

MINISTER DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

C.U relizane

Institut de Sciences et Techniques

Cours maths1- Sciences et Technologie pour 1^{ère} année,
avec les fiches TD corrigées

Par : Beddani Abdallah
baddanixabd@yahoo.fr

2014/2015

Table des matières

1	Méthodes du raisonnement mathématique	ii
1.1	Assertions(ou proposition logique)	ii
1.1.1	Conjonction « et »	ii
1.1.2	Disjonction «ou»	iii
1.1.3	La négation « \bar{P} »	iii
1.1.4	L'implication \implies	iv
1.1.5	L'équivalence \iff	iv
1.2	Quantificateurs	iv
1.3	Raisonnements	v
1.3.1	Raisonnement direct	v
1.3.2	Contraposée	vi
1.3.3	Absurde	vi
1.3.4	Contre-exemple	vii
1.3.5	Récurrence	vii
2	Les ensembles, les relations et les applications	viii
2.1	Théorie des ensembles	viii
2.1.1	L'ensemble fini	viii
2.1.2	Inclusion	ix
2.1.3	Intersection	ix

2.1.4	Union	ix
2.1.5	Complémentaire	x
2.1.6	produit cartésien	x
2.2	Relation d'équivalence et Relation d'ordre	xi
2.2.1	Relations binaires	xi
2.2.2	Relations d'équivalence	xi
2.3	Relations d'ordre	xii
2.4	Application injective, surjective, bijective : définition d'une application, image directe, image réciproque, caractéristique d'une application.	xiii
2.4.1	Composition d'applications	xiv
2.4.2	L'application réciproque (ou inverse)	xv
2.4.3	Restriction et prolongement d'une application	xvi
2.4.4	Images et images réciproques	xvi
2.4.5	Applications injectives, surjectives, bijectives	xviii
3	Les fonctions réelles à une variable réelle	xix
3.1	Limite d'une fonction	xx
3.1.1	Limite à gauche, à droite	xx
3.1.2	Unicité de la limite	xxi
3.1.3	Caractérisation séquentielle de la limite	xxi
3.1.4	Méthode.	xxi
3.1.5	Composition de limites	xxii
3.1.6	Passage à la limite	xxii
3.1.7	Théorèmes d'encadrement, de minoration et de majoration	xxii
3.2	Continuité d'une fonction	xxiii
3.2.1	Prolongement par continuité	xxiv
3.2.2	Continuité ponctuelle et composition	xxv
3.2.3	Continuité sur un intervalle	xxv
3.2.4	Théorème des valeurs intermédiaires	xxv
3.2.5	Opérations sur les fonctions continues	xxv

3.3	Dérivabilité	xxvi
3.3.1	Opérations sur les dérivées	xxvi
3.3.2	La dérivée d'une fonction composée	xxvi
3.3.3	Condition nécessaire de 1er ordre	xxvii
3.3.4	théorème de Rolle	xxvii
3.3.5	théorème des accroissements finis	xxvii
4	Les fiches TD	xxviii
4.1	Fiche TD 1	xxviii
4.2	Correction de fiche TD 1	xxx
4.3	Fiche TD 2	xxxiii
4.4	Correction de fiche TD 2	xxxv
4.5	Fiche TD 3	xl
	Bibliographie	xliv

Méthodes du raisonnement mathématique

1.1 Assertions(ou proposition logique)

Définition 1.1.1 *Une assertion est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.*

Exemple 1.1.1

$2 + 2 = 4$ est une assertion vraie.

$2 \times 3 = 7$ est une assertion fausse.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geq 0$. st une assertion vraie.

-Si P est une assertion et Q est une autre assertion, nous allons définir de nouvelles assertions construites à partir de P et de Q.

1.1.1 Conjonction « et »

On appelle conjonction de P et Q, la proposition logique $P \wedge Q$

L'assertion « $P \wedge Q$ » est vraie si P est vraie et Q est vraie.

L'assertion « $P \wedge Q$ » est fausse sinon.

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple 1.1.2

“ $2 + 2 = 4 \wedge 2 \times 3 = 6$ ” est une assertion vraie .

“ $2 + 2 = 4 \wedge 2 \times 3 = 7$ ” est une assertion fausse.

1.1.2 Disjonction «ou»

On appelle disjonction de P ou Q, la proposition logique $P \vee Q$.

L’assertion « $P \vee Q$ » est vraie si l’une des deux assertions P ou Q est vraie.

L’assertion « $P \vee Q$ » est fausse si les deux assertions P et Q sont fausses.

On reprend ceci dans la table de vérité :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple 1.1.3

“ $2 + 2 = 4 \vee 2 \times 3 = 6$ ” est une assertion vraie .

“ $2 = 4 \vee 2 \times 3 = 7$ ” est une assertion fausse.

1.1.3 La négation « \bar{P} »

L’assertion « \bar{P} » est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.

P	\bar{P}
V	F
F	V

Exemple 1.1.4 La négation de l’assertion $2 \geq 0$ elle est l’assertion $2 \not\geq 0$.

1.1.4 L'implication \implies

La définition mathématique est la suivante :

L'assertion (\bar{P} ou Q) est notée « $P \implies Q$ ».

Sa table de vérité est donc la suivante :

P	Q	$P \implies Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

1.1.5 L'équivalence \iff

L'équivalence est définie par : « $P \iff Q$ » est l'assertion « $(P \implies Q)$ et $(Q \implies P)$ ».

On dira « P est équivalent à Q » ou « P équivaut à Q » ou « P si et seulement si Q ».

Cette assertion est vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses.

La table de vérité est :

P	Q	$P \iff Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

1.2 Quantificateurs

Le quantificateur \forall : « pour tout »

L'assertion

$$\forall x \in E, P(x)$$

est une assertion vraie lorsque les assertions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E. On lit « Pour tout x appartenant à E, $P(x)$ est vraie ».

Par exemple :

- « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ » est une assertion vraie.
- « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 1$ » est une assertion fausse.

Le quantificateur \exists : « il existe »

L'assertion

$$\exists x \in E, P(x)$$

est une assertion vraie lorsque l'on peut trouver au moins un élément x de E pour lequel $P(x)$ est vraie. On lit « il existe x appartenant à E tel que $P(x)$ (soit vraie) ».

Exemple 1.2.1

« $\exists x \in \mathbb{R}(x \leq 0)$ » est vraie ,par exemple $x = 0$.

« $\exists x \in \mathbb{R}(x < 0)$ » est fausse.

La négation des quantificateurs

La négation de « $\forall x \in E, P(x)$ » est « $\exists x \in E, \overline{P(x)}$ » .

Exemple : la négation de « $\forall x \in \mathbb{R}(x \leq 0)$ » est l'assertion « $\exists x \in \mathbb{R}(x > 0)$ ».

La négation de « $\exists x \in E, P(x)$ » est « $\forall x \in E, \overline{P(x)}$ ».

Exemple : la négation de « $\exists x \in \mathbb{R}(x \geq 0)$ » est l'assertion « $\forall x \in \mathbb{R}(x < 0)$ ».

La négation de « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \geq 0(x + y \geq 10)$ » est

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \geq 0(x + y < 10)$$

1.3 Raisonnements

1.3.1 Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion « $P \implies Q$ » est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie.

Exemple 1.3.1 Montrer que si $a = b \implies \frac{a+b}{2} = b$

$$\text{on a } a = b \implies \frac{a}{2} = \frac{b}{2}$$

$$\begin{aligned} \implies \frac{a}{2} + \frac{b}{2} &= \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \\ \implies \frac{a+b}{2} &= b \end{aligned}$$

1.3.2 Contraposée

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante

L'assertion « $P \implies Q$ » est équivalente à « $\bar{Q} \implies \bar{P}$ ».

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion « $P \implies Q$ »,

On montre en fait que si \bar{Q} est vraie alors \bar{P} est vraie.

Exemple 1.3.2 .Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Démonstration. Nous supposons que n n'est pas pair. Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair. Comme n n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.

Alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2k' + 1$ avec $k' = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$.

Et donc n^2 est impair.

Conclusion : nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : Si n^2 est pair alors n est pair.

1.3.3 Absurde

Le raisonnement par l'absurde pour montrer « $P \implies Q$ » repose sur le principe suivant :

On suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction.

Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc « $P \implies Q$ » est vraie.

Exemple 1.3.3 Soient $a, b > 0$. Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \implies a = b$

Démonstration. Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$ alors $a(1+a) = b(1+b)$ et $a \neq b \implies a - b + a^2 - b^2 = 0$ et $a \neq b$

$$\implies (a - b)(a + b) = 0 \text{ et } a \neq b$$

$$\implies (a = b) \text{ car } (a + b) > 0 \text{ et } a \neq b$$

Nous obtenons une contradiction.

$$\text{Alors } \frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \implies a = b$$

1.3.4 Contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type « $\forall x \in E, P(x)$ » est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse. Trouver un tel x c'est trouver un contre-exemple à l'assertion « $\forall x \in E, P(x)$ ».

Exemple 1.3.4 *Montrer que l'assertion suivante est fausse « $\forall x \in \mathbb{R}(x^2 \geq 1)$ ».*

Démonstration. Un contre-exemple est 0.5.

1.3.5 Récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n , est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La démonstration par récurrence se déroule en deux étapes :

1) On prouve $P(0)$.est vraie.

2) On suppose $n \geq 0$ donné avec $P(n)$ vraie, et on démontre alors que l'assertion $P(n + 1)$ est vraie.

Enfin dans la conclusion, on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.3.5 *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n$.*

1) On a $2^0 \geq 0$ c-à-dire $P(0)$.est vraie.

2) On suppose $P(n) : 2^n \geq n$.vraie, et on démontre alors que l'assertion $P(n+1) : 2^{n+1} \geq n+1$ est vraie.

On a

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2^n + 2^n \geq n + 1$$

alors $P(n + 1) : 2^{n+1} \geq n + 1$ est vraie.

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n$.

Les ensembles, les relations et les applications

2.1 Théorie des ensembles

Dans la pratique il y a deux façons de construire ou d'écrire des ensembles : en donnant la liste de ses éléments, par exemple $E = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 8\}$ est un ensemble, ou bien en décrivant une caractérisation des éléments, par exemple nous admettons que $\mathbb{N} = \{n | n \text{ est un entier naturel}\}$ est un ensemble. Parmi les ensembles les plus importants nous,

l'ensemble des nombres entiers relatifs, noté \mathbb{Z} ,

l'ensemble des nombres rationnels, noté \mathbb{Q} ,

l'ensemble des nombres réels, noté \mathbb{R} ,

l'ensemble des nombres complexes, noté \mathbb{C} .

2.1.1 L'ensemble fini

On dit que l'ensemble E est fini si le nombre d'éléments de E est fini.

Le nombre d'éléments de E s'appelle le cardinal de E noté $\text{Card}(E)$.

Exemple 2.1.1 $E = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 8\}$

donc $\text{Card } E = 7$

\mathbb{N} n'est pas un ensemble fini.

Ensemble vide :

Il s'agit de l'ensemble ne contenant aucun élément; on le note \emptyset ; on peut aussi le définir comme $\emptyset = \{x|x \neq x\}$

$$\text{Card } \emptyset = 0$$

Ensemble de parties de E noté $\wp(E)$

Exemple 2.1.2 $E = \{1, 2, 3\}$ alors

$$\wp(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

$$\text{Et on a } \text{Card}_{\wp}(E) = 2^{\text{Card } E}$$

2.1.2 Inclusion

On dit qu'un ensemble E est inclus dans un autre ensemble F (ce qu'on note $E \subset F$), si tous les éléments de E sont aussi dans F; en d'autres termes si $x \in E \Rightarrow x \in F$.

Deux ensembles sont égaux si ils ont les memes éléments; en particulier :

$$E \subset F \text{ et } F \subset E \Leftrightarrow E = F$$

Exemple 2.1.3 Si $E = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 8\}$ et $P = \{0, 2, 5\}$,

On a $P \subset E$

2.1.3 Intersection

Si E et F sont deux ensembles on peut former un ensemble appelé leur intersection notée $E \cap F$ et définie par :

$$E \cap F = \{x|x \in E \text{ et } x \in F\}$$

Exemple 2.1.4 Si $E = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 8\}$ et $P = \{0, 2, 14, 6, 11, 8\}$, alors $E \cap P = \{0, 2, 8\}$.

2.1.4 Union

Si E et F sont deux ensembles on peut former un ensemble appelé leur union et notée $E \cup F$ et définie par :

$$E \cup F = \{x|x \in E \text{ ou } x \in F\}$$

Exemple 2.1.5 Si $E = \{0, 1, 2, 3, 5, 7\}$ et $F = \{0, 1, 2, 4, 6, 8\}$

alors $E \cup F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

2.1.5 Complémentaire

Soit F un sous-ensemble de E ; on définit le complémentaire de F dans E que l'on note $C_E F$ (ou simplement CF si E est sous-entendu) comme l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à F :

$$C_E F = \{x \in E \mid x \notin F\}$$

Exemple 2.1.6 Le complémentaire de $P = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}, x = 2y\}$ dans \mathbb{N} est l'ensemble des nombres impairs :

$$C_{\mathbb{N}} P = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}, x = 2y + 1\}$$

2.1.6 produit cartésien

Produit : Si $x \in E$ et $y \in F$ on peut fabriquer un nouvel élément appelé couple et noté (x, y) .

L'ensemble de ces couples s'appelle le produit cartésien de E et F et se note :

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$$

Exemple 2.1.7 $E = \{1, 2\}$, $F = \{3, 5\}$ alors

$$E \times F = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5)\}$$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Proposition 2.1.1

- 1) $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$ (commutativité)
- 2) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associativité)
- 3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité)
- 4) $C_E(A \cup B) = C_E B \cap C_E A$, $C_E(A \cap B) = C_E B \cup C_E A$ (loi de Morgan)
- 5) $C_E[C_E(A)] = A$

2.2 Relation d'équivalence et Relation d'ordre

2.2.1 Relations binaires

Définition 2.2.1 On appelle relation binaire, toute assertion entre deux objets, pouvant être vérifiée ou non. On note xRy et on lit "x est en relation avec y".

Définition 2.2.2 Etant donnée une relation binaire R entre les éléments d'un ensemble non vide E , on dit que :

1. R est Réflexive $\Leftrightarrow \forall x \in E (xRx)$,
2. R est Transitive $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in E, (xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow (xRz)$
3. R est Symétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in E, (xRy) \Rightarrow (yRx)$
4. R est Anti-Symétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in E, (xRy) \wedge (yRx) \Rightarrow x = y$

2.2.2 Relations d'équivalence

Définition 2.2.3 On dit qu'une relation binaire R sur un ensemble E est une relation d'équivalence si elle est Réflexive, Symétrique et Transitive.

Définition 2.2.4 On dit que deux éléments x et $y \in E$ sont équivalents si xRy .

On appelle classe d'équivalence d'un élément $x \in E$, l'ensemble : $\dot{x} = \{y \in E; xRy\}$.

On appelle ensemble quotient de E par la relation d'équivalence R , l'ensemble des classes d'équivalence de tous les éléments de E . Cet ensemble est noté $E/R = \{\dot{x}/x \in E\}$.

Exemple 2.2.1 Dans \mathbb{R} on définit la relation R par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2$$

Montrer que R est une relation d'équivalence et donner l'ensemble quotient \mathbb{R}/R .

R est une relation d'équivalence.

i) R est une relation Reflexive, car d'après la Réflexivité de l'égalité on a

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = x^2$ donc

$$\forall x, \in \mathbb{R}, xRx$$

ce qui montre que R est une relation Réflexive.

ii) R est une relation Symétrique, car d'après la Symétrie de l'égalité on a :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}, xRy &\iff x^2 = y^2 \\ &\iff y^2 = x^2 \\ &\iff yRx \end{aligned}$$

iii) R est une relation Transitive, car d'après la Transitivité de l'égalité on a :

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in \mathbb{R}, (xRy) \wedge (yRz) &\implies x^2 = y^2 \wedge y^2 = z^2 \\ &\implies x^2 = z^2 \\ &\implies xRz \end{aligned}$$

Donc

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (xRy) \wedge (yRz) \implies (xRz)$$

ce qui montre que R est une relation Transitive.

De i) , ii) et iii) , on déduit que R est une relation d'équivalence.

Donc :

$$\dot{x} = \{x, -x\}$$

Par suite

$$\mathbb{R}/R = \{\{x, -x\}, x \in \mathbb{R}\}$$

2.3 Relations d'ordre

Définition 2.3.1 On dit qu'une relation binaire R sur E est une relation d'ordre si elle est Réflexive, Transitive et Anti-Symétrique.

Dans la littérature, les relations d'ordre sont souvent notées \preceq .

Si $x \preceq y$, on dit que x est inférieur ou égal à y ou que y est supérieur ou égal à x .

Définition 2.3.2 Soit une relation d'ordre sur un ensemble E .

1. On dit que deux éléments x et y de E sont comparables si :

$$x \preceq y \text{ ou } y \preceq x$$

2. On dit que est une relation d'ordre total, ou que E est totalement ordonné, si tous les éléments de E sont deux à deux comparables. Si non, on dit que la relation est une relation d'ordre partiel ou que E est partiellement ordonné.

Exemple 2.3.1 Soit E un ensemble et $P(E)$ l'ensemble de parties de E . On considère sur $P(E)$, la relation binaire " \subset ", alors :

" \subset " est une relation d'ordre sur E .

1. " \subset " est Réflexive, car pour tout ensemble $A \in P(E)$, on a $A \subset A$.

2. " \subset " est Transitive, car pour tous $A, B, C \in P(E)$,

$$(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$$

est transitive

3. " \subset " est Anti-symétrique, car pour tous $A, B \in P(E)$,

$$(A \subset B) \wedge (B \subset A) \Rightarrow A = B$$

De 1), 2) et 3) on déduit que " \subset " est une relation d'ordre sur E .

2.4 Application injective, surjective, bijective : définition d'une application, image directe, image réciproque, caractéristique d'une application.

Définition 2.4.1 On appelle Fonctions d'un ensemble E dans un ensemble F , toute correspondance f entre les éléments de E et ceux de F

Domaine de définition de f : noté D_f l'ensemble des éléments $x \in E$ fait correspondre un unique élément $y \in F$ noté $f(x)$.

$y = f(x)$ est appelé image de x et x est un antécédant de y .

E est appelé ensemble de départ et F l'ensemble d'arrivée de l'application f .

On écrit

$$\begin{aligned} f & : E \rightarrow F \\ x & \rightarrow f(x) \end{aligned}$$

Définition 2.4.2 L'application est une fonction d'un ensemble E dans un ensemble F , telle que $D_f = E$.

Définition 2.4.3 f est une application si :

$$\forall x, x' \in E, (x = x') \Rightarrow (f(x) = f(x'))$$

Exemple 2.4.1 L'application $Id : E \rightarrow E$ telle que

$$\forall x \in E, Id(x) = x$$

est appelée application identité sur E .

Graphe

Définition 2.4.4 On appelle graphe d'une application $f : E \rightarrow F$, l'ensemble

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in E\}$$

2.4.1 Composition d'applications

Définition 2.4.5 Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$, on note $g \circ f$ l'application de E dans G définie par :

$$\forall x \in E, g \circ f(x) = g(f(x))$$

Cette application est appelée composée des applications f et g .

Exemple 2.4.2 Etant données les applications

$$\begin{aligned} f & : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\x &\rightarrow x + 1\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}g \circ f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\x &\rightarrow (x + 1)^2\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}f \circ g &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\x &\rightarrow (x^2 + 1)\end{aligned}$$

Il est clair que

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Proposition 2.4.1 *Composée de deux applications injectives et injective*

Composée de deux applications surjectives et surjective

Composée de deux applications bijectives et bijective

2.4.2 L'application réciproque (ou inverse)

Définition 2.4.6 *Si $f : E \rightarrow F$ est bijective on définit l'application réciproque par*

$$\begin{aligned}f^{-1} &: F \rightarrow E \\y &\rightarrow x = f^{-1}(y)\end{aligned}$$

Exemple 2.4.3 $f(x) = 3x + 1$

On a

$$y = 3x + 1 \implies x = \frac{y - 1}{3}$$

Donc

$$\begin{aligned}f^{-1} &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\x &\rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{3}\end{aligned}$$

2.4.3 Restriction et prolongement d'une application

Définition 2.4.7 *Etant donnée une application $f : E \rightarrow F$.*

1. *On appelle restriction de f à un sous ensemble non vide X de E , l'application $g : X \rightarrow F$ telle que*

$$\forall x \in X, g(x) = f(x)$$

On note $g = f|_X$

2. *Etant donné un ensemble G tel que $E \subset G$, on appelle prolongement de l'application f à l'ensemble G , toute application h de G dans F telle que f est la restriction de h à E .*

Remarque 2.4.1 *Si F n'est pas un singleton, alors le prolongement de f n'est pas unique.*

Exemple 2.4.4 *Etant donnée l'application*

$$\begin{aligned} f & : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow \log x \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & \quad h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \log|x| & \quad x \rightarrow \log(2|x| - x) \end{aligned}$$

sont deux prolongements différents de f à \mathbb{R} .

2.4.4 Images et images réciproques

Définition 2.4.8 *Soient $A \subset E$ et $M \subset F$.*

1. *On appelle image de A par f , l'ensemble des images des éléments de A noté $f(A)$:*

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} \subset F$$

C'est-à-dire

$$y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x)$$

2. *On appelle image réciproque de M par f , l'ensemble des antécédents des éléments de M , noté $f^{-1}(M)$:*

$$f^{-1}(M) = \{x \in E, f(x) \in M\} \subset E$$

C'est-à-dire

$$x \in f^{-1}(M) \iff f(x) \in M$$

Proposition 2.4.2 Soient $f : E \rightarrow F, A, B \subset E$ et $M, N \subset F$, alors

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
3. $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$
4. $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$
5. $f^{-1}\mathfrak{C}_F M = \mathfrak{C}_E f^{-1}(M)$

Preuve. 1. Soit $y \in F$, alors

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\iff \exists x \in A \cup B; y = f(x) \\ &\iff (x \in A) \vee (x \in B); y = f(x) \\ &\iff [(x \in A) \wedge (y = f(x))] \vee [(x \in B) \wedge (y = f(x))] \\ &\iff (y \in f(A)) \vee (y \in f(B)) \\ &\iff y \in f(A) \cup f(B) \end{aligned}$$

ce qui montre que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

2. Soit $y \in F$, alors

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\implies \exists x \in A \cap B; y = f(x) \\ &\implies [(x \in A) \wedge (x \in B)] \wedge (y = f(x)) \\ &\implies [(x \in A) \wedge (y = f(x))] \wedge [(x \in B) \wedge (y = f(x))] \\ &\implies (y \in f(A)) \wedge (y \in f(B)) \\ &\implies y \in f(A) \cap f(B) \\ &\implies y \in f(A) \cap f(B) \end{aligned}$$

ce qui montre que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

3-Soit $x \in E$, alors

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(M \cup N) &\iff f(x) \in M \cup N \\ &\iff f(x) \in M \vee f(x) \in N \\ &\iff x \in f^{-1}(M) \vee x \in f^{-1}(N) \\ &\iff x \in f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N) \end{aligned}$$

ce qui montre que $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$

4-Soit $x \in E$, alors

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\mathfrak{C}_F N) &\iff f(x) \in \mathfrak{C}_F N \\ &\iff f(x) \notin N \\ &\iff x \notin f^{-1}(N) \\ &\iff x \in \mathfrak{C}_E f^{-1}(N) \end{aligned}$$

ce qui montre que $f^{-1}(\mathfrak{C}_F N) = \mathfrak{C}_E f^{-1}(N)$.

□

2.4.5 Applications injectives, surjectives, bijectives

Définition 2.4.9 *On dit que :*

1. *f est injective si tout élément de F possède au plus un antécédant.*

$$f \text{ injective} \iff \forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

2. *f est surjective si tout élément de F possède au moins un antécédant.*

$$f \text{ surjective} \iff \forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$$

3. *f est bijective si elle est injective et surjective*

$$f \text{ bijective} \iff \forall y \in F, \exists x (\text{unique}) \in E; f(x) = y.$$

Exemple 2.4.5 *La application*

$$\begin{aligned} f & : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow x^2 \end{aligned}$$

Non injective car $f(1) = f(-1) \implies 1 = -1$ est fausse

La application

$$\begin{aligned} g & : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow 3x \end{aligned}$$

injective car $g(x) = g(x') \implies 3x = 3x'$

$$\implies x = x'$$

La application g est surjective car $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x = \frac{y}{3} \in \mathbb{R}$ tel que $y = g(x)$,

donc g est bijective car g est surjective et injective.

Les fonctions réelles à une variable réelle

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

f est majorée sur U si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in U, f(x) \leq M$;

f est minorée sur U si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in U, f(x) \geq M$;

f est bornée sur U si f est à la fois majorée et minorée sur U , c'est-à-dire si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in U, |f(x)| \leq M$;

f est croissante sur U si

$$\forall x, y \in U, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$

f est décroissante sur U si

$$\forall x, y \in U, x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$$

f est paire si

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$$

f est impaire si

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f(-x).$$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel, $T > 0$.

La fonction f est dite périodique de période T si

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x).$$

3.1 Limite d'une fonction

Soit $a \in \mathbb{R}$. Dans tout ce chapitre, on dira qu'une fonction f de domaine de définition D_f est définie au voisinage de a s'il existe un réel $h > 0$ tel que l'on soit dans un des trois cas suivants :

$D_f \cap [a - h, a] \setminus \{a\} = [a - h, a]$ i.e. f est définie dans un voisinage à gauche de a et éventuellement non définie en a ;

$D_f \cap [a, a + h] \setminus \{a\} =]a, a + h]$ i.e. f est définie dans un voisinage à droite de a et éventuellement non définie en a ;

$D_f \cap [a - h, a + h] \setminus \{a\} = [a - h, a + h] \setminus \{a\}$ i.e. f est définie dans un voisinage de a et éventuellement non définie en a .

Définition 3.1.1 Soit $a, l \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie au voisinage de a . On dit que f admet l pour limite en a si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

on écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Exemple 3.1.1 $\lim_{x \rightarrow 0} (3x + 1) = 1$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha = \frac{\epsilon}{3} > 0, \forall x \in D_f, |x - 0| < \frac{\epsilon}{3} \Rightarrow |(3x + 1) - 1| < \epsilon$$

3.1.1 Limite à gauche, à droite

Définition 3.1.2 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie au voisinage de a .

1 On dit que f admet l pour limite à gauche en a si la restriction de f à $D_f \cap]-\infty, a[$ admet l pour limite en a . Dans ce cas, cette limite est unique et on la note $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, a - \alpha < x < a \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

2- On dit que f admet l pour limite à droite en a si la restriction de f à $D_f \cap]a, +\infty[$ admet l pour limite on la note $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, a < x < a + \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Exemple 3.1.2

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 4x + 5 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 5.$$

Dans ce cas on dit que f n'admet pas une limite en 0.

Proposition 3.1.1

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$$

3.1.2 Unicité de la limite

Théorème 3.1.1 Soit f une fonction définie au voisinage de a . Si f admet une limite l en a , elle est unique. On note alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

Si f est définie en a et admet une limite en a , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

3.1.3 Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème 3.1.2 Caractérisation séquentielle de la limite

Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Soit $l \in \mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

(ii) Pour toute suite (u_n) à valeurs dans D_f de limite a , $(f(u_n))$ a pour limite l .

3.1.4 Méthode.

Pour montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite en a , il suffit de trouver deux suites (u_n) et (v_n) de même limite a telles que $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$, possèdent des limites différentes.

Exemple 3.1.3 La fonction $x \rightarrow \sin \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0.

$$(u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}), (v_n = \frac{1}{\pi + 2n\pi})$$

$$(f(u_n)) \rightarrow 1, (f(v_n)) \rightarrow 0,$$

possèdent des limites différentes

Théorème 3.1.3 Soient f et g deux fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Soient $l, l', \in \mathbb{R}$.

Théorème 3.1.4 Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$

Alors

$$1) \lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = l + l'$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) = ll'$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'} \text{ si } l' \neq 0$$

3.1.5 Composition de limites

Proposition 3.1.2 Soient f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et g une fonction définie au voisinage de $b \in \mathbb{R}$. Soit enfin $l \in \mathbb{R}$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = l$

3.1.6 Passage à la limite

Soient f et g deux fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Soient $l, l', m, M \in \mathbb{R}$.

(i) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$ et si $f \leq g$ au voisinage de a , alors $l \leq l'$.

(ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $f \leq M$ au voisinage de a , alors $l \leq M$.

(iii) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $f \geq m$ au voisinage de a , alors $l \geq m$.

3.1.7 Théorèmes d'encadrement, de minoration et de majoration

Théorème 3.1.5 Théorèmes d'encadrement, de minoration et de majoration

Soient $a, l \in \mathbb{R}$. Soit f, m et M trois fonctions définies au voisinage de a .

Théorème 3.1.6 Théorème des gendarmes/d'encadrement :

Si $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ et $h \leq f \leq g$ au voisinage de a , alors f admet une limite en a et celle-ci vaut l .

Théorème 3.1.7 *Théorème de minoration :*

Si $\lim_{x \rightarrow a} \liminf g(x) = \infty$ et $g \leq f$ au voisinage de a , alors f admet une limite en a et celle-ci vaut $+\infty$.

Théorème 3.1.8 *Théorème de majoration :*

Si $\lim_{x \rightarrow a} \limsup g(x) = -\infty$ et $g \geq f$ au voisinage de a , alors f admet une limite en a et celle-ci vaut $-\infty$.

Corollaire 3.1.1 Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Si $|f| \leq g$ au voisinage de a et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

Corollaire 3.1.2 Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Si f est bornée au voisinage de a et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$

Exemple 3.1.4

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

car $\sin \frac{1}{x}$ bornée et $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

3.2 Continuité d'une fonction

Définition 3.2.1 . Soit a un réel et f une fonction définie au voisinage de a . On dit que f est continue en a si f est définie en a et

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

C'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Exemple 3.2.1 La fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est continue en 0.

car

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$$

Définition 3.2.2 Soit a un réel et f une fonction définie au voisinage de a . On dit que f 1) f est continue à gauche en a si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

C'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, a - \alpha < x < a \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

.2) f est continue à droite en a si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

C'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, a < x < a + \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Exemple 3.2.2 La fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x > 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ 3x & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

est continue en 0.

car $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 = f(1)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3 \neq f(1)$

f est continue à droite en 1 mais n'est pas continue à gauche en 1.

dans ce cas f n'est pas continue en 1.

Proposition 3.2.1 f est définie en $a \iff f$ est continue à droite et continue à gauche en a .

3.2.1 Prolongement par continuité

Définition 3.2.3 Soit f une fonction définie au voisinage de a mais non définie en a . On dit que f est prolongeable par

continuité en a si f admet une limite finie l en a . Le prolongement g de f définie par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$$

est alors continu en a .

Exemple 3.2.3 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

Le prolongement g de f définie par

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3.2.2 Continuité ponctuelle et composition

Proposition 3.2.2 Soit f une fonction définie au voisinage de a et continue en a . Soit g une fonction définie au voisinage de $f(a)$ et continue en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est continue en a .

3.2.3 Continuité sur un intervalle

Dans ce paragraphe, I désigne un intervalle.

Définition 3.2.4 Continuité sur un intervalle

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I .

On note $C(I, \mathbb{R})$ ou $C^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans \mathbb{R}

3.2.4 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 3.2.1 Soit f une fonction continue sur intervalle $[a, b]$. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $y = f(x)$.

Proposition 3.2.3 Soit f une fonction continue sur intervalle $[a, b]$. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

Exemple 3.2.4 Montrons que $x + xe^{(x-1)(x+2)} = 0$ admet une solution

On pose

$$f(x) = x + xe^{(x-1)(x+2)}$$

et on a aussi $f(1) = 2 \geq 0$ et $f(-2) = -4 < 0$.

alors il existe x tel que $f(x) = 0$.

3.2.5 Opérations sur les fonctions continues

Théorème 3.2.2 . Soient f et g deux fonctions continues au point a . Alors $f + g, f - g, fg$ sont continues, ainsi que $\frac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$.

3.3 Dérivabilité

Définition 3.3.1 . Soit f une fonction et $a \in D_f$. On dit que f est dérivable au point a si l'accroissement fini

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

a une limite lorsque x tend vers a .

Cette limite est appelée dérivée de f au point a , alors notée $f'(a)$, ou bien $\frac{df}{dx}(a)$.

3.3.1 Opérations sur les dérivées

Théorème 3.3.1 Soient f et g deux fonctions dérivables au point a . Alors $f + g, f - g, fg$ sont dérivables en a , ainsi que $\frac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$. On a de plus les formules :

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

$$(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a),$$

$$(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}$$

Preuve :.comme exercice.

Théorème 3.3.2 Soit f une fonction dérivable en a , et g une fonction dérivable en $f(a) = b$. Alors $g \circ f$ est dérivable en a , et l'on a :

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \cdot g'(f(a))$$

Exemple 3.3.1 $f(x) = (x^3 + 1)^5 \implies f'(x) = 15x(x^3 + 1)^4$

$$f(x) = \sqrt{x^3 + 1} \implies f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 1}}$$

Proposition 3.3.1 . Si f est croissante sur un intervalle I et dérivable en $a \in D_f$, alors $f'(a) \geq 0$. Si f est décroissante, alors $f'(a) \leq 0$.

3.3.2 La dérivée d'une fonction composée

Définition 3.3.2 .Soit f une fonction définie sur un intervalle I On dit que f admet un maximum local en $a \in I$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, on a $f(x) \leq f(a)$. Si l'inégalité est vraie pour tous les $x \in I$, on dit que f a un maximum global en a . Si c'est l'inégalité inverse $f(x) \geq f(a)$ qui a lieu, on parle de minimum local ou global.

3.3.3 Condition nécessaire de 1er ordre

Théorème 3.3.3 *Si f est définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$, est dérivable et admet un maximum ou minimum local en $a \in I$, alors $f'(a) = 0$.*

3.3.4 théorème de Rolle

Théorème 3.3.4 (Rolle). *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$, dérivable sur $]a, b[$, et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

3.3.5 théorème des accroissements finis

Théorème 3.3.5 (des accroissements finis). *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que :*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Preuve.

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

. Alors g est continue sur $[a, b]$, et dérivable sur $]a, b[$. De plus $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(a)$.

On peut donc appliquer le théorème de Rolle à g , et déduire qu'il existe c tel que

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (c - a). \text{ C'est ce qu'il fallait démontrer.} \quad \square$$

Les fiches TD

4.1 Fiche TD 1

Exercice 1 : Soient P , Q deux assertions.

Écrire les tables de vérité des assertions suivantes :

$$1. P \Leftrightarrow \overline{P}$$

$$2. \overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q})$$

$$3. \overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \wedge \overline{Q})$$

Que remarquez-vous ?

Exercice 2 :

1) Écrire à l'aide des quantificateurs la phrase suivante :

« Pour tout nombre réel, son carré est positif ». Puis écrire la négation.

« Pour tout entier n , il existe un unique réel x tel que $\exp(x)$ égale n ». Puis écrire la négation.

2) Écrire la négation de

$$i) \forall x \in \mathbb{R} \exists y > 0, (x + y > 10)$$

$$ii) \exists x \in \mathbb{R} \forall y > 0, (x + y > 8)$$

$$iii) P \wedge (\overline{P} \vee Q) \text{ (voir exercice 1)}$$

Exercice 3 :

1. (Raisonnement direct) . Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$.

2. (Contre-exemple) Est-ce que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$?

3. (Contraposée) n^2 est impair alors n est impair.

3. (Absurde) Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$. Montrer que si $a = b$ alors $\frac{a}{(1+b)} = \frac{b}{(1+a)}$

3. (Récurrence) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

4.2 Correction de fiche TD 1

Exercice 1 : Soient P, Q , deux assertions.

Table de vérité de $P \Leftrightarrow \overline{\overline{P}}$

P	\overline{P}	$\overline{\overline{P}}$	$P \Leftrightarrow \overline{\overline{P}}$
V	F	V	V
F	V	F	V

Table de vérité de $\overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q})$

P	Q	\overline{P}	\overline{Q}	$(P \wedge Q)$	$\overline{(P \wedge Q)}$	$(\overline{P} \vee \overline{Q})$	$\overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q})$
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F	V

Table de vérité de $\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \wedge \overline{Q})$

P	Q	\overline{P}	\overline{Q}	$(P \vee Q)$	$\overline{(P \vee Q)}$	$(\overline{P} \wedge \overline{Q})$	$\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \wedge \overline{Q})$
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F	V

Nous remarquons

L'assertion de P est l'assertion $\overline{\overline{P}}$

L'assertion de $\overline{(P \wedge Q)}$ est l'assertion $(\overline{P} \vee \overline{Q})$

L'assertion de $\overline{(P \vee Q)}$ est l'assertion $(\overline{P} \wedge \overline{Q})$

Exercice 2 :

1 « Pour tout nombre réel, son carré est positif ».

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 \text{ sa négation est } \exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$$

« Pour tout entier n , il existe un unique réel x tel que $\exp(x)$ égale n »

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R} / \exp(x) = n \text{ sa négation est } \exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} / \exp(x) \neq n$$

La négation. de $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > 0, (x + y > 10)$ est $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, (x + y \leq 10)$

La négation. de $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, (x + y > 8)$ est $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > 0, (x + y \leq 8)$

La négation. de $.P \wedge (\bar{P} \vee Q)$ est $\bar{P} \vee (P \wedge \bar{Q})$

Exercice 3 :

1.(Raisonnement direct) pour .montrer que

$$\text{si } a, b \in Q \text{ alors } a + b \in Q.$$

On suppose $a, b \in Q$ et on montre $a + b \in Q$.

On a $a, b \in Q$ donc

$a \in Q$ alors il existe $n, m \in Z$ tel que $a = \frac{m}{n}$ (la définition de Q)

$b \in Q$ alors il existe $n', m' \in Z$ tel que $b = \frac{m'}{n'}$

Alors

$$a + b = \frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{mn' + nm'}{nn'}$$

mais $mn' + nm' \in Z$ et $nn' \in Z$ donc

$$a + b \in Q$$

2.(Contre-exemple) Est-ce que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on $x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$?

Contre-exemple $x = -10$

$$-10 \leq 2 \implies (-10)^2 \leq 4$$

est fausse car $-10 \leq 2$ est vraie et $10^2 \leq 4$ est fausse

3. (Contraposée) pour montrer que l'assertion

$$n^2 \text{ est impair alors } n \text{ est impair.} \qquad \text{est vraie}$$

On montre que

$$n \text{ est pair alors } n^2 \text{ est pair} \qquad \text{est vraie}$$

car $(p \implies q) \iff (\bar{q} \implies \bar{p})$

n est pair alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$

alors

$$n^2 = 4k^2$$

donc

$$n^2 = 2(2k^2)$$

finalement n^2 est pair

4.(Absurde) Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$. Montrer que si $a = b$ alors $\frac{a}{(1+b)} = \frac{b}{(1+a)}$

par absurde on suppose $a = b$ et $\frac{a}{(1+b)} \neq \frac{b}{(1+a)}$

donc $a = b$ et $a(1+a) \neq b(1+b)$

donc $a = b$ et $a - b + a^2 - b^2 \neq 0$

donc $a = b$ et $(a - b)(1 + a + b) \neq 0$

est une contradiction

car $a = b \implies (a - b) = 0 \implies (a - b)(1 + a + b) = 0$

5. (Récurrence) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$p(n) : 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

1) pour $n = 0$ on a $p(0)$ est vraie car $0 = \frac{0(0+1)}{2}$

2) on suppose $p(n) : 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie

et on montre $p(n+1) : 1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ est vraie

on a $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

alors $1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

donc $1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$

finalement $1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

4.3 Fiche TD 2

Exercice 1 : Soit E un ensemble.

Montrer pour toutes parties A, B, C de E

1. $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$
2. $\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$
3. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
4. Démontrer que si $A \cup B = A \cap B$ alors $A = B$
5. $A \subset B \implies \complement_E B \subset \complement_E A$

Exercice 2 :

1. Dans \mathbb{Z} on considère la relation \mathfrak{R} définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x \mathfrak{R} y \iff x - y \text{ est une multiple de } 4$$

- Montrer que \mathfrak{R} est une relation d'équivalence sur \mathbb{Z} .

- Déterminer l'ensemble quotient.

- Montrer que $\dot{7} = \dot{3}$.

2. Soit \preccurlyeq la relation sur \mathbb{N} définie par

$$x \preccurlyeq y \iff x \text{ divise } y$$

Montrer que \preccurlyeq est une relation d'ordre sur \mathbb{N} .

L'ordre il est total ?

Exercice 3 :

Soient $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow f(x) = x^2 + 1$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow g(x) = 2x + 1$$

Etudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité de f et g .

Préciser $g \circ f$ et $f \circ g$

Exercice 4 : Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications

et A et B deux ensembles de E , et M et N deux ensembles de F ,

montrer que :

1. $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$

2. $M \subset N \implies f^{-1}(M) \subset f^{-1}(N)$

3. Si $g \circ f$ est injective et f surjective alors g est injective.

4. Si $g \circ f$ est surjective et g injective alors f est surjective.

4.4 Correction de fiche TD 2

Exercice 1 :

Soit E un ensemble.

Montrons pour toutes parties A, B, C de E

$$1. \complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$$

$$\begin{aligned} x \in \complement_E(A \cup B) &\iff x \notin (A \cup B) \\ &\iff x \notin A \text{ et } x \notin B \\ &\iff x \in \complement_E A \text{ et } x \in \complement_E B \\ &\iff x \in \complement_E A \cap \complement_E B \end{aligned}$$

$$2. \complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$$

$$\begin{aligned} x \in \complement_E(A \cap B) &\iff x \notin (A \cap B) \\ &\iff x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\iff x \in \complement_E A \text{ ou } x \in \complement_E B \\ &\iff x \in \complement_E A \cup \complement_E B \end{aligned}$$

$$3. (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

4. Démontrer que si $A \cup B = A \cap B$ alors $A = B$

On suppose $A \cup B = A \cap B$ et on montre que $A = B$

$$\begin{aligned} x \in A &\implies x \in A \cup B \\ &\implies x \in A \cap B \text{ car } A \cup B = A \cap B \\ &\implies x \in B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in B &\implies x \in A \cup B \\ &\implies x \in A \cap B \text{ car } A \cup B = A \cap B \\ &\implies x \in A \end{aligned}$$

$$5. A \subset B \implies \complement_E B \subset \complement_E A$$

On suppose $A \subset B$ et on montre que $\complement_E B \subset \complement_E A$

$$\begin{aligned} x \in \complement_E B &\implies x \notin B \\ &\implies x \notin A \text{ car } A \subset B \\ &\implies x \in \complement_E A \end{aligned}$$

Exercice 2 :

1. Dans \mathbb{Z} on considère la relation \mathfrak{R} définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x \mathfrak{R} y \iff x - y \text{ est une multiple de } 4$$

- Montrons que \mathfrak{R} est une relation d'équivalence sur \mathbb{Z} .

i) \mathfrak{R} est une relation Reflexive

$$\forall x \in \mathbb{R}, x - x = 0 \text{ est une multiple de } 4 \text{ donc}$$

$$\forall x, \in \mathbb{R}, x \mathfrak{R} x$$

ce qui montre que \mathfrak{R} est une relation Réflexive.

ii) \mathfrak{R} est une relation Symétrique :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \mathfrak{R} y \implies \exists k \in \mathbb{Z} / x - y = 4k$$

$$\implies \exists -k \in \mathbb{Z} / y - x = 4(-k)$$

$$\implies y \mathfrak{R} x$$

iii) \mathfrak{R} est une relation Transitive :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \mathfrak{R} y) \wedge (y \mathfrak{R} z) \implies k \in \mathbb{Z} / x - y = 4k \wedge k' \in \mathbb{Z} / y - z = 4k'$$

$$\implies x - z = 4k + 4k' = 4(k + k') / k'' = k + k'$$

$$\implies x - z = 4k''$$

$$\implies x \mathfrak{R} z$$

Donc

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \mathfrak{R} y) \wedge (y \mathfrak{R} z) \implies (x \mathfrak{R} z)$$

ce qui montre que \mathfrak{R} est une relation Transitive.

De i) , ii) et iii) , on déduit que \mathfrak{R} est une relation d'équivalence.

- L'ensemble quotient

$$\mathbb{Z} / \mathfrak{R} = \{ \{x + 4k / k \in \mathbb{Z}\} / x \in \mathbb{Z} \}$$

- Montrons que $\dot{7} = \dot{3}$.

$$x \in \dot{7} \iff \exists k \in \mathbb{Z} / x = 7 + 4k$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} / x = 3 + 4 + 4k$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} / x = 3 + 4(1 + k) / k' = (1 + k)$$

$$\iff \exists k' \in \mathbb{Z} / x = 3 + 4k'$$

$$\iff x \in \dot{3}$$

2. Soit \preccurlyeq la relation sur \mathbb{N} définie par

$$x \preccurlyeq y \iff x \text{ divise } y$$

Montrons que \preccurlyeq est une relation d'ordre sur \mathbb{N} .

i) R est une relation Reflexive :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \text{ divise } x \text{ donc}$$

$$\forall x, \in \mathbb{R}, xRx$$

ce qui montre que \preccurlyeq est une relation Réflexive.

ii) R est une relation Anti-symétrique, car :

$$\forall x, y \in R, x \preccurlyeq y \text{ et } y \preccurlyeq x \implies x \text{ divise } y \text{ et } y \text{ divise } x$$

$$\implies y = x.$$

iii) R est une relation Transitive :

$$\forall x, y, z \in R, (x \preccurlyeq y) \wedge (y \preccurlyeq z) \implies x \text{ divise } y \text{ et } y \text{ divise } z$$

$$\implies x \text{ divise } z$$

$$\implies x \preccurlyeq z.$$

Donc

$$\forall x, y, z \in R, (x \preccurlyeq y) \wedge (y \preccurlyeq z) \implies (x \preccurlyeq z)$$

ce qui montre que R est une relation Transitive.

cette relation non totalement ordonnée

car $5 \preccurlyeq 3$ ou $3 \preccurlyeq 5$ n'est pas vraie.

Exercice 3 :

Soient $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow f(x) = x^2 + 1$$

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow g(x) = 2x + 1$$

f injective car $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$

f non surjective car $-3 = x^2 + 1$ n'admet pas une solution.

f non bijective car f non surjective

g est injective car $g(x) = g(y) \implies 2x + 1 = 2y + 1$

$$\implies 2x = 2y.$$

$$\implies x = y$$

g est surjective car $y = 2x + 1 \implies x = \frac{y-1}{2}$

c'est à dire $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x = \frac{y-1}{2}$

g est bijective car f est injective et surjective.

On précise $g \circ f$ et $f \circ g$

$$g \circ f(x) = 2(x^2 + 1) + 1 = 2x^2 + 3.$$

$$g \circ f(x) = (2x + 1)^2 + 1 = 4x^2 + 4x + 2.$$

Exercice 4 : Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications

et A et B deux ensembles de E , et M et N deux ensembles de F ,

montrons que :

$$1. A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$$

On suppose $A \subset B$ et on montre que $f(A) \subset f(B)$

$$x \in f(A) \implies \exists y \in A / y = f(x)$$

$$\implies \exists y \in A \subset B / y = f(x)$$

$$\implies \exists y \in B / y = f(x)$$

$$\implies x \in f(B)$$

$$2. M \subset N \implies f^{-1}(M) \subset f^{-1}(N)$$

$$x \in f^{-1}(M) \implies \exists y \in M / y = f(x)$$

$$\implies \exists y \in M \subset N / y = f(x)$$

$$\implies \exists y \in N / y = f(x)$$

$$\implies x \in f^{-1}(N)$$

3. Si $g \circ f$ est injective et f surjective alors g est injective.

$\forall y_1, y_2 \in F$ alors $\exists x_1, x_2 \in E / y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$. car f surjective

$$g(y_1) = g(y_2) \implies g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

$$\implies x_1 = x_2 \text{ car } g \circ f \text{ est injective}$$

$$\implies f(x_1) = f(x_2)$$

$$\implies y_1 = y_2.$$

4. Si $g \circ f$ est surjective et g injective alors f est surjective.

$\forall z \in G$ alors $\exists x \in E / z = g \circ f(x)$ car $g \circ f$ est surjective.

Soit $y \in F \implies g(y) = z \in G$

$\implies \exists x \in E / g(y) = g \circ f(x)$ comme g est injective.

$\implies \exists x \in E / y = f(x)$.

Alors f est surjective.

4.5 Fiche TD 3

Exercice 1 : Soit $f :]-1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)} - \sqrt{(1+x)}}$$

Déterminer les limites de f , si elle existent, en 0 et en $+\infty$.

Exercice 2 :

1) Si $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$ et $\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 1$,

Donner la limite de $g \circ f(x)$ lorsque $x \rightarrow 1$.

2) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ si $x \neq 0$.

Déterminer l'ensemble des points où elle est continue.

Exercice 3 : Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$.

Montrer qu'il existe c dans $[0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.

Exercice 4 : Dans chacun des cas suivants, dire si l'application f se prolonge par continuité en a et donner le prolongement par continuité le cas échéant

1. $f : [-3, +\infty[\setminus \{6\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{(\sqrt{(x+3)} - 3)}{(x-6)}$, et $a = 6$.

2. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)}}{x}$, et $a = 0$.

Exercice 5 :

Soit a et b deux nombres réels. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$x \rightarrow \begin{cases} ax + b & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{1+x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1) Donner une condition sur b pour que f soit continue sur \mathbb{R} .

2) Déterminer a et b tels que f soit dérivable sur \mathbb{R} et dans ce cas calculer $f'(0)$.

Exercice 6 : Les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x|x|, \quad g(x) = \sqrt{(x^2 - x)}.$$

Sont-elles dérivables en 0 ?

Exercice 1 : Soit $f :]-1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)} - \sqrt{(1+x)}}$$

les limites de f en 0 et en $+\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)} - \sqrt{(1+x)}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)} - \sqrt{(1+x)}} \times \frac{\sqrt{(1+x^2)} + \sqrt{(1+x)}}{\sqrt{(1+x^2)} + \sqrt{(1+x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(\sqrt{(1+x^2)} + \sqrt{(1+x)} \right)}{1+x^2 - (1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(\sqrt{(1+x^2)} + \sqrt{(1+x)} \right)}{x^2 - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(\sqrt{(1+x^2)} + \sqrt{(1+x)} \right)}{x(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt{(1+x^2)} + \sqrt{(1+x)} \right)}{(x-1)} = -2 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)} - \sqrt{(1+x)}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{(1+x^2)} + \sqrt{(1+x)} \right)}{(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(x\sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)} + x\sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)} \right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(\sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)} + \sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)} \right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)} + \sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)} \right)}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 1 \end{aligned}$$

Exercice 2 :

1) $\lim_{x \rightarrow 1} g \circ f(x) = 1$,

2) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ si $x \neq 0$.

Notons déjà que cette fonction est définie sur \mathbb{R} et continue sur \mathbb{R}^* il reste à étudier la continuité en 0.

D'autre part $\sqrt{x^2} = |x|$, nous allons donc distinguer deux cas $x \geq 0$ et $x \leq 0$.

Si $x \geq 0$ alors $f(x) = x + 1$ donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

Si $x \leq 0$ alors $f(x) = x - 1$ donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

Par conséquent

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

Ce qui montre que f n'est pas continue en 0.

Exercice 3 : Soit g la fonction définie sur $[0, \frac{1}{2}]$ défini par

$$g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{2})$$

$$g(0) = f(0) - f(\frac{1}{2}) \text{ et } g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - f(1) = f(\frac{1}{2}) - f(0) = -g(0)$$

alors $g(0) \cdot g(\frac{1}{2}) \leq 0$ et la fonction g est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que

$$g(c) = 0$$

,c'est-à-dire tel que

$$f(c) = f(c + \frac{1}{2})$$

Exercice 4 :

1. $f : [-3, +\infty[\setminus \{6\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{(\sqrt{x+3}) - 3}{(x-6)}$, et $a = 6$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(\sqrt{x+3}) - 3}{(x-6)} &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(\sqrt{x+3}) - 3}{(x-6)} \times \frac{(\sqrt{x+3}) + 3}{(\sqrt{x+3}) + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x+3-9)}{(x-6)(\sqrt{x+3}) + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x-6)}{(x-6)(\sqrt{x+3}) + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{(\sqrt{x+3}) + 3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

le prolongement par continuité défini par

$$x \rightarrow \begin{cases} \frac{(\sqrt{x+3}) - 3}{(x-6)}, & \text{si } x \neq 6 \\ \frac{1}{6} & \text{si } x = 6 \end{cases}$$

2. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)}}{x}$, et $a = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)}}{x} = 1$$

le prolongement par continuité défini par

$$x \rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)}}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 5 :

Soit a et b deux nombres réels. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$x \rightarrow \begin{cases} ax + b & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{1+x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1) f est continue sur \mathbb{R} .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ax + b = b \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+x} = 1$$

f est continue sur \mathbb{R} si $b = 1$.

2)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax + 1 - 1}{x - 0} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{1+x} = -1$$

f est dérivable sur \mathbb{R} si $a = -1$ et $b = 1$.

Exercice 6 : Les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x|x|, \quad g(x) = \sqrt{(x^2 - x)}.$$

1) On a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = 0$$

alors f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

2) On a la fonction g n'est pas définie au voisinage à gauche de 0 car :

x	$-\infty$	-	0	+	1	+	$+\infty$
$x - 1$		-		-	0	+	
$x(x - 1) = x^2 - x$		+	0	-	0	+	

Donc

$$D_g =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$$

Bibliographie

- [1] SERIE RAMIS, Mathématiques Tout-en-un pour la Licence Cours complet et 270 exercices corrigés , (2007).
- [2] HITTA AMARA, Cours Algèbre et Analyse I ,LMD : DEUG I–MI/ST– (2008/2009) .
- [3] MARC HINDRY, Cours mathématiques première année (L1).
- [4] M. MECHAB, Cours d’algèbre-LMD Sciences et Techniques.