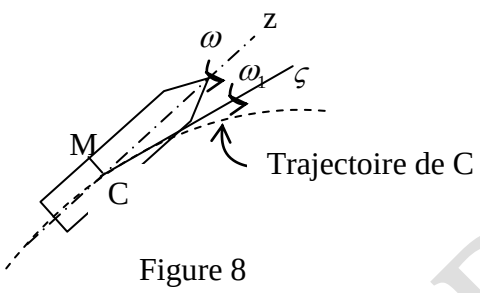


Figure 8

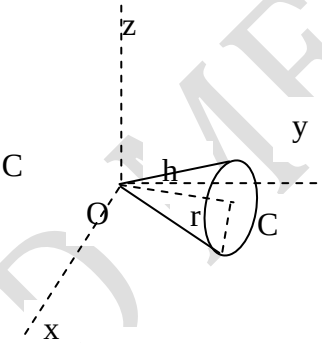


Figure 9

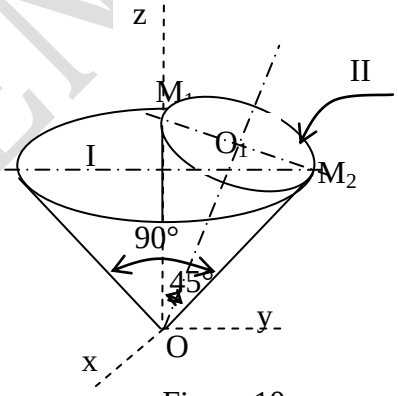


Figure 10

Ex 12:

Un cône de hauteur $h = 4\ cm$, de rayon de base $r = 3\ cm$, roule sans glisser sur le plan horizontal xOy, son sommet étant fixe au point O (figure 9).

Représenter sur la figure $\vec{\omega}_\psi = \dot{\vec{\psi}}$, $\vec{\omega}_\varphi = \dot{\vec{\varphi}}$ et $\vec{\omega}$ puis déterminer ω et l'accélération angulaire ε du cône, si la vitesse du centre C de la base du cône est $v_C = 48\ cm/s$.

Ex 13:

Le cône II, de la figure 10, dont l'angle au sommet est de *45°* roule sans glisser à l'intérieur du cône fixe I dont l'angle au sommet est de *90°*. La hauteur du cône mobile est $OO_1 = 100\ cm$. Le centre O_1 de sa base décrit une circonférence en *0,5 s*.

1. déterminer les vecteurs vitesses angulaires de précession (autour de l'axe z), de rotation propre (autour de OO_1) et totale, l'AIR correspondant à la configuration du cône II ainsi que son vecteur accélération angulaire absolue et l'AAI correspondant (AIR : axe instantané de rotation, AAI : axe des accélérations instantanées).
2. les vitesses et les accélérations des points O_1, M_1 et M_2 du cône mobile (voir la figure 10 pour la localisation de M_1 et M_2).

RACHID MENINA