

*MINISTER DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
Centre Universitaire Ahmed ZABANA Relizane*



*Cours Mathématiques 3, 2 année LMD-Sciences et Techniques  
avec les fiches TD corrigées*

*Par: Beddani Abdallah  
Djebar Samir  
baddaniabd@yahoo.fr*

*Ce travail pour mes étudiants(e)  
Départements - Génie Mécanique  
- Génie Electrique  
- Génie Civile  
- Génie Procédés*

*2017/2018*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Intégrales simples et multiples</b>	<b>3</b>
1.1	Rappels sur l'intégrale de Riemann et sur le calcul de primitives . . . . .	3
1.1.1	Intégrale de Riemann . . . . .	3
1.1.2	Sommes de Darboux . . . . .	5
1.1.3	Propriétés de l'intégrale de Riemann . . . . .	6
1.2	Calcul de primitives ( Intégrale indéfinie) . . . . .	7
1.2.1	Primitives des fonctions usuelles . . . . .	8
1.2.2	Intégration par parties – Changement de variable . . . . .	8
1.3	Intégrale doubles . . . . .	10
1.3.1	Théorème de Fubini . . . . .	10
1.3.2	Changement de variable . . . . .	10
1.3.3	Coordonnées polaires . . . . .	11
1.4	Intégrales triples . . . . .	11
1.4.1	Théorème de Fubini . . . . .	12
1.4.2	Changement de variable . . . . .	13
1.4.3	Coordonnées cylindriques . . . . .	13
1.4.4	Coordonnées sphériques . . . . .	14
1.5	Application au calcul d'aires, de volumes . . . . .	15
1.5.1	Calcul l'aire . . . . .	15
1.5.2	Calcul de volume . . . . .	15

<b>2</b>	<b>Intégrale impropres</b>	<b>16</b>
2.1	Intégrales impropres de fonctions définies sur un intervalle non borné . . .	16
2.1.1	Intégrale impropre de fonctions positives . . . . .	17
2.2	Intégrales impropres de fonctions définies sur un intervalle borné . . . . .	18
2.2.1	Intégrale absolument convergente . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Equations différentielles</b>	<b>21</b>
3.1	Rappel sur les équations différentielles ordinaires . . . . .	21
3.1.1	Equations différentielles ordinaires d'ordre 1 . . . . .	21
3.1.2	Equations différentielles de variables séparées . . . . .	22
3.2	Equation différentielle ordinaires linéaire . . . . .	23
3.2.1	Equation différentielle linéaire du premier ordre 1 . . . . .	23
3.2.2	Equation de Bernoulli . . . . .	26
3.2.3	Equations différentielles linéaires d'ordre 2 (EDL d'ordre2) . . . . .	26
3.3	Equation aux dérivées partielles . . . . .	29
3.3.1	Dérivées d'une fonction composées de deux variables . . . . .	30
3.3.2	Différentielles totales . . . . .	31
3.3.3	Formes différentielles totales exactes . . . . .	31
3.3.4	Application à l'intégration d'équation diff de premier ordre . . . . .	33
3.3.5	Facteur intégrant . . . . .	35
3.3.6	Détermination de facteur intégrant . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Séries numériques</b>	<b>39</b>
4.1	Généralités . . . . .	39
4.1.1	Séries convergentes . . . . .	39
4.1.2	Reste d'une série convergente . . . . .	40
	<b>Bibliographie</b>	<b>59</b>

# Chapitre 1

## Intégrales simples et multiples

### 1.1 Rappels sur l'intégrale de Riemann et sur le calcul de primitives

Soit  $f$  une fonction définie sur  $[a, b]$ , tel que pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) \geq 0$ .

#### 1.1.1 Intégrale de Riemann

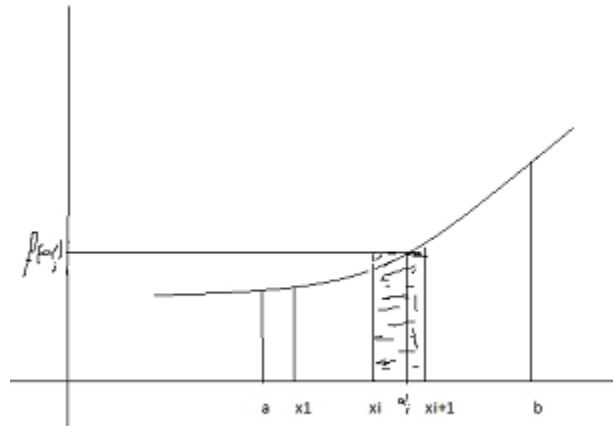
On appelle subdivision  $\Delta$  de l'intervalle  $[a, b]$  un ensemble fini de  $n+1$  réels  $\{x_p \in [a, b] / 0 \leq p \leq n\}$ , avec  $x_0 = a, x_n = b, \forall p, x_p \leq x_{p+1}$ .

$\delta(\Delta) = \max_{0 \leq p \leq n-1} (x_{p+1} - x_p)$  s'appelle le "pas" de  $\Delta$ .

**Définition 1.1.1** On considère une subdivision  $\Delta$  sur  $[a, b]$  et on choisit  $\alpha_i \in [x_i, x_{i+1}[$ , on appelle somme de riemann relative a la subdivision  $\Delta$  au choix des  $\alpha = (\alpha_i)_{0 \leq i \leq n-1}$  la somme:

$$\mathfrak{R}(f, \Delta, \alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i) (x_{i+1} - x_i)$$

Géométriquement



**Définition 1.1.2** On dit la fonction  $f$  est intégrable au sens de Riemann si  $\lim_{\delta(\Delta) \rightarrow 0} \mathfrak{R}(f, \Delta, \alpha) = I$  est finie  $\forall \alpha$ ,

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f$$

**Exemple 1.1.3**  $\{x_i = \frac{i}{n}, i = 0, \dots, n\}$  est une subdivision de l'intervalle  $[0, 1]$   
 $f(x) = x$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ , on a

$$(x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{n}, \forall i = 0, \dots, n$$

la somme

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} \left( \frac{i+1}{n} - \frac{i}{n} \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n^2} = \frac{n(n-1)}{2n^2},$$

est une somme de Riemann de la fonction  $f(x) = x$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

## 1.1.2 Sommes de Darboux

**Définition 1.1.4** On considère une subdivision  $\Delta$  sur  $[a, b]$  et on choisit  $I_i = [x_i, x_{i+1}[$ , on choisit

$$\begin{aligned}m_i &= \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}[} |f(x)| \\M_i &= \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}[} |f(x)|\end{aligned}$$

Les deux sommes suivantes

$$\begin{aligned}S(f, \Delta) &= \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{p+1} - x_p) \\s(f, \Delta) &= \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{p+1} - x_p)\end{aligned}$$

appelées respectivement sommes de Darboux inférieure et supérieure.

**Théorème 1.1.5** Si  $\lim_{\delta(\Delta) \rightarrow +\infty} S(f, \Delta) = \lim_{\delta(\Delta) \rightarrow +\infty} s(f, \Delta)$  alors  $f$  est intégrable en sens de Riemann.

**Proposition 1.1.6** Toute fonction continue sur un intervalle  $I$  est une fonction intégrable en sens de Riemann sur  $I$ .

**Exemple 1.1.7**  $\{x_i = \frac{i}{n}, i = 0, \dots, n\}$  est une subdivision de l'intervalle  $[0, 1]$

$f(x) = x$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ , on a

$$(x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{n}, \forall i = 0, \dots, n$$

$$\begin{aligned}m_i &= \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}[} |f(x)| = \frac{i}{n} \\M_i &= \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}[} |f(x)| = \frac{i+1}{n}\end{aligned}$$

on calcule les deux sommes de Darboux

$$S(f, \Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{p+1} - x_p) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

$$s(f, \Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{p+1} - x_p) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n^2} = \frac{n(n-1)}{2n^2}$$

On remarque que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(f, \Delta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s(f, \Delta) = \frac{1}{2}$

donc  $f$  est intégrable en sens de Riemann.

### 1.1.3 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions,  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $a, b, c \in \mathbb{R}$  ( $a \leq c \leq b$ ) on a :

1) Si la fonction  $f$  est intégrable sur les intervalles  $[a, c]$  et  $[c, b]$  elle est intégrable sur l'intervalle  $[a, b]$  et on a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

2) Si la fonction  $f$  est intégrable sur l'intervalle  $[a, b]$  et  $f \geq 0$  alors

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

3) Si la fonction  $f$  est intégrable sur l'intervalle  $[a, b]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  alors la fonction  $\lambda f$  est intégrable sur l'intervalle  $[a, b]$

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

4) Si les fonctions  $f$  et  $g$  sont intégrables sur l'intervalle  $[a, b]$

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Soit  $f$  une fonction intégrable sur  $[a, b]$

**Valeur moyenne**

On appelle moyen de  $f$  dans  $[a, b]$  le nombre  $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ .

**Exemple 1.1.8** On calcule le moyen des carrés des réels compris entre 0 et 1.

$$\int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 m dx \implies m = \frac{1}{3}$$

**Valeur efficace**

On appelle valeur efficace de  $f$  dans  $[a, b]$  le nombre  $v$  tel que  $v^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b (f(x))^2 dx$ .

**Exemple 1.1.9** On calcule la valeur efficace de la fonction  $f(x) = \sqrt{x}$  dans  $[0, 1]$

$$\int_0^1 x dx = \int_0^1 v^2 dx \implies v = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

## 1.2 Calcul de primitives ( Intégrale indéfinie)

**Définition 1.2.1** Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$ .

On dit que  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  ssi la dérivée de  $F$  donne  $f$  ( $F' = f$ ). On prend alors l'habitude de noter toute primitive de  $f$  sous forme

$$F(x) = \int f(x) dx$$

et s'appelle aussi intégrale indéfinie de  $f$ .

**Remarque 1.2.2** La primitive d'une fonction s'il existe n'a pas unique.

**Exemple 1.2.3** 1. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x$ . Alors  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$F(x) = \frac{x^2}{2}$  est une primitive de  $f$ ,

aussi la fonction définie par  $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2$  est une primitive de  $f$ .



### 1.2.1 Primitives des fonctions usuelles

La fonction $f$	La primitive de $f$ définie par: ( $k \in \mathbb{R}$ )	l'intervalle $I$
$f(x) = c$	$F(x) = cx + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + k$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ si $\alpha \leq -1$ $\mathbb{R}$ si $\alpha \geq -1$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x  + k$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + k$	$\mathbb{R}$

**Proposition 1.2.4** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues et  $\lambda \in \mathbb{R}$  on a:

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx, \int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx.$$

### 1.2.2 Intégration par parties – Changement de variable

#### Intégration par parties

**Théorème 1.2.5** Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables. On a

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

**Preuve.** On a  $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

alors  $\int (u(x)v(x))' dx = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$

donc

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$$

c'est à dire

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

□

**Exemple 1.2.6** calculons  $\int x^2 e^x dx$

On a

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x dx$$

$$\text{alors } \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x + c, c \in \mathbb{R}$$

### Changement de variable

**Théorème 1.2.7** Soient  $u$  une fonction dérivable et  $f$  une fonction continue avec

$$F(x) = \int f(x) dx$$

$$\text{On a } \int u' f(u) dx = \int f(u) du = F(u)$$

**Exemple 1.2.8** Calculons la primitive

$$K(x) = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

on choisit  $u(x) = \cos x, f(x) = \frac{1}{x}, u'(x) = -\sin x, F(x) = \ln |x| + c, c \in \mathbb{R}$ .

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int u' f(u) dx = \int f(u) du = F(u) = -\ln |\cos x| + c, c \in \mathbb{R}.$$

$$K(x) = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln |\cos x| + c, c \in \mathbb{R}.$$

## 1.3 Intégrale doubles

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un domaine  $D \subset \mathbb{R}^2$

L'intégrale sur  $D$  de  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , s'appelle une intégrale double, on la note  $\iint_D f = \iint_D f(x, y) dx dy$ .

### 1.3.1 Théorème de Fubini

**Théorème 1.3.1** Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

1) Cas où  $D = [a, b] \times [c, d]$ ,  $a \leq b$  et  $c \leq d$ , on a :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

2) Cas où  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq v(x)\}$ , où  $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sont continues, alors :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

**Proposition 1.3.2** Si  $f(x, y) = g(x)h(y)$  avec  $D = [a, b] \times [c, d]$ ,  $a \leq b$  et  $c \leq d$ , on a :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \left[ \int_a^b g(x) dx \right] \times \left[ \int_c^d h(y) dy \right].$$

**Exemple 1.3.3** On calcule  $I = \iint_D (xy) dx dy$ , où  $D = [1, 2] \times [3, 5]$

$$I = \left[ \int_1^2 x dx \right] \times \left[ \int_3^5 y dy \right] = \frac{3}{2} \times \frac{16}{2} = 12.$$

**Exemple 1.3.4** On calcule  $I = \iint_D dx dy$ , où  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$

$$\iint_D dx dy = \int_0^1 \left[ \int_0^{1-x} dy \right] dx = \int_0^1 (1 - x) dx = \frac{1}{2}$$

### 1.3.2 Changement de variable

Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^2$  et

$$\begin{aligned} \varphi : U &\rightarrow V \\ (u, v) &\rightarrow (x, y) \end{aligned}$$

une application de classe  $C^1$ , et  $\Delta \subset U$  et  $D \subset V$

$$\text{La matrice jacobien de } \varphi \text{ est } j(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$\det(j(\varphi)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Si  $\varphi(\Delta) = D$ , on obtient:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(\varphi(u, v)) \det(j(\varphi)) du dv$$

### 1.3.3 Coordonnées polaires

$$\varphi : (r, \theta) \rightarrow (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$\text{La matrice jacobien de } \varphi \text{ est } \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \left| \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} \right| = r$$

Si  $\varphi(\Delta) = D$ , on obtient:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) |r| dr d\theta$$

**Exemple 1.3.5** On calcule  $I = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy$  où  $D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 1\}$   
 et  $\Delta = \{(r, \theta) / 0 \leq r \leq 1 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

$$I = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy = \iint_{\Delta} \frac{r}{1+r^2} dr d\theta = \pi \ln 2$$

## 1.4 Intégrales triples

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un domaine  $D \subset \mathbb{R}^3$

L'intégrale sur  $D$  de  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , s'appelle une intégrale triple, on la note  $\iiint_D f = \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$ .

### 1.4.1 Théorème de Fubini

**Théorème 1.4.1** Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

1) Cas où  $D = [a, b] \times [c, d] \times [s, t]$ ,  $a \leq b$ ,  $c \leq d$  et  $s \leq t$ , on a :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[ \int_c^d \left[ \int_s^t f(x, y, z) dz \right] dy \right] dx.$$

2) Cas où  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \Delta, u(x, y) \leq z \leq v(x, y)\}$ , où  $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$

sont continues,  $D$  est un ensemble fermé borné de  $\mathbb{R}^2$ , alors :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Delta} \left[ \int_{u(x, y)}^{v(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy.$$

3) Cas où  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; a \leq z \leq b, (x, y) \in \Delta(z)\}$ , où  $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$  sont continues,  $D(z)$  est un ensemble fermé borné de  $\mathbb{R}^2, \forall z \in [a, b]$ , alors :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[ \iint_{\Delta(z)} f(x, y, z) dx dy \right] dz.$$

**Proposition 1.4.2** Si  $f(x, y, z) = g(x)h(y)k(z)$  avec  $D = [a, b] \times [c, d] \times [s, t]$ ,  $a \leq b$ ,  $c \leq d$  et  $s \leq t$  on a :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \left[ \int_a^b g(x) dx \right] \times \left[ \int_c^d h(y) dy \right] \times \left[ \int_s^t k(z) dz \right].$$

**Exemple 1.4.3** On calcule  $\iiint_D (xyz) dx dy dz, D = [0, 1]^3$

$$\iiint_D (xyz) dx dy dz = \left[ \int_0^1 x dx \right] \times \left[ \int_0^1 y dy \right] \times \left[ \int_0^1 z dz \right] = \frac{1}{8}.$$

**Exemple 1.4.4** On calcule  $\iiint_{\Delta} dx dy dz, \Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y) \in D = [0, 1]^2, 0 \leq z \leq x\}$

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Delta} dx dy dz &= \iint_D \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} dz dx dy \\
&= \iint_D x dx dy \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

### 1.4.2 Changement de variable

Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^3$  et

$$\begin{aligned}
\varphi : U &\rightarrow V \\
(u, v, w) &\rightarrow (x, y, z)
\end{aligned}$$

une application de classe  $C^1$ , et  $\Delta \subset U$  et  $D \subset V$

La matrice jacobien de  $\varphi$  est  $j(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$

$$\det(j(\varphi)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Si  $\varphi(\Delta) = D$ , on obtient:

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} f(\varphi(u, v, w)) \det(j(\varphi)) du dv dw$$

### 1.4.3 Coordonnées cylindriques

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \theta, z) \rightarrow (x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

La matrice jacobien de  $\varphi$  est  $j(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

$\det(j(\varphi)) = r$ .

Si  $\varphi(\Delta) = D$  la formule du changement de variables s'écrit alors:

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \det(j(\varphi)) dr d\theta dz$$

**Exemple 1.4.5**  $\iiint_D dx dy dz, D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$

$$\Delta = \{(r, \theta, z) / 0 \leq r \leq 1 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 2\}$$

$$\iiint_D dx dy dz = \iiint_{\Delta} r dr d\theta dz = \left[ \int_0^1 r dr \right] \times \left[ \int_0^{2\pi} d\theta \right] \times \left[ \int_0^2 dz \right] = \frac{1}{2} 2\pi 2 = 2\pi$$

### 1.4.4 Coordonnées sphériques

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \theta, \beta) \rightarrow (x, y, z) = (r \cos \theta \cos \beta, r \sin \theta \cos \beta, r \sin \beta)$$

La matrice jacobien de  $\varphi$  est  $j(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \beta & -r \sin \theta \cos \beta & -r \cos \theta \sin \beta \\ \sin \theta \cos \beta & r \cos \theta \cos \beta & -r \sin \theta \sin \beta \\ \sin \beta & 0 & r \cos \beta \end{pmatrix}$

$\det(j(\varphi)) = r^2 \cos \beta$

La formule du changement de variables s'écrit alors:

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} f(r \cos \theta \cos \beta, r \sin \theta \cos \beta, r \sin \beta) r^2 |\cos \beta| dr d\theta d\beta$$

**Exemple 1.4.6** On calcule  $\iiint_D dx dy dz, D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

$$\Delta = \{(r, \theta, \beta) / 0 \leq r \leq 1 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi, \frac{-\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{\Delta} r^2 |\cos \beta| dr d\theta d\beta \\ &= \left[ \int_0^1 r^2 dr \right] \times \left[ \int_0^{2\pi} d\theta \right] \times \left[ \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \beta d\beta \right] \\ &= \frac{4}{3} \pi \end{aligned}$$

## 1.5 Application au calcul d'aires, de volumes

### 1.5.1 Calcul l'aire

Soit  $D$  un sous ensemble de  $\mathbb{R}^2$ .

L'intégrale  $\iint_D dx dy$  nous donne l'aire du domaine  $D$ .

**Exemple 1.5.1** On calcule l'aire délimitée par

$$y + x^2 = 4 \text{ et } y = 0$$

$C$  est à dire

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 4 - x^2 \text{ et } -2 \leq x \leq 2\}$$

$$\begin{aligned} \iint_D dx dy &= \int_{-2}^2 \left[ \int_0^{4-x^2} dy \right] dx \\ &= \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx \\ &= \left[ 4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 \\ &= 32 - \frac{16}{3} = \frac{80}{3} \end{aligned}$$

### 1.5.2 Calcul de volume

Soit  $D$  un sous ensemble de  $\mathbb{R}^3$ .

L'intégrale  $\iiint_D dx dy dz$  nous donne le volume du domaine  $D$ .

**Exemple 1.5.2** Calculons le volume du cylindre de rayon  $a$  et l'hauteur  $h$

$$\iiint_D dx dy dz, D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h\}$$

$$\Delta = \{(r, \theta, z) / 0 \leq r \leq a \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h\}$$

$$\iiint_D dx dy dz = \iiint_{\Delta} r dr d\theta dz = \left[ \int_0^a r dr \right] \times \left[ \int_0^{2\pi} d\theta \right] \times \left[ \int_0^h dz \right] = \frac{a^2}{2} 2\pi h = a^2 \pi h.$$



# Chapitre 2

## Intégrale impropres

### 2.1 Intégrales impropres de fonctions définies sur un intervalle non borné

Soit  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable (au sens de Riemann) sur  $[a, x]$ , pour tout  $x$  dans  $[a, +\infty[$ . On pose

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

**Définition 2.1.1** On dit que  $f$  admet une intégrale impropre convergente sur  $[a, +\infty[$  si  $F(x)$  admet une limite lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  et on note

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = \int_a^{+\infty} f(t) dt$$

Dans ce cas, on dit que  $f$  est semi-intégrable sur  $[a, +\infty[$ .

**Exemple 2.1.2** Soit  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie par  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ , on a

$$\int_1^x f(t) dt = \frac{\ln x}{x} + 1 - \frac{1}{x}$$

c'est à dire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t) dt = 1$

donc l'intégrale impropre de  $f$  est convergente sur  $[1, +\infty[$ .

**Remarque 2.1.3** Si la fonction  $f : ]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable (au sens de Riemann) sur  $[x, b]$ , pour tout  $x$  dans  $]-\infty, b]$ , on dit qu'elle admet une intégrale impropre convergente (ou qu'elle est semi-intégrable) sur  $]-\infty, b]$  si la fonction  $F(x) = \int_x^b f(t) dt$  admet une limite quand  $x$  tend vers  $-\infty$  et on note

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(t) dt = \int_{-\infty}^b f(t) dt$$

**Remarque 2.1.4** Pour une fonction définie sur un intervalle ouvert  $]-\infty, +\infty[$  et intégrable sur tout intervalle  $[x, y]$ ,  $-\infty < x < y < +\infty$ , on dit que son intégrale impropre sur  $]-\infty, +\infty[$  converge si, pour  $-\infty < c < +\infty$ , ses intégrales impropres sur  $]-\infty, c]$  et  $[c, +\infty[$  existent.

### 2.1.1 Intégrale impropre de fonctions positives

**Proposition 2.1.5** Soient  $f$  et  $g : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions à valeurs positives et intégrables sur tout intervalle borné de la forme  $[a, \beta]$ ,  $\forall \beta \in [a, +\infty[$ . On suppose que  $f \leq g$ , alors

1) Si l'intégrale impropre de  $g$  est convergente sur  $[a, +\infty[$ , implique que l'intégrale impropre de  $f$  est convergente et on a

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt \leq \int_a^{+\infty} g(t) dt$$

2) Si l'intégrale impropre de  $f$  est divergente sur  $[a, +\infty[$ , implique que l'intégrale impropre de  $g$  est divergente.

**Corollaire 2.1.6** Soient  $f$  et  $g : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions à valeurs positives et intégrables sur tout intervalle borné de la forme  $[a, \beta]$ ,  $\forall \beta \in [a, +\infty[$ . On suppose qu'il existe deux constantes  $c_1$  et  $c_2$  strictement positives telles que

$$c_1 f \leq g \leq c_2 f$$

Alors, l'intégrale impropre de  $f$  est convergente si et seulement si l'intégrale impropre de  $g$  est convergente.

**Corollaire 2.1.7** Soient  $f$  et  $g : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions à valeurs positives et intégrables sur tout intervalle borné de la forme  $[a, \beta]$ ,  $\forall \beta \in [a, +\infty[$ . On suppose qu'il existe  $c \geq 0$  telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

Alors, l'intégrale impropre de  $f$  sur  $[a, +\infty[$  est convergente si et seulement si celle de  $g$  est convergente.

**Exemple 2.1.8**  $f(x) = \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}$ ,  $g(x) = \frac{1}{t^2}$  deux fonctions définies sur  $[1, +\infty[$  et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

comme l'intégrale impropre de  $g$  sur  $[1, +\infty[$  est convergente alors l'intégrale impropre de  $f$  sur  $[1, +\infty[$  est convergente.

## 2.2 Intégrales impropres de fonctions définies sur un intervalle borné

Soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable (au sens de Riemann) sur  $[a, x]$ , pour tout  $x$  dans  $[a, b[$ . On pose

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

**Définition 2.2.1** On dit que  $f$  admet une intégrale impropre convergente sur  $]a, b[$  si  $F(x)$  admet une limite lorsque  $x$  tend vers  $b$  et on note

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

Dans ce cas, on dit que  $f$  est semi-intégrable sur  $]a, b[$ .

**Exemple 2.2.2**  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}}$  une fonction définie sur  $]-1, 0[$ , et on remarque que cette fonction est intégrable en sens Riemann sur  $]-1, \alpha]$ ,  $\forall \alpha \in ]-1, 0[$ , et  $\int_{-1}^x f(t) dt = -2\sqrt{-x} + 2$  alors  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \int_{-1}^x f(t) dt = 2$

donc  $f$  admet une intégrale impropre convergente sur  $]-1, 0[$ .

**Remarque 2.2.3** Si la fonction  $f : ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable (au sens de Riemann) sur  $[x, b]$ , pour tout  $x$  dans  $]a, b]$ , on dit qu'elle admet une intégrale impropre convergente (ou qu'elle est semi-intégrable) sur  $]a, b]$  si la fonction  $F(x) = \int_x^b f(t) dt$  admet une limite quand  $x$  tend vers  $a$  et on note

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

**Remarque 2.2.4** Pour une fonction définie sur un intervalle ouvert  $]a, b[$  et intégrable sur tout intervalle  $[x, y]$ ,  $a < x < y < b$ , on dit que son intégrale impropre sur  $]a, b[$  converge si, pour  $a < c < b$ , ses intégrales impropres sur  $]a, c]$  et  $[c, b[$  existent.

**Exemple 2.2.5** L'intégrale impropre  $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{1-t^2} dt$  est divergente car  $\int_{-1}^0 \frac{1}{1-t^2} dt$  est divergente.

## 2.2.1 Intégrale absolument convergente

**Définition 2.2.6** Soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable sur tout intervalle de la forme  $[a, \alpha]$ ,  $\forall \alpha < b$ . On dit que l'intégrale impropre de  $f$  est absolument convergente sur  $[a, b[$  si l'intégrale impropre de  $|f|$  est convergente sur  $[a, b[$ .

**Exemple 2.2.7** L'intégrale impropre sur  $]0, 1]$  de la fonction  $f : x \rightarrow \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$  est absolument convergente.

car

$$0 \leq \int_0^1 \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{et } \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2 - 2\sqrt{x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2.$$

# Chapitre 3

## Equations différentielles

### 3.1 Rappel sur les équations différentielles ordinaires

#### 3.1.1 Equations différentielles ordinaires d'ordre 1

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On appelle équation différentielle ordinaire du premier ordre une équation de la forme

$$y' = f(t, y)$$

on dit que la fonction dérivable,  $y_0 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une solution de l'équation différentielle d'ordre 1

$$y' = f(t, y)$$

sur  $I$  si

$$y_0'(t) = f(t, y_0(t)), \forall t \in I.$$

**Exemple 3.1.1** La fonction  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x(t) = e^t$  est une solution de l'équation différentielle d'ordre 1 suivante:

$$y' = y$$

sur  $\mathbb{R}$ , car  $x'(t) = e^t = x(t), \forall t \in \mathbb{R}$ .

### 3.1.2 Equations différentielles de variables séparées

Une équation différentielle de 1<sup>er</sup> ordre est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme

$$f(y)y' = g(x)$$

donc

$$F(y) = G(x) + k, k \in \mathbb{R}.$$

(  $F$  est une primitive de  $f$  et  $G$  est une primitive de  $g$ )

donc

$$y = F^{-1}(G(x) + c)$$

**Exemple 3.1.2** Résoudre sur  $I = [2, +\infty[$  l'équation différentielle

$$xy' \ln x = (3 \ln x + 1)y$$

On peut séparer les variables ( $x$  et  $y$ ) en divisant par  $yx \ln x$ ,

$$\frac{y'}{y} = \frac{(3 \ln x + 1)}{x \ln x}$$

donc

$$\ln y = \int \frac{(3 \ln x + 1)}{x \ln x} dx + c, c \in \mathbb{R}.$$

c'est à dire

$$y = e^{\int \frac{(3 \ln x + 1)}{x \ln x} dx + c}, c \in \mathbb{R}.$$

## 3.2 Equation différentielle ordinaires linéaire

**Définition 3.2.1** Une équation différentielle linéaire est une équation de la forme

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = f(x) \quad (3.1)$$

l'équation homogène associée est

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = 0 \quad (3.2)$$

**Proposition 3.2.2** Si  $y_1$  et  $y_2$  deux solutions de (3.2). Alors  $y_1 + y_2$  et  $\alpha y_1$  sont aussi deux solutions de (3.2).

**Exemple 3.2.3**  $y_1(x) = x$  et  $y_2(x) = 5$  deux solutions de l'équation  $y''' + y'' = 0$ , alors  $y_3(x) = x + 5$  et  $y_4(x) = 10x$  sont aussi des solutions.

**Proposition 3.2.4** Si  $S_0$  est l'ensemble des solutions de (3.2) et  $y_p$  une solution particulière de (3.1), alors l'ensemble des solutions de (3.1) est donné par  $S = \{y + y_p / y \in S_0\}$ .

### 3.2.1 Equation différentielle linéaire du premier ordre 1

**Définition 3.2.5** Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation différentielle du premier ordre avec

$$x' = f(t).x + g(t)$$

avec  $f, g$  des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ . L'équation différentielle homogène associée est

$$x' = f(t).x$$

**Exemple 3.2.6** L'équation différentielle

$$y' = t^2 y + t$$



est une équation différentielle linéaire d'ordre 1. L'équation différentielle homogène associée est

$$y' = t^2 y$$

### Résolution d'une équation différentielle linéaire homogène

$$x' = f(t).x$$

c'est à dire  $\frac{x'}{x} = f(t)$  donc

$$\ln |x| = \int f(t) dt + c, c \in \mathbb{R}$$

alors

$$x = k e^{\int f(t) dt}, k \in \mathbb{R}$$

### Résolution d'une équation différentielle linéaire non homogène

$$x' = f(t).x + g(t)$$

Si  $x_p$  est une solution particulière de cette équation

alors

$$x(t) = k e^{\int f(t) dt} + x_p(t), k \in \mathbb{R}$$

**Exemple 3.2.7** On considère l'équation

$$xy' + 2y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

L'équation homogène associée est

$$xy' + 2y = 0$$

la solution générale de l'équation homogène est

$$y(x) = \frac{k}{x^2}, k \in \mathbb{R}$$

Solution particulière de l'équation non homogène

$$y_p(x) = \frac{k(x)}{x^2}$$

$$\text{donc } y'_p(x) = \frac{k'(x)x^2 - 2k(x)x}{x^4}$$

et on a aussi

$$xy'_p + 2y_p = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

on trouve

$$\begin{aligned} \frac{k'(x)x^2 - 2k(x)x}{x^3} + \frac{2k(x)}{x^2} &= \frac{x^2}{x^2 + 1} \implies \frac{k'(x)}{x} = \frac{x^2}{x^2 + 1} \\ \implies k'(x) &= \frac{x^3}{x^2 + 1} \\ \implies k'(x) &= \frac{x^3 + x - x}{x^2 + 1} \\ \implies k'(x) &= x - \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + 1} \\ \implies k(x) &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\text{donc } y_p(x) = \frac{k(x)}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} \ln(x^2 + 1)$$

finalemt la solution générale l'équation non homogène est

$$y(x) = \frac{k}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} \ln(x^2 + 1), k \in \mathbb{R}.$$

### 3.2.2 Equation de Bernoulli

**Définition 3.2.8** On appelle *équation de Bernoulli* une équation de la forme

$$x' = p(t)x + q(t)x^\alpha$$

avec  $\alpha \in \mathbb{R}/\{1\}$  et  $p, q$  sont des fonctions continues.

On se place sur les intervalles où  $x$  ne s'annule pas. On peut alors diviser par  $x^\alpha$ , et poser  $z = x^{1-\alpha}$ , on obtient alors

$$z' = (1 - \alpha)(p(t)z + q(t))$$

est une équation linéaire en  $z$ .

### 3.2.3 Equations différentielles linéaires d'ordre 2 (EDL d'ordre2)

**Définition 3.2.9** Une EDL du  $\mathcal{L}^{\text{me}}$  ordre à coefficients constants est une équation différentielle de la forme

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{E}$$

ou  $a, b, c \in \mathbb{R} (a \neq 0)$  et  $f \in C^0(I)$  ( $I$  ouvert de  $\mathbb{R}$ ). L'équation homogène (ou sans second membre) associée est

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{EH}$$

**Proposition 3.2.10** Si  $y_h$  est une solution générale de (EH) et  $y_p$  est une solution particulière de (E). Alors  $y_p + y_h$  est une solution générale de (E)

#### Résolution de l'équation homogène associée (E.H.)

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{EH}$$

On cherche la solution sous la forme  $y(x) = e^{rx}$ ,  $r \in \mathbb{R}$ . On a donc  $y'(x) = ry(x)$  et  $y''(x) = r^2y(x)$ , donc (EH) devient

$$y(ar^2 + br + c) = 0$$

**Définition 3.2.11** *L'équation*

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{EC}$$

se nomme *équation caractéristique de (E.H.)*.

**Proposition 3.2.12** *Suivant le signe de  $\Delta = b^2 - 4ac$ , on a les résultats suivants :*

1)  $\Delta > 0$  : (EC) admet 2 racines réelles distinctes  $r_1 \neq r_2$ , et

$$y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

est une solution générale de (EH)

2)  $\Delta = 0$  : (EC) admet une racine double  $r \in \mathbb{R}$

$$y(x) = (c_1x + c_2)e^{rx}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3)  $\Delta < 0$ : (EC) admet deux racines complexes conjuguées  $r_1 = \alpha + i\beta$  et  $r_2 = \alpha - i\beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$ ) et

$$y(x) = (c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)e^{\alpha x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

**Exemple 3.2.13**  $y'' - 4y' + 3y = 0$  l'équation caractéristique est  $r^2 - 4r + 3 = 0$  admet 2 racines réelles distinctes  $r_1 = 1, r_2 = 3$ , l'ensemble des solutions de (E) sont :  $y(x) = c_1e^x + c_2e^{3x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

**Exemple 3.2.14**  $y'' + 2y' + y = 0$ ; l'équation caractéristique est  $r^2 + 2r + 1 = 0$ ;  $r = -1$  racine double, l'ensemble des solutions de (E) sont :

$$y(x) = (c_1x + c_2)e^{-x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

**Exemple 3.2.15**  $y'' + 2y' + 4y = 0$ ; l'équation caractéristique est  $r^2 + 2r + 4 = 0$ ,  $\Delta = -12$  donc  $r_1 = -1 + \sqrt{3}i$ ,  $r_2 = -1 - \sqrt{3}i$ , d'où l'ensemble des solutions de (E) sont :

$$y(x) = (c_1 \cos \sqrt{3}x + c_2 \sin \sqrt{3}x)e^{-x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

### Résolution de l'équation non homogène

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{E}$$

Solution particulière à (E)

1) Si  $f(x) = P(x)$  tel que  $\alpha \in \mathbb{R}$  et P un polynôme.

On cherche la solution sous la forme  $y = x^k Q(x)$  tel que Q est un polynôme et  $\deg Q = \deg P$

$k = 0$ , si 0 n'est pas racine de (EC)

$k = 1$ , si 0 est l'une des deux racines de (EC)

$k = 2$ , si 0 est racine double de (EC)

2) Si  $f(x) = e^{\alpha x} P(x)$  tel que  $\alpha \in \mathbb{R}$  et P un polynôme.

On cherche la solution sous la forme  $y = x^k e^{\alpha x} Q(x)$  tel que Q est un polynôme et  $\deg Q = \deg P$

$k = 0$ , si  $\alpha$  n'est pas racine de (EC)

$k = 1$ , si  $\alpha$  est l'une des deux racines de (EC)

$k = 2$ , si  $\alpha$  est racine double de (EC)

### Exemple 3.2.16

$$y'' - 4y' + 4y = (x^2 + 1)e^x$$

l'équation homogène est

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

l'équation caractéristique :  $r^2 - 4r + 4 = 0$  ; on a  $\Delta = 0$ ;  $r = 2$  racine double donc la

solution générale de l'équation homogène est donnée par

$$y_h = (c_1x + c_2)e^{2x}; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2) On cherche une solution particulière de l'équation non homogène, comme 1 n'est pas une solution de l'équation caractéristique, alors  $y_p(x) = q(x)e^x$  tel que  $\deg q = 2$ ;

$$y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^x \text{ donc}$$

$$y_p'(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$$

$$y_p''(x) = 2ae^x + 2(2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$$

En remplaçant dans (E), on trouve

$$2ae^x + 2(2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x - 4(2ax + b)e^x - 4(ax^2 + bx + c)e^x + 4(ax^2 + bx + c)e^x = (x^2 + 1)e^x$$

$$((a - 1)x^2 + (b - 4a)x + c + b + 2a - 1)e^x = 0$$

$$\begin{cases} a - 1 = 0 \\ b - 4a = 0 \\ c - 2b + 2a - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 7 \end{cases}$$

$$\text{donc la solution particulière } y_p(x) = (x^2 + 4x + 7)e^x$$

finalement la solution générale de l'équation non homogène est

$$y(x) = y_h = (c_1x + c_2)e^{2x} + (x^2 + 4x + 7)e^x; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

### 3.3 Equation aux dérivées partielles

Soit  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de deux variables réelles définie au voisinage de  $A(a, b)$

Si la fonction  $x \rightarrow f(x, b)$  a une dérivée par rapport  $x$ , on la note  $f'_x(a, b)$ .

On peut définir la dérivée partielle par rapport à  $x$  par

$$f'_x : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow f'_x(x, y)$$

on définit la dérivée partielle par rapport à  $y$  par même méthode, on note

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}, f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

### Dérivées successives

De la même façon, on peut définir la dérivée de la fonction  $f'_x$  par rapport à  $x$ , on la note  $f''_{x^2}$  ou  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ .

aussi la dérivée de la fonction  $f'_x$  par rapport à  $y$ , on la note  $f''_{xy}$  ou  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ .

la dérivée de la fonction  $f'_y$  par rapport à  $y$ , on la note  $f''_{y^2}$  ou  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ .

la dérivée de la fonction  $f'_y$  par rapport à  $x$ , on la note  $f''_{yx}$  ou  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ .

### Théorème 3.3.1 de Schwarz

Si les dérivées partielles  $f''_{xy}$  et  $f''_{yx}$  sont continues, alors ces dérivées sont égales

$$f''_{xy} = f''_{yx}$$

**Exemple 3.3.2** Déterminer  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  pour la fonction  $f(x, y) = x^2 + xy^2 - y$

$y$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 2y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2x, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2y$$

### 3.3.1 Dérivées d'une fonction composées de deux variables

Soit la fonction  $F(x, y) = f(u, v)$ , tel que  $u, v$  des fonctions de  $x$  et  $y$  admettant des dérivées partielles, si  $f$  admet des dérivées partielles, alors  $F$  admet des dérivées partielles et

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial v}\end{aligned}$$

**Exemple 3.3.3** Soit  $f(u, v) = u^2 + uv + v$

$$u(x, y) = 2x - y$$

$$v(x, y) = x + y$$

$$F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$$

.....

### 3.3.2 Différentielles totales

Soit  $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de deux variables possédant des dérivées partielles continues

La différentielle totale de  $U$  s'écrit par

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$$

Si  $U(x, y) = Cte$  alors  $dU = 0$ .

**Exemple 3.3.4**  $U \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = x^2 + xy$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = 2x + y, \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = x$$

$$dU = (2x + y) dx + x dy$$

### 3.3.3 Formes différentielles totales exactes

On considère l'équation différentielle suivante

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$



Si on peut trouver une fonction  $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = M(x, y), \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$$

Alors la solution :

$$U(x, y) = Cte$$

**Proposition 3.3.5** Soit  $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction tel que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = M(x, y), \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$$

Si  $M, N$  des fonctions continues alors

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

**Preuve.** On a

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = M(x, y), \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$$

donc

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}(x, y) \text{ et } \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(x, y)$$

et  $M, N$  des fonctions continues alors d'après théorème de Schwarz on trouve

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

□

**Remarque 3.3.6** On a

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = M(x, y), \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$$

donc  $U(x, y) = \int M(x, y) dx + k(y)$   
 aussi  $\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \int M(x, y) dx \right) + k'(y) = N(x, y)$  c'est à dire

$$k'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \int M(x, y) dx \right)$$

### 3.3.4 Application à l'intégration d'équation diff de premier ordre

On considère l'équation différentielle suivante

$$M(x, y) + N(x, y) y' = 0$$

On peut écrire cette équation sous la forme

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

Si on peut trouver une fonction  $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = M(x, y), \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$$

Alors la solution :

$$U(x, y) = Cte$$

**Exemple 3.3.7** Résoudre l'équation

$$y' = -\frac{1 + 2xy^3}{3x^2y^2}$$

donc

$$(1 + xy^3) + (3x^2y^2) y' = 0$$

*c'est à dire*

$$(1 + xy^3) dx + (3x^2y^2) dy = 0$$

*on pose*

$M(x, y) = 1 + 2xy^3$ ,  $N(x, y) = 3x^2y^2$  on obtient

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 6xy^2$$

*Alors il existe une fonction  $U$  tel que*

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = 1 + 2xy^3, \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2$$

$$U(x, y) = x + x^2y^3 + k(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2 + k'(y) = 3x^2y^2$$

*donc  $k'(y) = 0 \implies k(y) = Cte$ .*

*finalement*

$$x + x^2y^3 = Cte \implies y = \sqrt[3]{\frac{c-x}{x^2}},$$

$$c = 0 : y(x) = -x^{-\frac{1}{3}}, y'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$$

$$y' = -\frac{1+2xy^3}{3x^2y^2} = -\frac{1-2xx^{-1}}{3x^2x^{-\frac{2}{3}}} = -\frac{-1}{3x^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}.$$

**Exemple 3.3.8** *Résoudre l'équation*

$$y' = -\frac{1 + 2xy}{x^2}$$

*donc*

$$1 + 2xy + x^2y' = 0$$

*c'est à dire*

$$(1 + 2xy) dx + x^2dy = 0$$

*on pose*

$M(x, y) = 1 + 2xy$ ,  $N(x, y) = x^2$  on obtient

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 2x$$

Alors il existe une fonction  $U$  tel que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = 1 + 2xy, \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = x^2$$

$$U(x, y) = x + x^2y + k(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = x^2 + k'(y) = x^2$$

$$\text{donc } k'(y) = 0 \implies k(y) = \text{Cte.}$$

finalement

$$x + x^2y = \text{Cte} \implies y = \frac{c - x}{x^2}$$

### 3.3.5 Facteur intégrant

Soit une différentielle de la forme

$$dV = M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

tel que

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

cette différentielle n'est pas totale.

On cherche alors une fonction  $F(x, y)$  tel que

$$dU = F(x, y) M(x, y) dx + F(x, y) N(x, y) dy$$

est une diff totale

cette fonction est appelée facteur intégrant de la diff  $dV$ .

### 3.3.6 Détermination de facteur intégrant

Il suffit de trouver la fonction  $F$  qui vérifie la relation

$$\frac{\partial(FM)}{\partial y} = \frac{\partial(FN)}{\partial x}$$

c'est à dire

$$F \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial F}{\partial y} = F \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial F}{\partial x}$$

#### Facteur intégrant de la forme $F(x)$

Donc dans ce cas on a

$$F \frac{\partial M}{\partial y} = F \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial F}{\partial x}$$

ce qui implique

$$N \frac{\partial F}{\partial x} = F \frac{\partial M}{\partial y} - F \frac{\partial N}{\partial x}$$

alors

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{N} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

$$\text{donc } F(x) = e^{\int \frac{1}{N} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx}$$

#### Facteur intégrant de la forme $F(y)$

Donc dans ce cas on a

$$F \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial F}{\partial y} = F \frac{\partial N}{\partial x}$$

ce qui implique

$$M \frac{\partial F}{\partial y} = F \frac{\partial N}{\partial x} - F \frac{\partial M}{\partial y}$$

alors

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{M} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

$$\text{donc } F(y) = e^{\int \frac{1}{M} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dy}$$

**Exemple 3.3.9** Résoudre

$$y - xy' = 0 \tag{E}$$

on peut écrire cette équation sous la forme

$$dV = ydx - xdy = 0$$

cette différentielle n'est pas totale.

On cherche alors une fonction  $F(x)$  tel que

$$dU = F(x) dV = F(x) ydx - F(x) xdy$$

est une diff totale

donc

$$F(x) = e^{\int \frac{1}{x}(1+1)dx}$$

c'est à dire  $F(x) = \frac{1}{x^2} + c, c \in \mathbb{R}$

et on a

$$dU = \frac{1}{x^2} (ydx - xdy)$$

Donc on a  $\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{x^2}$  et  $\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = \frac{-1}{x}$

alors  $U(x, y) = \frac{-y}{x} + k(y)$

ce qui implique  $\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = \frac{-1}{x} + k'(y) = \frac{-1}{x}$

c'est à dire  $k'(y) = 0 \implies k(y) = Cte.$

$U(x, y) = \frac{-y}{x} + Cte.$

donc la solution est  $\frac{-y}{x} = Cte. \implies y = cx, c \in \mathbb{R}$

*finalment la solution de (E) est  $y = cx, c \in \mathbb{R}$*

# Chapitre 4

## Séries numériques

### 4.1 Généralités

**Définition 4.1.1** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite des nombres complexes ou réels, on appelle série de terme général  $u_n$ , et on note  $\sum u_n$  la suite des sommes partielles  $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} u_i$ .

**Remarque 4.1.2** 1) On remarque que  $S_n - S_{n-1} = u_n, \forall n \geq 1$

2) Si la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  définie à partir de rang  $n_0$ , la série de terme général  $u_n$  est donnée par la suite des sommes partielles  $S_n = \sum_{i=n_0}^{i=n} u_i$ .

#### 4.1.1 Séries convergentes

**Définition 4.1.3** Une série  $\sum u_n$  à valeurs complexes ou réels est dite convergente si et seulement si la suite  $(S_n)_n$  de ses sommes partielles est convergente.

**Remarque 4.1.4** 1) la série  $\sum u_n$  est diverge sinon.

2) Si la série  $\sum u_n$  est converge vers  $S$  c'est à dire la suite  $(S_n)_n$  de ses sommes partielles est convergente vers  $S$ , qui est appelé somme de la série et on note  $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ .

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \Leftrightarrow S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{i=n} u_i$$



### Exemple 4.1.5 Série géométrique

Le terme général de la série géométrique est  $u_n = ar^n$  ( $r$  le raison,  $a$  le premier terme)

$$\sum_{i=0}^{i=n} u_i = \sum_{i=0}^{i=n} ar^i = a(1 + r + r^2 + \dots + r^n)$$

$$\text{Si } r = 1 \text{ on a } S_n = \sum_{i=0}^{i=n} u_i = a(n+1)$$

Dans ce cas la série est divergente.

$$\text{Si } r \neq 1 \text{ on a } S_n = \sum_{i=0}^{i=n} u_i = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{a}{1-r}, \text{ si } 0 \leq r < 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty \text{ si } r \geq 1.$$

$$\text{Exemple 4.1.6 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1$$

$$\text{car } \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$\text{et } S_n = \sum_{i=0}^{i=n} \left( \frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2} \right) = 1 - \frac{1}{n+2}$$

$$\text{Exemple 4.1.7 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

$$\text{Sachant que } \frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{donc } \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^n \left( \int_0^1 t^{k-1} dt \right) = \int_0^1 \sum_{k=1}^n (-t)^{k-1} dt = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t} dt$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln 2 \quad \text{et} \quad \left| \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt \right| \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

### Cas particulier

Une série  $\sum u_n$  à termes complexes est convergente si et seulement si la série de

parties réelles et la série des parties imaginaires sont convergentes et

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) + i \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

### 4.1.2 Reste d'une série convergente

Soient  $\sum u_n$  une série convergente et  $p \in \mathbb{N}$

on appelle reste d'ordre  $p$  la somme de la série  $R_p = \sum_{n=p+1}^{\infty} u_n$

**Proposition 4.1.8** Si  $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$  le reste d'ordre  $n$  pour la série  $\sum u_n$ .

alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$$

### Opérations sur les séries

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à valeurs dans  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- Si  $\sum u_n$  converge. alors  $\sum \lambda u_n$  converge et on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

- Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergents, alors  $\sum u_n + v_n$  converge, et on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n)$$

**Fiche TD 1**

**Exercice 1:** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie par

$$f(x) = 2x + 1 \text{ sur } [a, b]$$

Montrer que la fonction  $f$  est intégrable en sens de Riemann.

**Exercice 2**

Soit la fonction  $f$  définie pour tout  $x \in [0, 1]$  par:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Vérifier que la fonction  $f$  est non intégrable en sens de Riemann.

**Exercice 3:** Calculer les intégrales suivantes

$$I_1(x) = \int \frac{x}{(x^2 + 1)^6} dx, \quad I_2(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx,$$
$$I_3(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x + 1} dx.$$

**Exercice 4:**

1) Calculer l'intégrale suivante

$$I_1(x) = \int x \operatorname{arctg}(x) dx,$$

sachant que  $\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ .

2) Montrer que, pour tous les entiers strictement positifs, on a l'égalité suivante:

$$\int_0^1 \frac{x^n}{(x^n + 1)} dx = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(x^n + 1) dx.$$

**Exercice 5:** Calculer les intégrales suivantes

$$1) \int_0^1 \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx, \quad 2) \int_0^1 \frac{2x + 5}{x^3 - x} dx.$$

### Correction Fiche TD 1

**Exercice 1:**

1) On a  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f(x) = 2x + 1$  sur  $[a, b]$

On choisit  $\Delta = \left\{ x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}, i = 0, \dots, n \right\}$  une subdivision de l'intervalle  $[a, b]$  et  $I_i = [x_i, x_{i+1}[$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

Calculons maintenant les deux sommes de Darboux

$$S(\Delta, f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i) \text{ tel que } M_i = \sup_{x \in I_i} f(x) = 2 \left( a + \frac{(i+1)(b-a)}{n} \right) + 1$$

$$s(\Delta, f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i) \text{ tel que } m_i = \inf_{x \in I_i} f(x) = 2 \left( a + \frac{i(b-a)}{n} \right) + 1$$

on remarque que  $x_{i+1} - x_i = \frac{(b-a)}{n}$

Donc

$$\begin{aligned} S(\Delta, f) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \left( 2 \left( a + \frac{(i+1)(b-a)}{n} \right) + 1 \right) \frac{(b-a)}{n} \right] \\ &= \frac{(b-a)}{n} \left[ 2a \sum_{i=0}^{n-1} 1 + 2 \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) + \sum_{i=0}^{n-1} 1 \right] \\ &= \frac{(b-a)}{n} \left[ 2a \cdot n + 2 \frac{(b-a)}{n} \frac{n(n+1)}{2} + n \right] \end{aligned}$$

$$= 2a(b-a) + (b-a)^2 \frac{n(n+1)}{n^2} + (b-a)$$

alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} S(\Delta, f) &= 2a(b-a) + (b-a)^2 + (b-a) \\ &= b^2 - a^2 + (b-a) \end{aligned}$$

Et on a aussi

$$\begin{aligned} s(\Delta, f) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \left( 2 \left( a + \frac{i(b-a)}{n} \right) + 1 \right) \frac{(b-a)}{n} \right] \\ &= \frac{(b-a)}{n} \left[ 2a \sum_{i=0}^{n-1} 1 + 2 \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} i + \sum_{i=0}^{n-1} 1 \right] \\ &= \frac{(b-a)}{n} \left[ 2a \cdot n + 2 \frac{(b-a)}{n} \frac{n(n-1)}{2} + n \right] \\ &= 2a(b-a) + (b-a)^2 \frac{n(n-1)}{n^2} + (b-a) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} s(\Delta, f) &= 2a(b-a) + (b-a)^2 + (b-a) \\ &= b^2 - a^2 + (b-a) \end{aligned}$$

finalement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(\Delta, f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s(\Delta, f)$

c'est à dire intégrable en sens de Riemann.

## Exercice 2

Soit la fonction  $f$  définie pour tout  $x \in [0, 1]$  par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Vérifions que la  $f$  non intégrable en sens de Riemann

On choisit  $\Delta = \left\{ x_i = \frac{i}{n}, i = 0, \dots, n \right\}$  une subdivision de l'intervalle  $[0, 1]$   
et  $I_i = [x_i, x_{i+1}[$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

Calculons maintenant les deux sommes de Darboux

$$S(\Delta, f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i) \text{ tel que } M_i = \sup_{x \in I_i} f(x) = 1$$

$$s(\Delta, f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i) \text{ tel que } m_i = \inf_{x \in I_i} f(x) = 0$$

donc

$$S(\Delta, f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} = 1$$

$$s(\Delta, f) = \sum_{i=0}^{n-1} 0 = 0$$

C'est à dire  $f$  est non intégrable en sens de Riemann

**Exercice 3:** Calculer les intégrales suivantes

$$1) \text{ Calculons } I_1(x) = \int \frac{x}{(x^2 + 1)^6} dx$$

$$I_1(x) = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2 + 1)^6} dx$$

on choisit  $u(x) = x^2 + 1$  alors  $u'(x) = 2x$

$$\text{donc } I_1(x) = \frac{1}{2} \int \frac{u'(x)}{(u(x))^6} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^6} du = \frac{1}{-10} u^{-5} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{finalement } I_1(x) = \frac{1}{-10} (x^2 + 1)^{-5} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$2) \text{ On calcule } I_2(x) = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 1}} dx,$$

$$I_2(x) = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 1}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3 + 1}} dx$$

on choisit  $u(x) = x^3 + 1$  alors  $u'(x) = 3x^2$

$$\text{donc } I_2(x) = \frac{1}{3} \int \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \frac{2}{3} u^{\frac{1}{2}} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$I_2(x) = \frac{2}{3} \sqrt{x^3 + 1} + c, c \in \mathbb{R}$$

nous utilisons meme methode pour trouver:

$$I_3(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x + 1} dx = \ln |\sin x + 1| + c, c \in \mathbb{R}$$

**Exercice 4:**

1) On calcule

$$I(x) = \int x \operatorname{arctg}(x) dx,$$

$$\text{sachant que } \operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

on utilise l'intégrale par partie

$$u(x) = \operatorname{arctg}(x), v'(x) = x \implies u'(x) = \frac{1}{x^2+1}, v(x) = \frac{x^2}{2}$$

donc

$$I(x) = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1} dx$$

$$\text{et } \int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int 1 + \frac{1}{x^2+1} dx = x + \operatorname{arctg}(x)$$

.....

2) Montrons que, pour tous les entiers strictement positifs, on a l'égalité suivante:

$$\int_0^1 \frac{x^n}{(x^n+1)} dx = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(x^n+1) dx.$$

on utilise l'intégrale par partie

$$\int_0^1 \frac{x^n}{(x^n+1)} dx = \int_0^1 \frac{1}{n} x \frac{nx^{n-1}}{(x^n+1)} dx$$

$$u(x) = \frac{1}{n}x, v'(x) = \frac{nx^{n-1}}{(x^n+1)} \implies u'(x) = \frac{1}{n}, v(x) = \ln(x^n+1)$$

.....

**Exercice 5:** On calcule les intégrales suivantes

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx &= \int \frac{x^2+1-2}{x^2+1} dx \\ &= \int 1 + \frac{-2}{x^2+1} dx \\ &= x - 2 \operatorname{arctg}(x) + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+5}{x^3-x} dx &= \int \frac{2x+5}{x(x-1)(x+1)} dx. \\ &= \int \frac{-5}{x} + \frac{3,5}{x-1} + \frac{1,5}{x+1} dx. \\ &= -5 \ln|x| + 3,5 \ln|x-1| + 1,5 \ln|x+1|. \end{aligned}$$

Centre Universitaire Ahmed ZABANA Relizane

Maths 3 -2017/2018

2 année LMD-Sciences et Techniques

Fiche TD 2

**Exercice 1:** Calculer les intégrales suivantes

$$I = \iint_D \frac{x}{y} dx dy, \text{ où } D = [1, 3] \times [1, 5]$$

$$I = \iint_D (x + 2y) dx dy, \text{ où } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \text{ où } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 25\}$$

**Exercice 2:** Calculer les intégrales suivantes

$$I = \iiint_D (y x z) dx dy dz, \text{ où } D = [1, 3]^3$$

$$I = \iiint_D (x + y + 2z) dx dy dz, \text{ où } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y) \in [5, 7]^2, y \leq z \leq x\}$$

$$I = \iiint_D 5 dx dy dz, \text{ où } D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

**Exercice 3:** Calculer l'aire délimitée par

$$x^2 + y^2 \leq 25, x \geq 0, y \geq 0.$$

**Exercice 4:** Calculer le volume du

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$



## Correction Fiche TD 2

### Exercice 1:

$$1) I = \left[ \int_1^3 x dx \right] \times \left[ \int_1^5 \frac{1}{y} dy \right] = 4 \ln 5.$$

$$2) I = \int_0^1 \left[ \int_0^x (x + 2y) dy \right] dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$3) I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \text{ où } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 25\}$$

$$\varphi : (r, \theta) \rightarrow (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$\text{La matrice jacobien de } \varphi \text{ est } J(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \left| \frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} \right| = r$$

$$\Delta = \{(r, \theta) / 0 \leq r \leq 5 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$$\varphi(\Delta) = D, \text{ on obtient:}$$

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = I = \iint_{\Delta} r^2 r dr d\theta = \left[ \int_0^5 r^3 dr \right] \times \left[ \int_0^{2\pi} d\theta \right] =$$

### Exercice 2

$$1) I = \iiint_D (xyz) dx dy dz, \text{ où } D = [1, 3]^3$$

$$I = \left[ \int_1^3 x dx \right] \times \left[ \int_1^3 y dy \right] \times \left[ \int_1^3 z dz \right] = 64$$

$$2) I = \iiint_D (x + y + 2z) dx dy dz, \text{ où } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y) \in [5, 7]^2, y \leq z \leq x\}$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x + y + 2z) dx dy dz = \iint_{[5,7]^2} \left[ \int_y^x (x + y + 2z) dz \right] dx dy \\ &= \iint_{[5,7]^2} 2(x^2 - y^2) dx dy \\ &= 2 \int_5^7 \left[ \int_5^7 (x^2 - y^2) dx \right] dy \\ &= \end{aligned}$$

$$3) I = \iiint_D 5 dx dy dz, \text{ où } D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \theta, \beta) \rightarrow (x, y, z) = (r \cos \theta \cos \beta, r \sin \theta \cos \beta, r \sin \beta)$$

La matrice jacobien de  $\varphi$  est  $j(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \beta & -r \sin \theta \cos \beta & -r \cos \theta \sin \beta \\ \sin \theta \cos \beta & r \cos \theta \cos \beta & -r \sin \theta \sin \beta \\ \sin \beta & 0 & r \cos \beta \end{pmatrix}$

$$\det(j(\varphi)) = r^2 \cos \beta$$

$$\Delta = \{(r, \theta, z) / 0 \leq r \leq 2 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi, \frac{-\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{\Delta} r^2 |\cos \beta| dr d\theta d\beta \\ &= \left[ \int_0^5 r^2 dr \right] \times \left[ \int_0^{2\pi} d\theta \right] \times \left[ \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \beta d\beta \right] \\ &= \frac{4}{3} \pi 2^3 \end{aligned}$$

**Exercice 3:** Calculons l'aire délimitée par

$$x^2 + y^2 \leq 25, x \geq 0, y \geq 0$$

$$\iiint_D dx dy dz, D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 25, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$\Delta = \{(r, \theta, z) / 0 \leq r \leq 5 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$\iiint_D dx dy dz = \iiint_{\Delta} r dr d\theta dz = \left[ \int_0^5 r dr \right] \times \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right] = \frac{25}{4} \pi$$

**Exercice 4:** Calculons le volume du

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

$$\Delta = \{(r, \theta, \beta) / 0 \leq r \leq 2 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi, \frac{-\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$\begin{aligned}\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{\Delta} r^2 |\cos \beta| dr d\theta d\beta \\ &= \left[ \int_0^2 r^2 dr \right] \times \left[ \int_0^{2\pi} d\theta \right] \times \left[ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \beta d\beta \right] \\ &= \frac{4}{3} \pi 2^3\end{aligned}$$

**Fiche TD 3**

**Exercice 1:** Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx, I_2 = \int_0^1 \frac{1}{e^x - 1} dx,$$
$$I_3 = \int_0^1 \frac{(x^2 - 1)^2}{(x - 1)^2} dx, I_4 = \int_0^3 \frac{\sin x}{x^{\frac{2}{3}}} dx$$

**Exercice 2:**

1) Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx, I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^3} dx; I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx, I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$$

2) Montrer que l'intégrale suivante  $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x + 2 \cos x}{x^2} dx$

est absolument convergente.

**Exercice 3:** Résoudre les équations différentielles suivantes

$$xy' = y + 1; yy' = -2; xy' = e^y; y' = y + x^2y^3$$

**Exercice 4:** Résoudre les équations différentielles suivantes

$$y'' + 2y' + y = x^2e^x$$

## Correction

**Exercice 1:** Déterminons la nature des intégrales impropres suivantes

$$1) I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ la fonction } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ n'est pas définie en } 0$$

$$F(t) = \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_t^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \left[ \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_t^1 = [2\sqrt{x}]_t^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{t}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = 2$$

donc l'intégrale  $I_1$  est convergente.

$$2) I_2 = \int_0^1 \frac{1}{e^x - 1} dx$$

la fonction  $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$  n'est pas définie en 0

$$F(t) = \int_t^1 \frac{1}{e^x - 1} dx$$

$$y = e^x \implies dy = e^x dx = y dx$$

c'est à dire  $dx = \frac{dy}{y}$

$$\int \frac{1}{e^x - 1} dx = \int \frac{1}{y(y-1)} dy = \int \left( \frac{-1}{y} + \frac{1}{y-1} \right) dy = -\ln y + \ln(y-1) = -\ln e^x + \ln(e^x - 1)$$

$$\text{donc } F(t) = \int_t^1 \frac{1}{e^x - 1} dx = [-\ln e^x + \ln(e^x - 1)]_t^1 = -1 + \ln(e-1) + t - \ln(e^t - 1)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = +\infty$$

donc l'intégrale  $I_2$  divergente.

$$I_3 = \int_0^1 \frac{(x^2 - 1)^2}{(x - 1)^2} dx$$

$$F(t) = \int_t^1 \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 1)}{(x - 1)^2} dx = \int_t^1 (x + 1)^2 dx = \left[ \frac{(x+1)^3}{3} \right]_t^1 = \frac{8}{3} - \frac{(t+1)^3}{3}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

donc l'intégrale  $I_3$  est convergente.

$$4) I_4 = \int_0^3 \frac{\sin x}{x^{\frac{2}{3}}} dx$$

on a  $\int_0^3 \left| \frac{\sin x}{x^{\frac{2}{3}}} \right| dx \leq \int_0^3 \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx$

et  $F(t) = \int_t^3 \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx = \int_0^3 x^{-\frac{2}{3}} dx = \left[ \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} \right]_t^3 = 3 \times 3^{\frac{1}{3}} - 3t^{\frac{1}{3}}$

$\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = 3 \times 3^{\frac{1}{3}}$

donc l'intégrale  $I_4$  est convergente.

**Exercice 2:**

1) Déterminons la nature des intégrales impropres suivantes

1)  $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

$F(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \left[ \frac{-1}{x} \right]_1^t = \frac{-1}{t} - \left( \frac{-1}{1} \right) = \frac{-1}{t} + 1$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 1$

donc l'intégrale  $I_1$  est convergente.

2)  $I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3} dx$

on pose  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3}$  et  $g(x) = \frac{1}{x^2}$

on a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

alors  $\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3} dx$  et  $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  de la même nature.

donc l'intégrale  $I_2$  est convergente.

3)  $I_3 = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$

on a  $I_3 = \int_0^{\infty} \frac{3}{x^3} dx$

$F_1(t) = \int_c^t \frac{1}{x^3} dx = \int_c^t x^{-3} dx = \left[ \frac{-1}{2x^2} \right]_c^t = \frac{-1}{2t^2} - \left( \frac{-1}{2} \right) = \frac{-1}{2t^2} + \frac{1}{2c^2}$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} F_1(t) = \frac{1}{2c^2}$

$$F_2(t) = \int_t^c \frac{1}{x^3} dx = \int_t^c x^{-3} dx = \left[ \frac{-1}{2x^2} \right]_t^c = \frac{-1}{2c^2} - \left( \frac{-1}{2t^2} \right) = -\frac{1}{2c^2} + \frac{1}{2t^2}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F_2(t) = +\infty$$

donc l'intégrale  $I_3$  est divergente.

$$4) I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$$

$$\int \frac{x}{e^x} dx = \int x e^{-x} dx$$

par la méthode de l'intégrale par parties on trouve

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{e^x} dx &= \int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - \int -e^{-x} dx \\ &= -x e^{-x} - e^{-x} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{donc } F(t) = \int_0^t \frac{x}{e^x} dx = [-x e^{-x} - e^{-x}]_0^t = -t e^{-t} - e^{-t} + 1$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = +1$$

donc l'intégrale  $I_4$  est convergente.

2) On montre que l'intégrale impropre

$$I_5 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x + 2 \cos x}{x^2} dx$$

est absolument convergente.

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x + 2 \cos x}{x^2} \right| dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{3}{x^2} dx$$

$$\text{et } \int_1^{+\infty} \frac{3}{x^2} dx = 3 \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ est convergente}$$

donc  $I_5$  est convergente.

**Exercice 3:** Résoudre les équations différentielles suivantes

$$1) xy' = y + 1 \implies \frac{y'}{y+1} = \frac{1}{x}$$

donc

$$\int \frac{y'}{y+1} dx = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln |y + 1| = \ln |x| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{alors } e^{\ln|y+1|} = e^{\ln|x|+c}, c \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = kx - 1, k \in \mathbb{R}$$

donc  $y'(x) = k$  et

$$xk = kx - 1 + 1$$

$$xy' = y + 1$$

$$2) yy' = -2$$

$$\text{alors } \int yy' dx = \int -2 dx$$

$$\text{c'est à dire } \int y dy = \int -2 dx$$

$$\text{donc } \frac{y^2}{2} = -2x + c, c \in \mathbb{R}$$

$$y^2 = -4x + c, c \in \mathbb{R}$$

$$3) xy' = e^y$$

On peut écrire cette équation sous la forme

$$\frac{y'}{e^y} = \frac{1}{x}$$

$$\int y' e^{-y} dx = \int \frac{1}{x} dx$$



$$\int e^{-y} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

$$-e^{-y} = \ln |x| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$e^{-y} = -(\ln |x| + c), c \in \mathbb{R}$$

dans le cas

$$-(\ln |x| + c) \geq 0$$

on a:

$$y(x) = -\ln(-(\ln |x| + c))$$

$$4) y' = y + x^2 y^3$$

$$\text{alors } \frac{y'}{y^3} = \frac{y}{y^3} + x^2 \implies \frac{y'}{y^3} = \frac{1}{y^2} + x^2$$

$$\text{on pose } z = \frac{1}{y^2} \implies z' = -3 \frac{y'}{y^3}$$

donc

$$\frac{z'}{-3} = z + x^2$$

$$\text{c'est à dire } z' = -3z - 3x^2 \iff z' + 3z = -3x^2$$

on cherche une solution particulière  $z_p = ax^2 + bx + c$

$$z'_p = 2ax + b$$

$$z' + 3z = -3x^2$$

$$2ax + b + 3(ax^2 + bx + c) = -3x^2$$

$$3ax^2 + (2a + 3b)x + 3c + b = -3x^2$$

$$\begin{cases} 3a = -3 \\ 2a + 3b = 0 \\ 3c + b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{2}{3} \\ c = \frac{-2}{9} \end{cases}$$

donc la solution particulière est

$$z_p(x) = -x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{-2}{9}$$

Résoudre l'équation homogène:

$$z' + 3z = 0$$

c'est à dire

$$\frac{z'}{z} = -3$$

donc

$$\int \frac{z'}{z} dx = \int -3 dx$$

$\ln z = -3x + c, c \in \mathbb{R}$  alors

$$z_h(x) = ke^{-3x}, k \in \mathbb{R}$$

la solution générale de l'équation non homogène est

$$z(x) = ke^{-3x} - x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{-2}{9}, k \in \mathbb{R}$$

**Exercice 4:** Résoudre les équations différentielles suivantes

$$y'' + 2y' + y = x^2e^x$$

l'équation homogène est

$$y'' + 2y' + y = 0$$

l'équation caractéristique :  $r^2 + 2r + 1 = 0$  ; on a  $\Delta = 0$ ;  $r = -1$  racine double donc la

solution générale de l'équation homogène est donnée par

$$y_h = (c_1x + c_2)e^{-x}; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2) On cherche une solution particulière de l'équation non homogène, comme 1 n'est pas une solution de l'équation caractéristique, alors  $y_p(x) = q(x)e^x$  tel que  $\deg q = 2$ ;

$$y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^x \text{ donc}$$

$$y_p'(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$$

$$y_p''(x) = 2ae^x + 2(2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$$

En remplaçant dans (E), on trouve

$$2ae^x + 2(2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x - 4(2ax + b)e^x - 4(ax^2 + bx + c)e^x + 4(ax^2 + bx + c)e^x = x^2e^x$$

$$((a - 1)x^2 + (b - 4a)x + c + b + 2a)e^x = 0$$

$$\begin{cases} a - 1 = 0 \\ b - 4a = 0 \\ c - 2b + 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 6 \end{cases}$$

$$\text{donc la solution particulière } y_p(x) = (x^2 + 4x + 6)e^x$$

finalement la solution générale de l'équation non homogène est

$$y(x) = y_h = (c_1x + c_2)e^{-x} + (x^2 + 4x + 6)e^x; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

# Bibliography

[1] MILOUDI YAMINA; *Analyse 3, Cours Détaillés et Exercices Corrigés*, (2016).

[2] MUSTAPHA.SADOUKI; *Cours mathématiques pour la Physique*.