UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA — Année 2015/2016

Département : T.C S.T

Module : Physique 1

SERIE D'EXERCICES N°1

RAPPELS MATHEMATIQUES.

A/ Analyse dimensionnelle.

Exercice 1 : Déterminer les dimensions respectives des grandeurs : Energie, pression, charge et potentiel électriques.

Exercice 2 : La grandeur physique η (viscosité d'un fluide) est définie par la relation $F = \eta.S.dv/dy$ où F est une force, S une surface, v une vitesse et y une distance. Déterminez la dimension de η, déduire son unité dans le système international.

Exercice 3 : On voudrait déterminer le travail W de la force de pesanteur, pour un déplacement (verticale) h d'un corps de masse m, dans le champ de pesanteur g. Parmi les lois suivantes, indiquez celles qui sont fausses : $W = m.h$; $W = m^2.h/g$; $W = 2.g^2.h^4$; $W = 8.m.g.h$.

Exercice 4 : Parmi les unités suivantes, lesquelles sont susceptibles de s'appliquer à un travail ?
$Pa.m^3$; $N.m$; $Kg.m^2.s^{-2}$; J/s ; $(Kg/m^3).(m/s)^2.m^3$; $(m/s^2).kg.m$

Exercice 5 : Un satellite de masse m tourne autour de la terre suivant une trajectoire circulaire de rayon r. Sachant que la période de rotation T est déterminée par une expression ayant la forme $T = Cte.r^{\alpha}.m^{\beta}.G^{\gamma}$ (G étant la constante universelle de gravitation). Déterminez la dimension de G, déduire les valeurs des constantes α, β et γ.

Exercice 6 : La force qui s'exerce entre deux charges électriques q et q', séparées par une distance r est donnée en module par la loi de Coulomb.

$$F = K.q.q'/r^2 \quad \text{où} \quad K = 1/4\pi\varepsilon_0$$

La force s'exerçant entre deux fils parallèles de longueur L, parcourus par des courants I et I' et séparés par une distance r est donnée par :

$$F = (\mu_0/2\pi).(I.I'/r).L$$

1. Déterminez les dimensions de ε_0 et μ_0.
2. Vérifiez l'homogénéité de la relation : $\varepsilon_0.\mu_0.c^2 = 1$

Exercice 7 : Vérifier l'homogénéité de la relation : $(d\Phi/d\lambda) = K.I.z.(hc/\lambda)^2.(\lambda/\lambda_0 - 1)$ où K est une constante ; Φ : la puissance ; I : l'intensité du courant électrique ; z : le numéro atomique.

B/ Calcul d'incertitudes.

Exercice 8 : La période d'oscillation d'un pendule est donnée par :

$$T = 2\pi\sqrt{L/g}$$

Où g représente l'accélération de la pesanteur et L la longueur du pendule. On mesure L = 15 cm à 2% près et T = 0.8 s à 3% près. Calculer g et Δg (On admet que $\pi = 3.14$ exactement).

Exercice 9 : Soit un cylindre de hauteur h = 1m et de diamètre D = 1m. Calculer le volume V sachant que les mesures de la hauteur et du diamètre ont une précision de 1%.

Déterminer l'incertitude absolue ΔV sur le volume en utilisant la différentielle dV. En déduire l'incertitude relative $\Delta V/V$?
Déterminer $\Delta V/V$ en utilisant le logarithme de V ? Conclusion ?

C/ Calcul vectoriel

Exercice 10 (à faire)

Soient les vecteurs $V_1(2, 0, 0)$, $V_2(4, 3, 1)$ et $V_3(1, 0, 4)$

Calculer : $V = 6V_2 + 4V_3 - V_1$ ou $V_4 = V_1 - V_2 + V_3$. Le produit scalaire $V_1.V_2$; $V_2.V_3$; $V_1.V_3$

Le produit vectoriel $V = V_1 \wedge V_2$ et $S = V \wedge V_3$, le volume $W = V_1.(V_2 \wedge V_3)$

Exercice 11:

calculer les trois angles que fait le vecteur $U = i - 2j - 3k$, avec les axes Ox, Oy, Oz.

Exercice 12: (à faire)

Soient les vecteurs suivants :

$A = \sqrt{3}i + j \qquad B = i + \sqrt{3}j$

Trouver le vecteur unitaire parallèle au vecteur B, puis la composante du vecteur A parallèle au vecteur B (c.à.d. la projection de A sur B).

Exercice 13

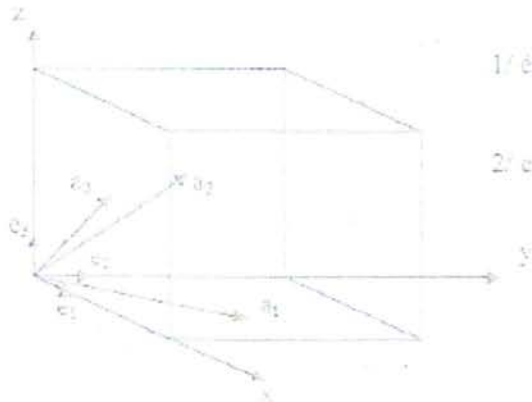
Soit une base (i, j, k) et un vecteur V(2, 4, 1). Calculer les angles (k, V) et (i, V').

V' est le vecteur projection dans la base (i, j).

Exercice 14 (à faire)

Soit un vecteur V et deux bases (a_1, a_2, a_3) et (i, j, k) avec $a_1 = a_2 = a_3 = a/2$, a est l'arête du cube.

Représenter dans la figure suivante.



1/ écrire les vecteurs a_1, a_2 et a_3 dans la base orthonormée (i, j, k)

2/ exprimer le vecteur V dans les deux bases

Exercice 15

Soient trois vecteurs A, B, C tels que

$A = -2i + j - 3k \qquad B = 2i - j + k \qquad C = x\,i + j + z\,k$

1) Calculer x et z pour que le vecteur C soit

a) parallèle à A

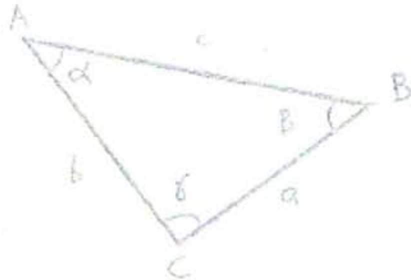
b) perpendiculaire à A et B en même temps

Exercice 16:

Trouver l'expression de l'aire du triangle construit sur les vecteurs u et v qui ont même origine O. Utiliser le résultat pour calculer la surface du triangle de sommets :

A (1,0,0) , B(0,1,0) et C(0,0,1)

Exercice17 :



On considère le triangle ABC de la figure ci-contre. On donne :

AB = c ; AC = b ; BC = a

a) Montrer en utilisant le produit scalaire que

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos\beta$

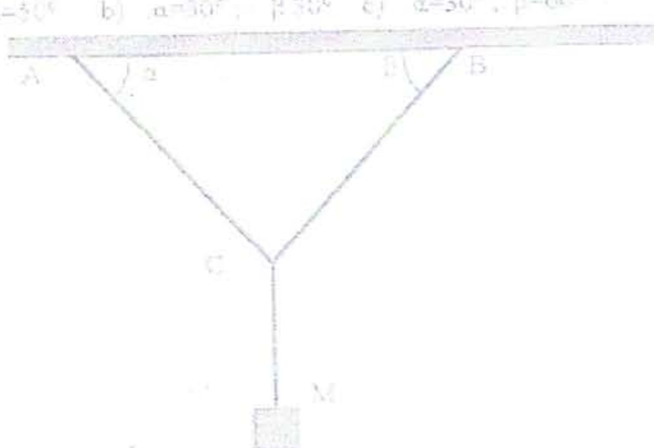
que devient cette relation pour $\beta = \pi/2$

b) Montrer que $\vec{AC}\wedge\vec{AB} = \vec{BA}\wedge\vec{BC} = \vec{CB}\wedge\vec{CA}$

c) En calculant les modules de ces produits vectoriels montrer que :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Application : calculer la tension des fils AC et BC quand la masse M du corps vaut 40 N dans les cas suivants : a) α =50° ; β=50° b) α=30° ; β 30° c) α=30° ; β=60°



Exercice 18:

-Soit la fonction à trois variables suivante $U(x, y, z) = 3x^2yz^3 - 4x^3y^2z$

Calculer : Grad U.

-Soit la fonction vectorielle $\varphi(x, y, z) = y\,i + x\,j - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,k$

Calculer : rot φ.

Exercice 19 :

Calculer la différentielle totale des fonctions scalaire et vectorielle suivantes

Ep(x, y, z) = [illegible] ; A(r, θ, φ) = [illegible]

Exprimer : Ep(x, y, z) et A(r, θ, φ) au point M(r, θ, φ) en coordonnées sphériques et cylindriques

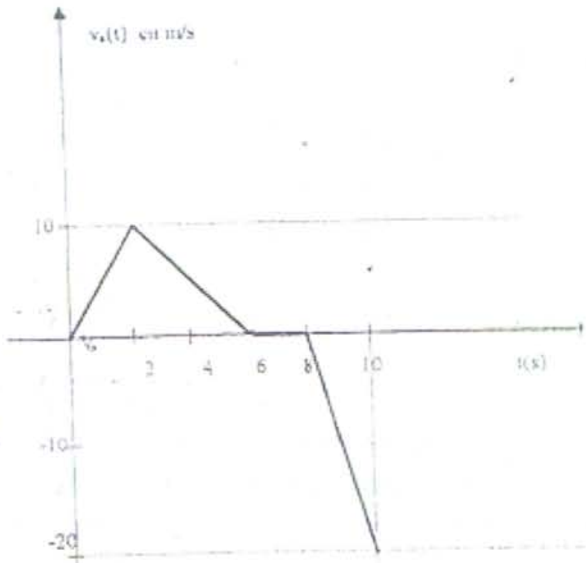
Exercice 20

Soit la fonction : $Ep(x, y, z) = -\omega^2(x^2 + y^2 + z^2)$. Calculer grad Ep(x, y, z)

SERIE N°02- CINEMATIQUE

Exercice N°1: (à faire)

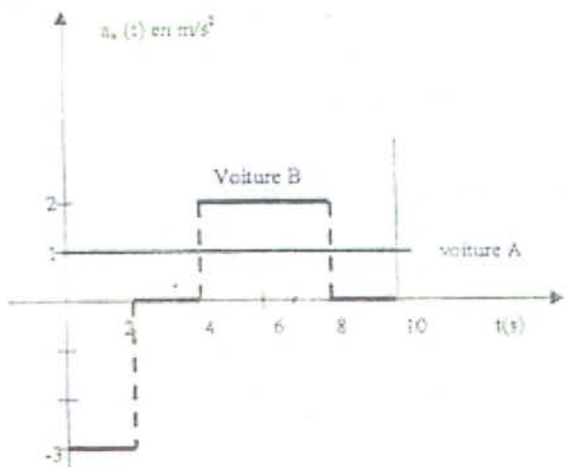
Un mobile M se déplace sur la droite Ox avec une vitesse $v(t)$ dont les variations sont données par le graphe ci-dessous.



1-Tracer $a_x(t)$. Donner la nature du mouvement pour chaque phase
2- Ecrire les équations $v_x(t)$ et $x(t)$ sachant qu'a $t=0s$, $x_0 = 0$ m
3-Tracer $x(t)$ en donnant ses valeurs à $t = 2s, 4s, 6s, 8s, 10s$
4-Déterminer graphiquement et analytiquement L'instant pour lequel $x(t) = 0$.
5-Déterminer le vecteur vitesse aux instants $t = 4s$ et $t = 9s$ en déduire l'accélération moyenne.
6-Quelle est la distance totale parcourue entre les instants $t=0s$ et $t=10s$.

Exercice N°2:

Une voiture A part du repos avec une accélération constante égale à $1\ m/s^2$ .Au même moment une vitesse B la dépasse, roulant avec une vitesse initiale $v_B = 8\ m/s$ et une accélération donnée par le graphe ci-contre pour les différentes phases de son mouvement .En considérant la position de départ ($t=0s$) de la voiture A comme origine.



1- Représenter graphiquement $v_A(t)$ et $v_B(t)$.
2-A quel instant les deux vitesses sont elles égales ?
3-En se basant sur les graphes $v_A(t)$ et $v_B(t)$ quelle voiture est en tête à $t=10s$?
4-représenter graphiquement $x_A(t)$ et $x_B(t)$.
5-Trouver l'instant de rencontre des deux voitures.

Exercice N°3:

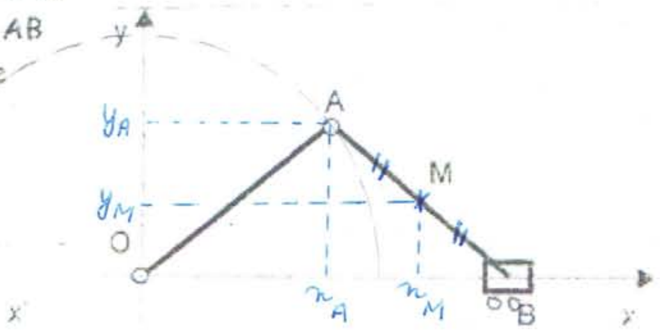
L'accélération d'une particule ,en mouvement rectiligne est donnée par la relation:
$\gamma = 9x-3$. Sachant qu'a $t=0$ $x_0=0$ et $v_0 = 10$ m/s. Trouver l'expression $v(x)$.

Exercice N°4:

L'accélération d'un objet qui se déplace sur une droite orientée est donnée par $a_x = 4 - t^2$ (a_x en m/s^2 , t en s). Trouver les expressions en fonction du temps de la position et de la vitesse étant donnée que pour $t = 3$ s, $v_x = 2$ m/s et $x = 9$ m.

Exercice N°5 : (à faire)

Une manivelle OA ,articulée en A a une tige AB ,tourne à une vitesse angulaire ω=10rd/s autour d'un axe fixe O.la tige B est reliée par une articulation en B à un patin qui est astreint à se déplacer en glissant sur le sol. Les tiges OA et AB peuvent se croiser et le patin B passer derrière l'articulation O. On donne OA=AB=R=80 cm. A l'instant initial le patin se trouve dans sa position limite à droite. L'étude du système se fait dans le système d'axes indiqué.



1) Déterminer les équations paramétriques permettant de connaître la position ,la vitesse, l'accélération du milieu M de AB.
2) Mêmes questions pour le mouvement du point B. Tracer les graphes de la vitesse et de l'accélération du patin B
3) dans quels intervalles de temps, le mouvement du patin B est-il accéléré ou retardé.

Exercice N°6: (à faire)

Les coordonnées cartésiennes d'une particule sont données en fonction du temps par

$$x = t^2 \;;$$
$$y = (t-1)^2;$$

a) Trouver l'équation de la trajectoire et tracez la dans le plan xOy
b) Calculer les composantes de la vitesse moyenne entre les instants t et $t + \Delta t$, en déduire les composantes de la vitesse instantanée

c) Calculer les composantes de l'accélération moyenne dans l'intervalle compris entre t et t + Δt. En déduire les composantes de l'accélération instantanée

d) Quand la vitesse est elle minimum?

e) Trouvez les coordonnées quand la vitesse est de 10 m/s.

f) Calculez l'accélération normale et tangentielle à t=2s.Dessinez le vecteur accélération à cet instant.

Exercice N°7 : Sur feuille

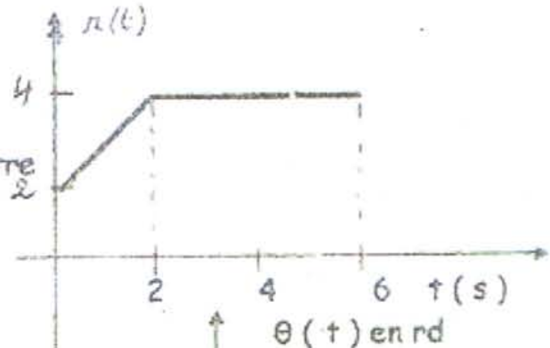
Les coordonnées d'un mobile se déplaçant dans un plan sont données à tout instant par :

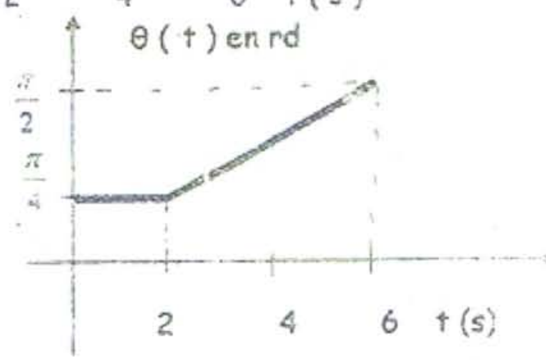
$$x(t) = 2t^3 - 3t^2 \ (m) \qquad \text{et} \qquad y(t) = t^2 - 2t + 1 \ (m).$$

1) Trouver les composantes du vecteur vitesse v(t) à tout instant puis à l'instant t=1s .
2) Donner la vitesse initiale v_0=v(0). A quel instant s'annule la vitesse v(t) ?
3) Calculer les composantes du vecteur accélération a(t) à tout instant , puis à t=1s .
4) Donner l'accélération initiale a_0. A quels instants l'accélération est elle parallèle Oy.

Exercice N° 8:

Le mouvement d'une particule (M) est défini par ses coordonnées polaires r(t) et θ(t)) données par les graphes ci-contre





1- Déterminer les équations r(t) et θ(t) pour chaque phase du mouvement.

2- Ecrire le vecteur position pour chaque phase du mouvement dans le repère des coordonnées polaires et calculer les composantes de la vitesse et l'accélération dans ce repère et en déduire leurs modules respectifs

3- Ecrire le vecteur position pour chaque phase du mouvement dans le repère des coordonnées cartésiennes et calculer les composantes de la vitesse et de l'accélération dans ce repère et en déduire leurs modules respectifs. Comparer avec la question 2.

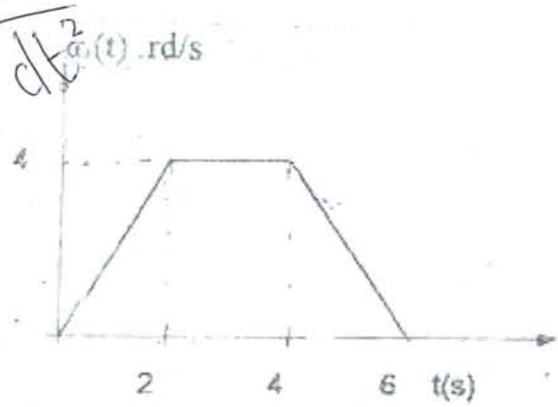
4- Calculer les composantes intrinsèques de l'accélération .

5- Donner la nature du mouvement pour chaque

Exercice N°9: (à faire)

Un point matériel se déplace sur un cercle de centre O et de rayon R=2 m, le graphe ci-dessous donne la vitesse angulaire $\omega(t)$.

$\omega(t) = \frac{d^2\theta}{dt^2}$



1) Donner $\theta(t)$ de chaque phase.

2) Donner $\alpha(t)$, l'accélération angulaire de chaque phase.

3) Calculer pour la 2ème étape :)

a) Les composantes cartésiennes du vecteur position.

b) Les composantes cartésiennes du vecteur accélération.

c) Les composantes intrinsèques du vecteur accélération.

Exercice N °10:

Le mouvement d'un point matériel est caractérisé dans un trièdre direct $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par les relations :

$$x(t) = 2t^2 + 1 \quad ; \quad (y) = 2t^2 \quad ; \quad z(t) = t^3 - 1$$

1) Calculer les composantes des vecteurs, vitesse et accélération du mouvement et en déduire leurs modules respectifs.

2) Trouver la composante du vecteur vitesse sur la direction du vecteur accélération.

Exercice N°11: (à faire)

Un point matériel décrit une trajectoire spirale dans l'espace caractérisée par les relations suivantes:

$$x(t) = R\cos\theta(t) \quad ; \quad y(t) = R\sin\theta(t) \quad ; \quad z(t) = h\,\theta(t) \quad ;$$

où : h, R sont des constantes

1) Trouver les composantes des vecteurs vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes et en coordonnées cylindriques et en déduire leurs modules respectifs.

2) Dans le cas où $\omega = \frac{d\theta}{dt} = c^{st}$, donner le vecteur vitesse $\vec{v}$ et montrer qu'il fait un angle α avec l'axe OZ calculer $tg\,\alpha$.

Chez moi 3) Calculer dans ce cas (ω = constante), les composantes du vecteur accélération, en déduire le rayon de courbure ρ en fonction de R et de h.

Université Saad Dahleb Blida
Faculté des Sciences
TC ST

Année Universitaire 2015-2016

Dynamique du point matériel.

Exercice n°1 : Un fusil de masse 0,80 kg tire une balle de masse 0,016 kg animée d'une vitesse de 700 m/s. Calculer la vitesse de recul de l'arme.

Exercice N°02 : Un corps (1) de masse 3,1 kg se déplace vers l'ouest avec une vitesse de 6 m/s, il entre en interaction avec un autre corps de masse 1,6 kg se déplaçant avec une vitesse de 5 m/s vers le nord et après 2 s d'interaction, le corps (1) se déplace vers le nord 30° est et une vitesse de 3,0m/s. Trouver:

a) La valeur et le sens de la vitesse du corps (2)

b) La quantité de mouvement totale des deux corps avant et après les 2 s d'interaction.

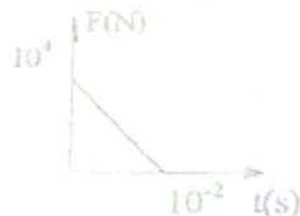
c) La variation de la vitesse de chaque corps

d) La variation de la quantité de mouvement de chaque corps

Exercice n°3 : Un point matériel de masse 10 kg se déplaçant avec une vitesse initiale de 3 m/s, est soumis à une force variable avec le temps entre t = 0 s et t = 0,01s , comme l'indique la force figure ci-dessous. Sachant que la force et la vitesse initiale ont même direction. Calculer la vitesse finale du mobile quand :

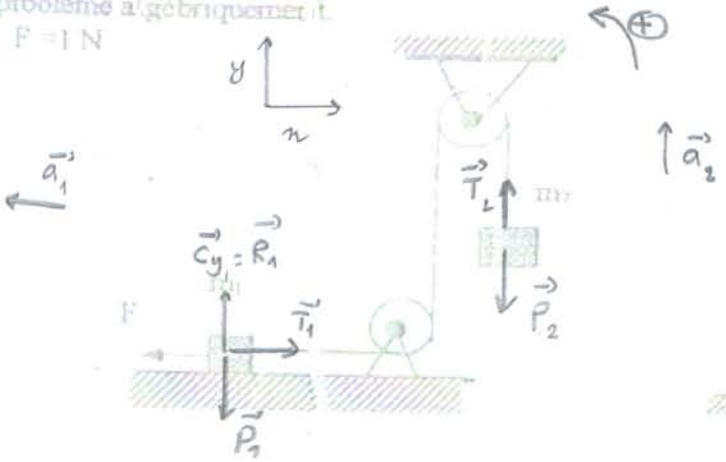
1) La force est de même sens que la vitesse initiale.

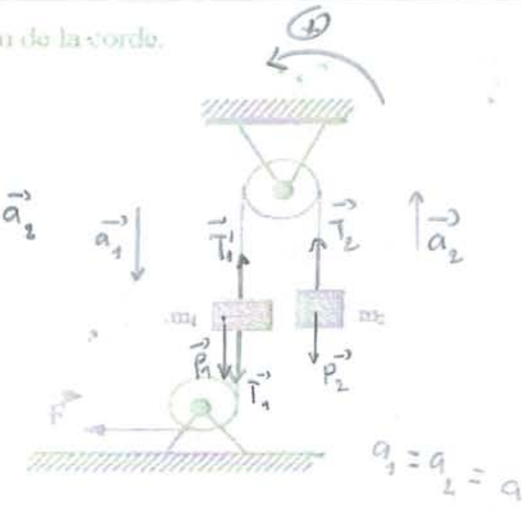
2) Le sens de la force est contraire au sens de la vitesse initiale



Exercice n°4 : Calculer l'accélération des corps de la figure et la tension de la corde. Résoudre d'abord le problème algébriquement.

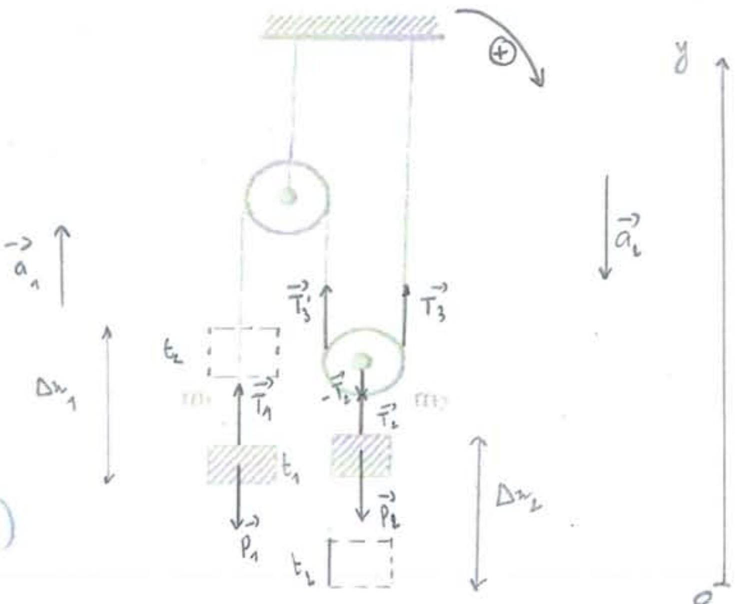
m_1 = 50 g, m_2 = 30 g, F = 1 N





Exercice n°5 : Calculer les accélérations des masses m_1 et m_2 du système dynamique suivant ainsi que les tensions des fils.
Les poulies sont identiques et de masses négligeables et les fils sont inextensibles.

m_1 = 8kg, m_2 = 2kg



(1)

Exercice n°6 : Montrer que les accélérations des corps de la figure ci-contre ont pour valeurs

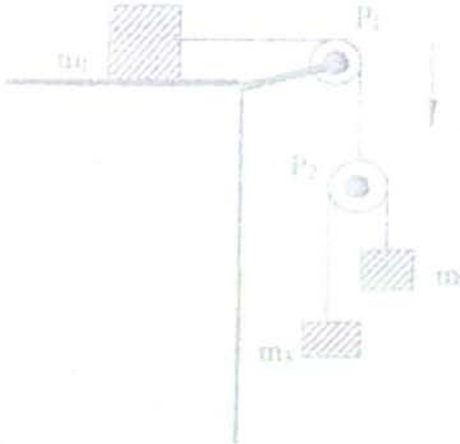
$a_1 = 4\, m_2 m_3 P$

$a_2 = (m_1 m_2 + 4\, m_2 m_3 - m_1 m_3)\, P$

$a_3 = (m_1 m_3 - m_1 m_2 + 4\, m_2 m_3)\, P$

avec $P = g / (m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4\, m_2 m_3)$

attention : $|\vec{a}_2| \neq |\vec{a}_3|$: le repère de P_2 n'est pas galiléen

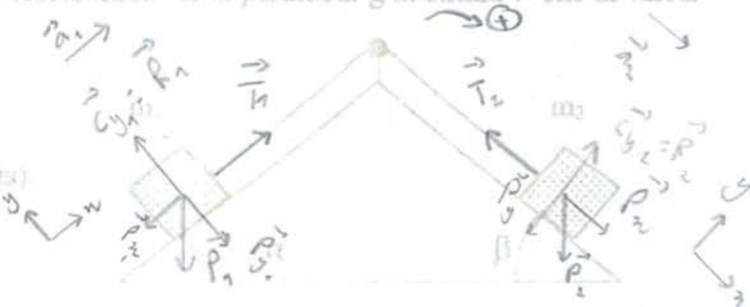


Exercice n°7 : Un satellite fait le tour complet de la terre en 95 mn à une altitude moyenne de 500 Km On donne le rayon de la terre R = 6400 Km

1) Calculer la masse de la terre

2) A quelle altitude par rapport à la surface terrestre, l'accélération de la pesanteur g atteindra-t-elle la valeur de 4,9 m/s^2 ?

Exercice n°8 : Déterminer l'accélération avec laquelle se déplacent les corps de la figure ci-contre, ainsi que les tensions des fils (supposer que les corps glissent sans frottements) $m_1 = 200$ g, $m_2 = 180$ g, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$



- en supposant maintenant qu'il y a un frottement entre les masses et les plans inclinés (P_1 et P_2). Soient $k_1 = 0,2$ et $k_2 = 0,3$ les coefficients de frottements respectivement entre m_1 et P_1 et entre m_2 et P_2.

Calculer la nouvelle accélération du système

Exercice n°9 : On considère le système dynamique représenté par la figure ci-contre on $m_2 = 2$ kg, $m_3 = 3$ kg Soient $k_s = 0,2$ et $k_d = 0,1$ les coefficients de frottement statique et dynamique entre les masses m_2 et m_3 et le plan horizontal

1) Quelle est la plus petite masse m'_1 pour laquelle le système se met en mouvement ?

2) On remplace m'_1 par m_1 tel que $m_1 = 2$ kg

a) Calculer l'accélération du système

b) Calculer la tension des fils

Exercice n°10 : Un projectile de masse m est lancé d'un point O, avec une vitesse initiale v_0 contenue dans le plan XOY et faisant un angle θ avec l'horizontal. Il est en plus de son poids soumis à une force de freinage proportionnelle à sa vitesse $F = -k\,v$ où $k \in \mathbb{R}^+$

1) Appliquer la relation fondamentale de la dynamique suivant OX et OY

2) En déduire $v_x(t)$ et $v_y(t)$. Que deviennent-elles lorsque t tend vers l'infini ?

3) Déterminer les équations horaires du mouvements x(t) et y(t).

Exercice n°11 : Un corps de masse M = 0,5 kg est assujetti à glisser avec frottement le long d'une tige horizontale OT que l'on peut faire tourner autour de l'axe vertical (Δ). Un ressort de longueur à vide $l_0 = 40$ cm et de constante de raideur $k = 6,4$ N/m lié le point O à la masse M. Les coefficients de frottements statique et dynamique sont $\mu_s = 0,4$ et $\mu_d = 0,3$.

1) Quelle est la valeur ω_0 de la vitesse angulaire pour laquelle le ressort commence à s'étirer ?

2) Si $\omega = 4$ rd / s tel que $\omega > \omega_0$, calculer l'élongation du ressort

SECTIONS : D, H et Classe Préparatoire A

Exercices Travail & Energie.

Exercice N°1:

Un point matériel de masse M, se déplace dans le plan z=0 sous l'action d'une force

$$\vec{F} = (x - ay)\vec{i} + (3y-2x)\vec{j}.$$

1. Calculer le travail nécessaire pour déplacer le point matériel suivant la droite joignant le point O (0,0) à A (2,4) en fonction du paramètre a.
2. Même question suivant le trajet OA'A, A' étant la projection de A sur Ox.
3. Pour quelle valeur de a $\vec{F}$ dérive d'un potentiel $E_P(x,y)$? Déterminez l'expression de cette énergie $E_P(x,y)$.

Exercice N°2 :

Soit la force définie par : $\bar{F} = (3x^2 + 2a^2y^2)\bar{i} + 2axy.\bar{j}$

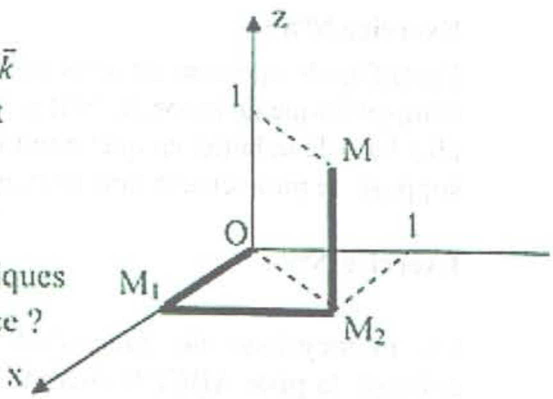
Où a est un paramètre réel différent de zéro.

1. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la force $\bar{F}$ dérive d'un potentiel.
2. Déduire l'expression de ce potentiel $E_p(x,y)$.
3. Pour a=0.5, calculer le travail de $\bar{F}$ si le point d'application se déplace du point A (+1,0) au point B (+2,+1), le long de deux chemins différents :
   a) Suivant la ligne brisée ACB avec C (+1,+1).
   b) Le long de la droite qui joint les deux point A et B. $\bar{F}$ est elle conservatrice?

Exercice N°3 :

Calculer le travail de la force $\bar{F} = (x^2 + y^2)\bar{i} + x.z.\bar{j} + x.y.\bar{k}$ dont le point d'application se déplace de l'origine O au point M (+1,+1,+1), le long de deux chemins différents :

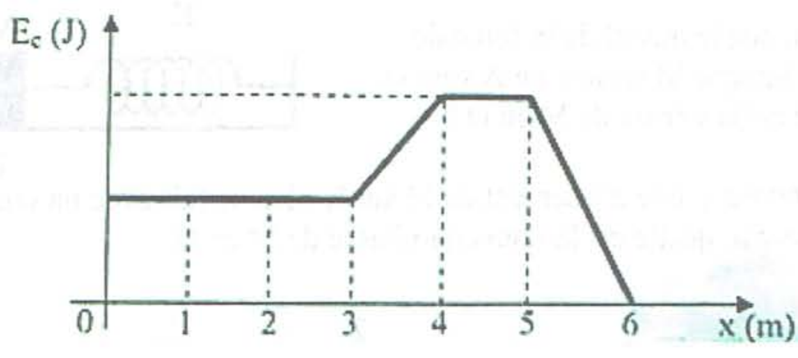
a. Suivant la ligne brisée OM_1M_2M avec $M_1(+1,0,0)$ et $M_2(+1,+1,0)$.
b. Le long de la courbe (C) dont les équations paramétriques sont : $x = t$; $y = t^2$ et $z = t$. $\bar{F}$ est elle conservatrice ?



Exercice N°4 :

Un corps de masse **m = 1 kg**, initialement en O, se déplace sur l'axe Ox sous l'effet d'une force conservatrice $\bar{F}$. La figure ci-dessous, illustre les variations de l'énergie cinétique E_c du corps en fonction de x. Si l'énergie totale initiale en O est E_{T_0}=100 J :

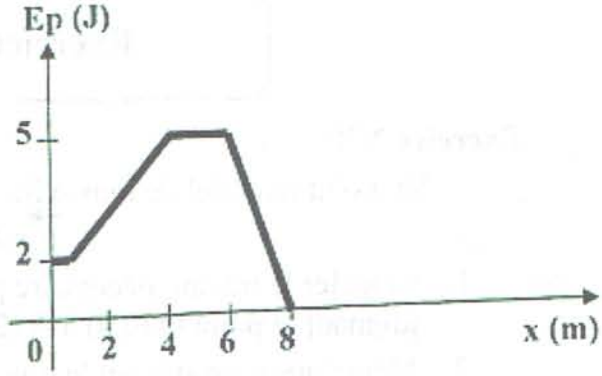
1. Calculer l'énergie potentielle initiale du corps.
2. Calculer le travail effectué par la force $\bar{F}$ entre x=0 m et x=6 m.
3. Tracer les graphes représentants $E_p(x)$ et $E_T(x)$.
4. Tracer le graphe représentant $F(x)$, puis retrouver la valeur du travail de $\bar{F}$ entre x=0 et x=6.



Exercice N°5 :

Un corps de masse M=1kg se déplace sur l'axe des x à partir de l'origine O, avec une vitesse initiale V_O=6 m/s. La figure ci-contre donne les variations de l'énergie potentielle E_P du corps en fonction de l'abscisse x.

On suppose que le mouvement s'effectue sous l'action d'une force conservatrice $\vec{F}$.



1. Calculer l'énergie totale du corps.
2. Calculer le travail W effectué par $\vec{F}$ pour le déplacement : x=0m à x=8m.
3. Tracer le graphe de la variation de F en fonction de x , puis retrouver la valeur W.

Exercice N°6 :

Un corps immobile initialement, tombe d'une hauteur h. Déterminez et tracez les expressions de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle en fonction :

1. du temps t,
2. de la hauteur z.

Vérifier que pour chaque cas, l'addition des deux courbes donne quantité constante.

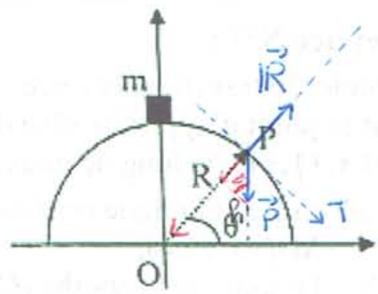
Exercice N°7 :

Un pendule simple est constitué d'une masse de 500g accrochée à une ficelle de longueur l=1m. On écarte notre pendule d'un angle de 60° à partir de la verticale et on abandonne le système sans vitesse initiale. Déterminer l'énergie cinétique et la vitesse de la masse lorsque :

- La ficelle passe par la verticale.
- La ficelle fait un angle de 30° avec la verticale du côté opposé à celui du départ.

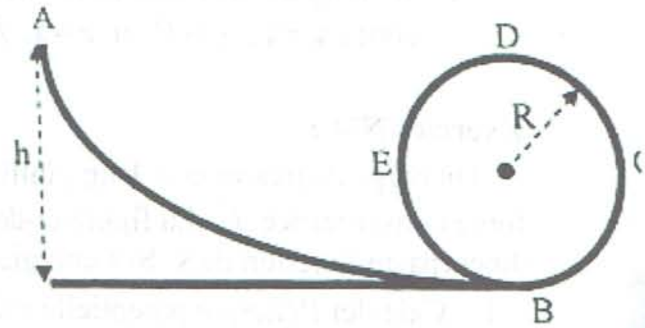
Exercice N°8 :

Un enfant de masse m est assis sur une butte de glace hémisphérique de rayon R. S'il se laisse glisser du point le plus haut de la butte, en quel point P quittera-t-il la butte ? On suppose le mouvement sans frottements (figure ci-contre).



Exercice N°9 :

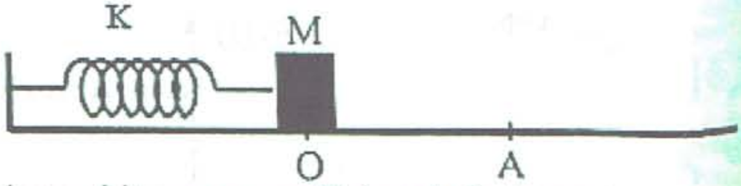
Un motocycliste de foire doit parcourir, moteur débrayé la piste ABCDE ci-contre. Il part du point A sans vitesse initiale. Déterminer la hauteur minimale h d'où il doit partir pour pouvoir suivre toute la piste sans décoller. Le rayon de la partie circulaire de la piste est R = 10 m.



Exercice N°10 :

Un cube M de masse m, assimilable à un point matériel, est relié à un ressort de raideur K et peut glisser sur un plan horizontal. On l'écarte de OA=a de sa position d'équilibre O.

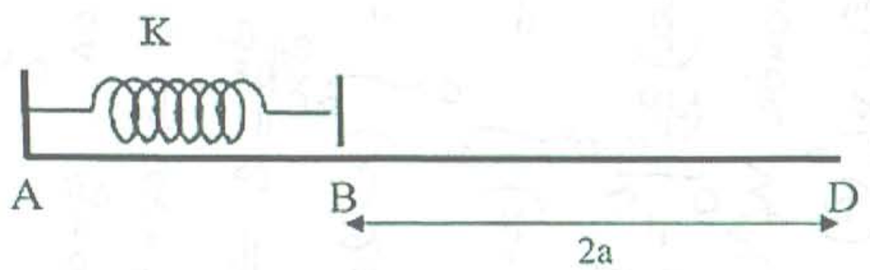
1. Déterminez le travail de la force de rappel lorsque M revient de A vers O. Quelle est la vitesse de M en O ?



2. On suppose que le glissement de M sur le plan se fait avec un coefficient de frottement cinétique μ, quelle est la nouvelle vitesse de M en O.

Exercice N°11 :

Dans le dispositif de la figure ci dessous, un ressort de raideur K=100 N/m est fixé horizontalement au point A de la piste ABD, l'extrémité libre du ressort non étiré B se trouve à une distance 2a du point D de la piste. (a = 1m)



On place un cube de masse m = 0.2 kg contre l'extrémité B du ressort (sans le fixer) puis on comprime le système (ressort, cube) avant d'abandonner le cube sans vitesse initiale.

1. Sachant que les coefficients de frottement statique et dynamique entre le cube et la piste ABD sont $\mu_s = 0.5$ et $\mu_d = 0.2$, calculez la compression maximale x_{max} du ressort qui laisse le cube au repos après avoir été abandonné.
2. Déterminez pour une compression x_1 de 10 cm, la vitesse du cube au point C milieu de BD (BC = CD = a).
3. Calculez la déformation x_2 nécessaire pour que le cube arrive en D avec une vitesse nulle.

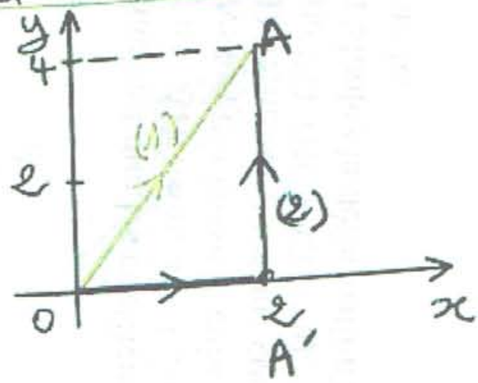
Correction Serie Travail et Energie

Exercice N°1 :

$$\vec{F}\begin{cases} F_x = x - ay \\ F_y = 3y - 2x \end{cases} \qquad \vec{d\ell}\begin{cases} dx \\ dy \end{cases} \qquad O\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$

1/ On me demande $W_O^A(\vec{F})$ suivant la droite OA.

$$W_O^A(\vec{F}) = \int_O^A \vec{F}.\vec{d\ell} = \int_O^A (x-ay)\,dx + (3y-2x)\,dy$$



* l'equation de OA : $y = \alpha . x$

en A : $4 = \alpha . 2 \Rightarrow \alpha = \frac{4}{2} = 2$

$$\Rightarrow y = 2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2 \Rightarrow dy = 2\,dx$$

D'où : $W_O^A(\vec{F}) = \int_O^A (x - 2ax)\,dx + (3(2x) - 2x)2dx$

$$W_O^A(\vec{F}) = \int_O^A (x - 2ax + 12x - 4x)\,dx = \int_0^2 (9-2a)x\,dx$$

$$W_O^A(\vec{F}) = \left[(9-2a)\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \boxed{18 - 4a}\ (J)$$

2/ On me demande $W_O^A(\vec{F})$ suivant $O \to A' \to A$ $\left(A'\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right)$

$$W_O^A(\vec{F}) = W_O^{A'}(\vec{F}) + W_{A'}^A(\vec{F})$$

* $W_O^{A'}(\vec{F}) = \int_O^{A'} (x-ay)\,dx + (3y-2x)\,dy$

et entre O et A' : $\begin{cases} y = 0 = cte \Rightarrow dy = 0 \\ x \text{ varie de } 0 \to 2 \text{ et } dx \ \exists \end{cases}$

$$\Rightarrow W_O^{A'}(\vec{F}) = \int (x - a.0)\,dx + (3.0 - 2x).0 = \int_0^2 x\,dx$$

$$\Rightarrow W_O^{A'}(\vec{F}) = \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \boxed{2J}$$

$$* \quad W_{A'}^{A}(\vec{F}) = \int_{A'}^{A} (x - ay)\,dx + (3y - 2x)\,dy$$

et entre A' et A : $\begin{cases} x = 2 = \text{cte} \Rightarrow dx = 0 \\ y \text{ varie de } 0 \longrightarrow 4 \text{ et } dy\ \exists \end{cases}$

$$\Rightarrow W_{A'}^{A}(\vec{F}) = \int (2 - ay)\cdot 0 + (3y - 4)\,dy = \int_0^4 (3y-4)\,dy$$

$$W_{A'}^{A}(\vec{F}) = \left[\frac{3}{2}y^2 - 4y\right]_0^4 = \boxed{8\,J}$$

D'où

$$W_0^{A}(\vec{F}) = W_0^{A'}(\vec{F}) + W_{A'}^{A}(\vec{F}) = 2J + 8J = \boxed{10\,J}$$

3/ On me demande la valeur de a pour que $\vec{F}$ soit conservatrice.

* Si $\vec{F}$ dérive d'un potentiel E_p, son travail ne dépend pas du chemin suivi $\Rightarrow W_0^{A}(\vec{F}) = \text{cte}\ \forall$ le chemin.

$$\Rightarrow \quad 18 - 4a = 10 \quad \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

autre méthode : $\vec{F}$ conservatrice $\Rightarrow \vec{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$ et on retrouve que $a = 2$.

Pour $a = 2$, déterminons $E_p(x, y)$.

$$\vec{F} = -\vec{grad}\,E_p(x,y) \Rightarrow \vec{F} \begin{cases} F_x = x - 2y = -\dfrac{\partial E_p(x,y)}{\partial x} & (1) \\ F_y = 3y - 2x = -\dfrac{\partial E_p(x,y)}{\partial y} & (2) \end{cases}$$

D'après (1) :

$$\partial E_p(x,y) = (-x + 2y)\,\partial x \Rightarrow E_p(x,y) = \int (-x + 2y)\,\partial x$$

$$\Rightarrow E_p(x,y) = -\frac{x^2}{2} + 2yx + C(y) \quad \text{(on remplace dans (2))} :$$

$$3y - 2x = -\frac{\partial}{\partial y} E_p(x,y) = 0 - 2x - \frac{\partial C(y)}{\partial y}$$

D'où $\dfrac{\partial C(y)}{\partial y} = -3y \Rightarrow C(y) = -\dfrac{3y^2}{2} + \text{cte} \Rightarrow$ $\boxed{E_p(x,y) = -\dfrac{x^2}{2} + 2xy - \dfrac{3}{2}y^2 + c}$

Exercice N°2

$$\vec{F}\begin{cases} F_x = 3x^2 + 2a^2y^2 \\ F_y = 2axy \end{cases}$$ "a" est un réel $\neq 0$

1°/ Déterminons "a" pour que $\vec{F}$ soit conservatrice.

* Si $\vec{F}$ dérive d'un potentiel $E_p(x,y)$ alors :

$$\vec{rot}\,\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2+2a^2y^2 & 2axy & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} 0\,\vec{i} \\ 0\,\vec{j} \\ (-4a^2+2a)y\,\vec{k} = 0\,\vec{k} \end{cases}$$

D'où :

$$-4a^2 + 2a = 0 \Rightarrow \boxed{\cancel{a = 0}} \text{ impossible} \quad \text{et} \quad \boxed{a = \frac{1}{2}} \text{ ou}$$

On aura : $$\boxed{\vec{F}\begin{cases} F_x = 3x^2 + \frac{y^2}{2} \\ F_y = xy \end{cases}}$$

2°/ Déterminons $E_p(x,y)$.

$$\vec{F} = -\vec{grad}\,E_p(x,y) \Rightarrow \vec{F}\begin{cases} 3x^2 + y^2/2 = -\frac{\partial E_p(x,y)}{\partial x} & (1) \\ xy = -\frac{\partial E_p(x,y)}{\partial y} & (2) \end{cases}$$

De la relation (1), on tire que :

$$E_p(x,y) = \int\left(-3x^2 - y^2/2\right)\partial x = -x^3 - x\frac{y^2}{2} + C(y)$$

On remplace dans (2) :

$$xy = -\frac{\partial}{\partial y}\left[-x^3 - \frac{xy^2}{2} + C(y)\right] = 0 + xy - \frac{\partial C(y)}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C(y)}{\partial y} = 0 \Rightarrow C(y) = c^{te} \Rightarrow \boxed{E_p(x,y) = -x^3 - \frac{xy^2}{2} + c^{te}}$$

3) Pour $a = \frac{1}{2}$; On me demande de calculer $W_A^B(\vec{F})$ suivant 2 chemins différents. $\left[A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ et } B\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \right]$

C'est un piège, car $\vec{F}$ est conservatrice et $W_A^B(\vec{F}) = c^{te}$ quelque soit le chemin suivi. On écrira simplement que :

$$W_A^B(\vec{F}) = -\Delta E_p(x,y)\Big]_A^B = Ep_A(x,y) - Ep_B(x,y)$$

avec $E_p(x,y) = -x^3 - \frac{xy}{2} + c^{te}$ (question 2)

D'où : $$W_A^B(\vec{F}) = \left(-1 - \frac{1\times 0}{2} + c^{te}\right) - \left(-2^3 - \frac{2\times 1}{2} + c^{te}\right)$$

$$\boxed{\cancel{W_A^B(\vec{F}) = -1 + 9 = 8\,J}}$$ $\forall$ le chemin.

Exercice N°3

$\vec{F}\begin{cases} x^2+y^2 \\ xz \\ x.y \end{cases}$; $\vec{dl}\begin{cases} dx \\ dy \\ dz \end{cases}$; On me demande $W_0^M(\vec{F})$

a) suivant le chemin brisé OM_1M_2M ; $M_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $M_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$W_0^M(\vec{F}) = \int_0^M \vec{F}.\vec{dl} = \int_0^M (x^2+y^2)dx + xz\,dy + x.y\,dz$$

Sachant que : $W_0^M = W_0^{M_1} + W_{M_1}^{M_2} + W_{M_2}^M$

et qu'entre O et M_1 : $\begin{cases} x \text{ varie de } 0 \rightarrow 1 \text{ et } dx \; \exists \\ y = 0 = c^{te} \text{ et } dy = 0 \\ z = 0 = c^{te} \text{ et } dz = 0 \end{cases}$

D'où : $$W_0^{M_1}(F) = \int_0^{M_1} (x^2+y^2)dx + xz\,dy + xy\,dz = \int_0^1 x^2 dx = \boxed{\frac{1}{3}\,J}$$

entre M_1 et M_2 : $\begin{cases} x = 1 = cte \text{ et } dx = 0 \\ y \text{ varie de } 0 \to 1 \text{ et } dy \exists \\ z = 0 = cte \text{ et } dz = 0 \end{cases}$

D'où : $W_{M_1}^{M_2} = \int_{M_1}^{M_2} (x^2+y^2)\,dx + xz\,dy + xy\,dz = \int 0\,dy = \boxed{0\,J}$

entre M_2 et M : $\begin{cases} x = 1 = cte \text{ et } dx = 0 \\ y = 1 = cte \text{ et } dy = 0 \\ z \text{ varie } 0 \to 1 \text{ et } dz \exists \end{cases}$

D'où : $W_{M_2}^{M}(\vec{F}) = \int_{M_2}^{M} (x^2+y^2)\,dx + xz\,dy + xy\,dz = \int_0^1 dz = \boxed{1\,J}$

On aura finalement : $W_0^M = W_0^{M_1} + W_{M_1}^{M_2} + W_{M_2}^{M} = \boxed{\frac{4}{3}\,J}$

b) $W_0^M(\vec{F})$? suivant la courbe (C) / $x = t$, $y = t^2$, $z = t$

$x = t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 1 \Rightarrow dx = dt$

$y = t^2 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2t \Rightarrow dy = 2t.dt$

$z = t \Rightarrow \frac{dz}{dt} = 1 \Rightarrow dz = dt$

$W_0^M(\vec{F}) = \int_0^M (x^2+y^2)\,dx + xz\,dy + xy\,dz$

en remplaçant on aura :

$$W_0^M(\vec{F}) = \int (t^2+t^4)\,dt + t.t.2t\,dt + t.t^2.dt$$

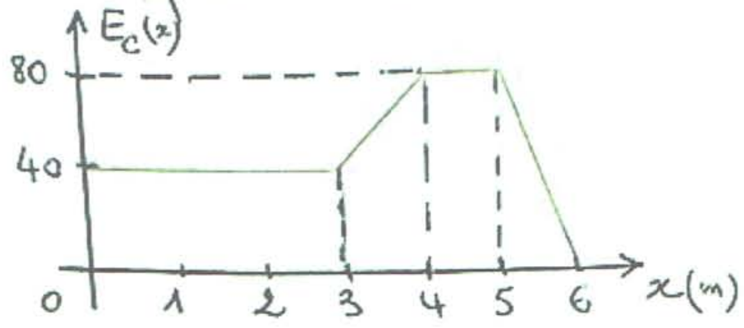
$$W_0^M(\vec{F}) = \int_0^1 (t^4+3t^3+t^2)\,dt = \left[\frac{t^5}{5} + 3\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{3}{4} + \frac{1}{3}$$

$$\boxed{W_0^M(\vec{F}) = \frac{77}{60}\,J}$$

$W_0^A(\vec{F}) \neq cte$, $\vec{F}$ n'est pas conservatrice

Exercice N°4

Un corps de masse m=1 Kg, se déplace sur l'axe des x, sous l'effet d'une force $\vec{F}$ conservatrice. On me donne $E_c(x)$.



1°/ Si $E_T(x=0) = E_{T_0} = 100\,J$

On me demande E_{p_0} ?

$$E_{T_0} = E_{p_0} + E_{c_0}$$

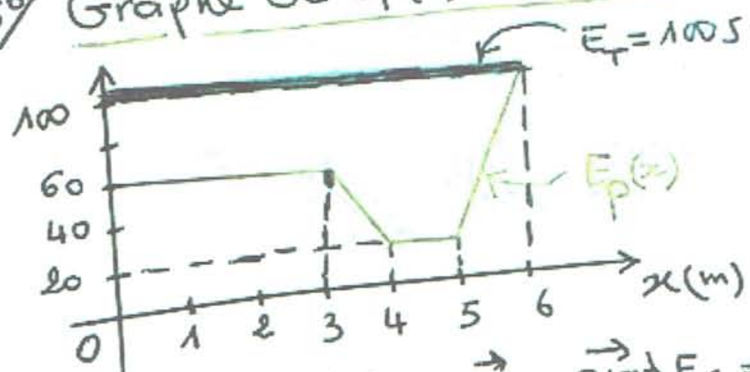
$$100\,J = E_{p_0} + 40\,J \Rightarrow \boxed{E_{p_0} = 60\,J}$$

2°/ $W_{x=0}^{x=6}(\vec{F})$? : $W_{x=0}^{x=6}(\vec{F}) = -\Delta E_p\Big]_{x=0}^{x=6} = E_{p_0} - E_{p_6}$

avec : $E_{T_6} = E_{p_6} + E_{c_6} \Rightarrow 100 = E_{p_6} + 0 \Rightarrow E_{p_6} = 100\,J$

D'où : $\boxed{W_{x=0}^{x=6}(\vec{F}) = 60 - 100 = -40\,J}$

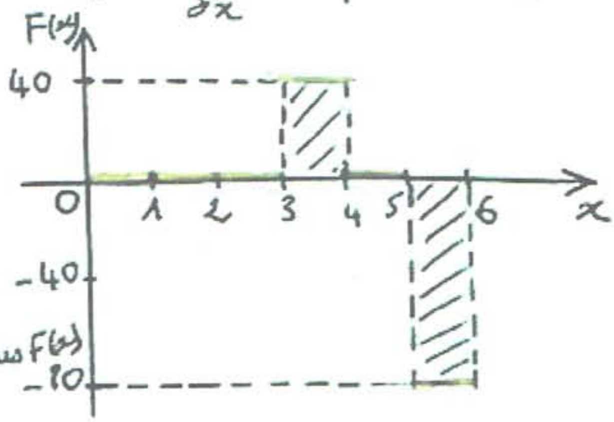
3°/ Graphe de $E_p(x)$ et $E_T(x)$.



$$E_p(x) = E_T - E_c(x)$$

4°/ Graphe de $F(x)$. $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_p \Rightarrow F(x) = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = -$ pente de $E_p(x)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,3] \\ 40 & x \in [3,4] \\ 0 & x \in [4,5] \\ -80 & x \in [5,6] \end{cases}$$



Retrouvons la valeur de $W_{x=0}^{x=6}(\vec{F})$.

$$W_{x=0}^{x=6}(\vec{F}) = \int \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_0^6 F(x)\,dx = \sum \text{surfaces sous } F(x)$$

$$W_{x=0}^{x=6}(\vec{F}) = 40 - 80 = \boxed{-40\,J}$$

	Etude du mouvement en coordonnées cartésiennes $x = x(t)$ et $y = y(t)$ sont connues	Etude du mouvement en coordonnées polaires $r = r(t)$ et $\theta = \theta(t)$ sont connues
Vecteur position:	$\overrightarrow{OM} = x(t).\vec{i} + y(t).\vec{j}$	$\overrightarrow{OM} = r(t).\vec{\mu_r}$
Vecteur : vitesse	$\vec{V} = V_x.\vec{i} + V_y.\vec{j}$ avec : $\vec{V} \begin{vmatrix} V_x = \dfrac{dx}{dt} \\ V_y = \dfrac{dy}{dt} \end{vmatrix}$ module de V : $\lvert\vec{V}\rvert = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2}$	$\vec{V} = V_r.\vec{\mu_r} + V_\theta.\vec{\mu_\theta}$ avec : $\vec{V} \begin{vmatrix} V_r = \dfrac{dr}{dt} \\ V_\theta = r.\dfrac{d\theta}{dt} \end{vmatrix}$ module de V : $\lvert\vec{V}\rvert = \sqrt{(V_r)^2 + (V_\theta)^2}$
Vecteur accélération :	$\vec{a} = a_x.\vec{i} + a_y.\vec{j}$ avec : $\vec{a} \begin{vmatrix} a_x = \dfrac{dV_x}{dt} \\ a_y = \dfrac{dV_y}{dt} \end{vmatrix}$ module de a : $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}$	$\vec{a} = a_r.\vec{\mu_r} + a_\theta.\vec{\mu_\theta}$ avec : $\vec{a} \begin{vmatrix} a_r = \dfrac{d^2r}{dt^2} - r.\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ a_\theta = r.\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + 2\cdot\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\theta}{dt} \end{vmatrix}$ module de a : $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{(a_r)^2 + (a_\theta)^2}$