République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A.MIRA-BEJAIA

Faculté de Technologie
Département de Technologie

Eléments d'analyse et d'algèbre

Polycopié de cours

Rédigé par

Mr RAHMANI Samir

Année Universitaire : 2015/2016

Table des matières

Introduction

Vous commencez des études scientifiques. Ce polycopié vous est destiné.
Son objectif est double : consolider les bases mathématiques acquises au lycée, et vous familiariser avec les notions plus délicates que vous allez aborder et les méthodes que vous devrez acquérir.**Vous pourrez l'utiliser de manière régulière pour consolider vos acquis**. Le présent cours ne couvre qu'une partie des modules Maths 1 & 2 destinés aux étudiants de la première année du socle commun Technologie.

Ce volume se compose de six chapitres. Chaque chapitre remet en place les bases indispensables pour aborder des études scientifiques, et introduit quelques notions nouvelles, qui seront pour la plupart traitées en cours de cette année.

Il ne me reste plus qu'à vous féliciter de votre choix pour des études scientifiques et à vous souhaiter de les mener avec succès.

L'auteur.

1

Ensembles, Relations et Applications

1.1 Ensembles

Un ensemble est une collection d'objets satisfaisant une même propriété, chaque objet est un élément de l'ensemble. On peut citer comme exemples :
l'ensemble des points d'un plan ; l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, ...

1.1.1 Généralités.

Soient E et F deux ensembles. On note :
1. Appartenance : $x \in E$: veut dire que l'élément x appartient à E. La négation de cette relation est $x \notin E$.
On a : $x \neq \{x\}$.
2. Inclusion : $E \subset F$ (ou $F \supset E$) : E est inclus dans F si tout élément de E est un élément de F. Sa négation est $E \not\subset F$.
On dit aussi que E est une partie de F ou que E est un sous-ensemble de F.
3. Egalité : $(E = F) \Longleftrightarrow (E \subset F$ et $F \subset E)$.

4. Ensemble vide : est un ensemble sans élément, noté .
E et sont parmi les parties de E.
5. Ensembles disjoints : E et F sont dits disjoints si $E \cap F = $.
6. Cardinal de E : est le nombre d'éléments de E, on le note Card(E).
7. Complémentaire : Soit $E \subset F$. $C_F^E = F - E = \{x/\ x \in F\ et\ x \notin E\}$.

1.1.2 Opérations sur les ensembles.

Soit $A \subset E$, $B \subset E$. On a :
a) l'intersection : $A \cap B = \{x \in E/\ x \in A\ et\ x \in B\}$.
b) la réunion : $A \cup B = \{x \in E/\ x \in A\ ou\ x \in B\}$.
c) l'inclusion : $A \subset B \Longleftrightarrow (\forall x \in E,\ x \in A \Longrightarrow x \in B)$.
d) l'égalité : $A = B \Longleftrightarrow (\forall x \in E,\ x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$.
Ces définitions s'étendent à une famille $(E_i)_{i\in I}$ de E, on a alors :
$\bigcap\limits_{i\in I} E_i = \{x \in E/\ \forall i \in I,\ x \in E_i\}$.
$\bigcup\limits_{i\in I} E_i = \{x \in E/\ \exists i \in I,\ x \in E_i\}$.

Propriétés :

Soit $A \subset E$, $B \subset E$ et $C \subset E$. On a :
a) commutativité : $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$.
b) associativité : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$.
c) distributivité : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$A \cap A = A$, $A \cup A = A$, $A \cap C_E^A = $, $A \cup C_E^A = E$.
$C_E^{A\cup B} = C_E^A \cap C_E^B$, $C_E^{A\cap B} = C_E^A \cup C_E^B$, $A \subset B \Longleftrightarrow C_E^B \subset C_E^A$, $C_E(C_E^A) = A$.
$\subset A \subset E$, $\cap A = $, $\cup A = A$, $E \cap A = A$, $E \cup A = E$.

1.1.3 Ensemble produit (*Produit cartésien*).

$E \times F = \{(x, y)/\ x \in E\ et\ y \in F\}$.
Par définition, on a :
$(x, y) = (x', y') \Longleftrightarrow (x = x'\ et\ y = y')$.

$(x, y) \neq (y, x) \Longleftrightarrow x \neq y.$

$\prod\limits_{k=1}^{n} E_k = \{(x_1, \cdots, x_n)/\ x_k \in E_k,\ k = 1, \cdots, n\}.$

-Les ensembles $E \times E$, $E \times E \times E$, ... sont notés E^2, E^3, ...

-La diagonale de $E \times E$ est l'ensemble des couples (x, x) où $x \in E$.

Propriétés :

1. $(A' \subset A\ et\ B' \subset B) \Longrightarrow (A' \times B' \subset A \times B)$.

2. $(A \times B \neq\ ) \Longleftrightarrow (A \neq\ \ et\ B \neq\ )$.

3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

4. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

5. $(C \neq\ \ et\ A \times C = B \times C) \Longrightarrow A = B$.

Preuve :

1. Soit $(x, y) \in A' \times B' \Longleftrightarrow (x \in A'\ et\ y \in B')$.

Or, $(A' \subset A\ et\ B' \subset B) \Longrightarrow (x \in A\ et\ y \in B) \Longrightarrow (x, y) \in A \times B$.

d'où $A' \times B' \subset A \times B$.

Le reste de la preuve : Exercice.

1.1.4 Partition d'un ensemble.

Une partition d'un ensemble E est une famille $(E_i)_{i \in I}$ de parties de E telles que : $\bigcup\limits_{i \in I} E_i = E\ \ et\ \ E_i \cap E_j = \ ,\ \forall i \neq j.$

Pour toute partie $A \subset E$, A et C_E^A forment une partition de E.

1.1.5 Ensemble des parties de E.

Dans l'ensemble des parties de E, on compte l'ensemble E et et toutes les autres parties de E, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Ainsi, on a : $A \subset E \Longleftrightarrow A \in \mathcal{P}(E)$.

$E \in \mathcal{P}(E)$ quelque soit E.

$\mathcal{P}(E) \neq$ même si $E =$ $(\mathcal{P}(E) = \{\})$.

$Card(\mathcal{P}(E)) = 2^{Card(E)}$.

a) Exemple : $E = \{1, 3, 5\}$, $\mathcal{P}(E) = \{, E, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}\}$.

$Card(\mathcal{P}(E)) = 2^3 = 8$.

1.2 Relations

1.2.1 Relations dans un ensemble.

On définit une relation binaire sur un ensemble E si l'on se donne une partie $\mathcal{R}$ de $E \times E$. Lorsqu'un couple $(x, y) \in E \times E \in \mathcal{R}$, on dira que x et y sont liés par la relation $\mathcal{R}$.

On conviendra de noter $x\mathcal{R}y$ la relation $x \in E$, $y \in E$ et $(x, y) \in \mathcal{R}$.

On va étudier deux types de relations particulièrement importantes, la relation d'équivalence et la relation d'ordre.

1.2.2 Relation d'équivalence.

Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est dite relation d'équivalence si elle est :

a) réflexive : $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x.$

b) symétrique : $\forall x, y \in E,\ x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x.$

c) transitive : $\forall x, y, z \in E,\ (x\mathcal{R}y\ \ et\ \ y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z.$

On écrit : $x \equiv y(mod\ \mathcal{R})$.

Exemple : Soit $n \in \mathbb{Z}^*$. Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow (a - b)$ est divisible par n.

ou bien $a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{Z}/\ a - b = kn.$

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. En effet :

a) $\mathcal{R}$ **réflexive** $\Longleftrightarrow \forall a \in \mathbb{Z},\ a\mathcal{R}a$?.

Soit $a \in \mathbb{Z}$: $a - a = 0.n \Longrightarrow (\exists\ k = 0 \in \mathbb{Z}/\ a - a = kn) \Longrightarrow a\mathcal{R}a \Longrightarrow \mathcal{R}$ réflexive.

b) $\mathcal{R}$ **symétrique** $\Longleftrightarrow \forall a, b \in \mathbb{Z},\ a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$?.

Soient $a, b \in \mathbb{Z} : a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow (\exists\ k \in \mathbb{Z}/\ a-b = kn) \Longrightarrow (\exists\ k' = -k \in \mathbb{Z}/\ b-a = k'n) \Longrightarrow b\mathcal{R}a.$

$\Longrightarrow \mathcal{R}$ symétrique.

c) $\mathcal{R}$ **transitive** $\Longleftrightarrow \forall a, b, c \in \mathbb{Z},\ (a\mathcal{R}b\ \ et\ \ b\mathcal{R}c) \Longrightarrow a\mathcal{R}c$?.

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$: $a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow \exists\ k' \in \mathbb{Z}/\ a - b = k'n\ \ ...\ \ (1)$

et $b\mathcal{R}c \Longleftrightarrow \exists\ k'' \in \mathbb{Z}/\ b - c = k''n\ \ ...\ \ (2)$

(1)+(2)$\Longrightarrow \exists\ k = (k' + k'') \in \mathbb{Z}/\ a - c = kn.$

$\Longrightarrow a\mathcal{R}c \Longrightarrow \mathcal{R}$ transitive.

Conclusion : $\mathcal{R}$ est donc une relation d'équivalence.

1.2.3 Classe d'équivalence.

On appelle classe d'équivalence d'un élément $x \in E$ et on note $(\dot{x}, \overline{x}, C_x)$, l'ensemble de tous les éléments qui sont en relation avec x suivant $\mathcal{R}$.

On écrit : $\overline{x} = \{y \in E/\ y\mathcal{R}x\} \neq \quad car \quad x \in \overline{x}$.

Théorème : Deux classes d'équivalence sont disjointes ou confondues.

Corollaire : L'ensemble des classes d'équivalence forme une partition de E.

1.2.4 Ensemble quotient.

$E/\mathcal{R} = \{\overline{x},\ x \in E\}$= l'ensemble des classes d'équivalence de E suivant $\mathcal{R}$ est appelé ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$.

Exemple : $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x = y \quad (\mathcal{R}$ relation d'équivalence sur $E)$.

$x \in E,\ \overline{x} = \{y \in E/\ y\mathcal{R}x\} = \{y \in E/\ y = x\} = \{x\}$.

$\overline{x} = \{x\}, \quad E/\mathcal{R} = \{\overline{x},\ x \in E\} = \{\{x\},\ x \in E\}$.

Surjection canonique de E sur $E/\mathcal{R}$:

On considère l'application $s : E \longrightarrow E/\mathcal{R},\ x \longmapsto s(x) = \overline{x}$.

On a s est surjective par définition de $E/\mathcal{R}$.

Soit $y \in E/\mathcal{R} \Longrightarrow \exists x \in E/\ y = \overline{x}$: appelé surjection canonique de E sur $E/\mathcal{R}$.

1.2.5 Relation d'ordre.

Une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble E est dite relation d'ordre si elle est :

a) réflexive : $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$.

b) anti-symétrique : $\forall x, y \in E,\ (x\mathcal{R}y \quad et \quad y\mathcal{R}x) \Longrightarrow x = y$.

c) transitive : $\forall x, y, z \in E,\ (x\mathcal{R}y \quad et \quad y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z$.

1.2.6 Ordre total.

On dit qu'une relation d'ordre $\mathcal{R}$ définie sur E, un ordre total si :

$(\forall x, y \in E),\ x\mathcal{R}y \quad$ ou $\quad y\mathcal{R}x \quad [x$ et y sont comparables].

On dit aussi que E est totalement ordonné par $\mathcal{R}$ ou possède la structure d'ordre total.

1.2.7 Ordre partiel.

On dit qu'une relation d'ordre $\mathcal{R}$ définie sur E, un ordre partiel si :
$(\exists\ x, y \in E)$, $x \not\mathcal{R} y$ et $y \not\mathcal{R} x$.
On dit que E est partiellement ordonné par $\mathcal{R}$.
Exemples : (1) $E = \mathbb{Q}$, $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x \leq y$: $\mathcal{R}$ définie un ordre total sur $\mathbb{Q}$.
(2) $E = \mathbb{N}^*$, $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x/y$ (x divise y) : $\mathcal{R}$ définie un ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.
Car $\exists\ 2, 5 \in \mathbb{N}^*$, $2 \not\mathcal{R} 5$ et $5 \not\mathcal{R} 2$.
(3) Sur $\mathcal{P}(E)$, $X\mathcal{R}Y \Longleftrightarrow X \subset Y$: $\mathcal{R}$ définie un ordre partiel sur $\mathcal{P}(E)$.
Soit $E = \{a, b, c\}$, $X = \{a, b\}$, $Y = \{b, c\}$.
Donc $\exists\ X, Y \in \mathcal{P}(E)$, $X \not\subseteq Y$ et $Y \not\subseteq X$.

1.3 Applications

1.3.1 Définitions.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$ une fonction numérique, définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.
f est une application de D dans $\mathbb{R}$: à tout réel x de D, elle associe un réel unique $y = f(x)$.
y est l'image de x par f ; x est un antécédent de y par f.
Plus généralement : Soit E et F deux ensembles. Une application $f : E \longrightarrow F$ associe à tout élément $x \in E$ (ens. de départ) une image unique $y = f(x) \in F$ (ens. d'arrivée).
L'ensemble image $f(E)$ est une partie de F, mais en général $f(E) \neq F$.
Exemples : L'application identique $I_E : E \longrightarrow E$, $x \longmapsto I_E(x) = x$.
Restriction de f à $A \subset E$: Soit $f : E \longrightarrow F$ et $A \subset E$, l'application $f/A : A \longrightarrow F$, $x \longmapsto f/A(x)$ s'appelle la restriction de f à A.
Prolongement : Une application est toujours un prolongement de chacune de ses restrictions.
$(\forall x \in A,\ f/A(x) = f(x))$. f est le prolongement sur E de f/A.
Exemple :

$$\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ , & g : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = \sin x & x \longmapsto g(x) = \sin x \end{array}$$

On a : g est la restriction de f à la partie $[-\pi/2, \pi/2]$ ou f est le prolongement de g sur $\mathbb{R}$.
On écrit : $g = f/[-\pi/2, \pi/2]$.
Graphe de $f : E \longrightarrow F$: noté Γ défini par :
$\Gamma = \{(x, f(x))/ \ x \in E\} = \{(x, y) \in E \times F/ \ y = f(x)\}$.

1.3.2 Injection, Surjection, Bijection.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application de E dans F.
1. Injection : f est injective si tout élément de F est l'image par f d'au plus un élément de E.
f est injective $\Longleftrightarrow \forall \ x, x' \in E, \ x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$.
On peut utiliser la négation logique :
f est injective $\Longleftrightarrow \forall \ x, x' \in E, \ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$.
2.Surjection : f est surjective si tout élément de F est l'image par f d'au moins un élément de E.
f est surjective $\Longleftrightarrow \forall \ y \in F, \ \exists \ x \in E/ \ y = f(x)$.
Conséquence : f est surjective $\Longleftrightarrow f(E) = F$.
3. Bijection : f est bijective $\Longleftrightarrow f$ est à la fois injective et surjective.
On dit que f est bijective si tout élément de F admet un unique élément dans E par f.
f est bijective $\Longleftrightarrow \forall \ y \in F, \ \exists\,! \ x \in E/ \ y = f(x)$.
($\exists$! : veut dire "il existe un unique").
Remarque : Si $f : E \longrightarrow F$ est bijective, on dit parfois que f est un isomorphisme et que E et F sont isomorphes.
Exemples : (a) Soit $A \subset E$, l'injection canonique $j : A \longrightarrow E, \ x \longmapsto j(x) = x$ est injective.
(b) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+, \ x \longmapsto f_1(x) = x^2$ n'est pas injective car $f_1(-2) = f_1(2)$, mais elle est surjective.
(c) $f_2 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \longmapsto f_2(x) = x^2$ n'est pas surjective car (-2) n'a pas d'antécédent, mais elle est injective.
(d) $f_3 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \ x \longmapsto f_3(x) = x^2$ est bijective car tout réel $y \geq 0$ admet un unique antécédent $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}_+$.

Sa bijection réciproque est $f_3^{-1} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \longmapsto f_3^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 :\ y = x^2 \Longleftrightarrow x = \sqrt{y}$.

1.3.3 Application composée.

Soient $f : E \longrightarrow F,\ \ g : F \longrightarrow G$. On appelle application composée de g et f, l'application $gof : E \longrightarrow G$ définie par : $(gof)(x) = g[f(x)],\ \forall\, x \in E$.
Exemple : Soit

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+\ , & g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [-1, 1] \\ x \longmapsto f(x) = x^2 & x \longmapsto g(x) = \sin x. \end{array}$$

On a : $gof : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1],\ x \longmapsto (gof)(x) = g[f(x)] = g(x^2) = \sin x^2$.

Propriétés :
(1) $(fog)oh = fo(goh) = fogoh$: L'opération "composition d'applications" est associative.
(2) En général $(gof) \neq (fog)$: non commutative.
(3) f et g injectives $\Longrightarrow (fog)$ est injective.
(4) f et g surjectives $\Longrightarrow (fog)$ est surjective.
(5) f et g bijectives $\Longrightarrow (fog)$ est bijective.

1.3.4 Application réciproque.

Soit $f : E \longrightarrow F$ bijective. Notons $f(x) = y \Longleftrightarrow \exists\ !\ x \in E/\ x = f^{-1}(y)$. L'application $f^{-1} : F \longrightarrow E,\ y \longmapsto x = f^{-1}(y)$ s'appelle application réciproque (ou inverse) de f.
f^{-1} est aussi bijective et on a :.
$\forall\, x \in E,\ f^{-1}of(x) = x$ et $\forall\, y \in F,\ fof^{-1}(y) = y$.
On écrit :
$f^{-1}of = I_E$ (l'application identique dans E).
$fof^{-1} = I_F$ (l'application identique dans F).
Si $E = F,\ f^{-1}of = fof^{-1} = I_E$.
Inversement, si $f : E \longrightarrow F,\ g : F \longrightarrow E$ telles que : $gof = I_E$ et $fog = I_F$, alors f et g sont bijectives et on a : $g = f^{-1}$.

Corollaire : (a) Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications bijectives, alors l'application composée gof est aussi bijective et que : $(g\ o\ f)^{-1} = f^{-1}o\ g^{-1}$.
(b) Soit $A \subset E$, f est injective $\Longrightarrow A = f^{-1}\left(f(A)\right)$.
(c) Soit $B \subset F$, f est surjective $\Longrightarrow B = f\left(f^{-1}(B)\right)$.

Image directe de $A \subset E$.

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $A \subset E$.
$f(A) = \{f(x)/\ x \in A\} = \{y \in F/\ \exists\ x \in A\ \ et\ \ y = f(x)\}$.

Image réciproque de $B \subset F$.

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $B \subset F$.
$f^{-1}(B) = \{x \in E/\ f(x) \in B\}$.
Remarques : (1) $f(A) = \ \Longleftrightarrow A = .$
(2) Si $y \in F$, on peut parler de $f^{-1}\left(\{y\}\right)$, mais c'est une partie de E et non un élément (partie pouvant être vide si f non surjctive, ou bien pouvant contenir plus d'un élément si f non injective).
(3) $f^{-1}(B)$ peut être vide sans que B soit vide (on prend : $B \subset F - f(E)$).
Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = \sin x$.
$B = \{2\}$; $f^{-1}\left(\{2\}\right) = \{x \in \mathbb{R}/\ \sin x = 2\} = .$
$B = \{1/2\}$; $f^{-1}\left(\{1/2\}\right) = \{x \in \mathbb{R}/\ \sin x = 1/2\} = \{(\pi/6)+2k\pi,\ (5\pi/6)+2k\pi\ /\ k \in \mathbb{Z}\}$.
Proposition : Soient $A_1, A_2 \subset E$ et $B_1, B_2 \subset F$. On a :

$$\begin{array}{rl}
(1)\ A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2) & (1')\ B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2) \\
(2)\ f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) & (2')\ f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \\
(3)\ f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2) & (3')\ f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \\
(4)\ A_1 \subset f^{-1}\left(f(A_1)\right) & (4')\ f\left(f^{-1}(B_1)\right) \subset B_1
\end{array}$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
(1)\ \text{Soit } y \in f(A_1) &\Longrightarrow \exists x \in A_1/\ y = f(x) \\
&\Longrightarrow \exists x \in A_2/\ y = f(x)\ \ (\text{car } A_1 \subset A_2) \\
&\Longrightarrow y \in f(A_2)
\end{aligned}$$

D'où $f(A_1) \subset f(A_2)$.
La preuve des autes propriétés est laissée en exercice.

1.4 Divers.

Rappel :
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}/ \ a < x < b\}$
$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}/ \ a \leq x\}$
$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}/ \ a < x\}$
$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}/ \ x \leq b\}$
$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}/ \ x < b\}$

Théorème : L'ensemble $\mathbb{R}$ est Archimédien, c'est-à-dire :
$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y > 0, \ \exists \ n \in \mathbb{N}/ \ x < ny.$

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ [x < y \Longrightarrow \exists \ q \in \mathbb{Q}/ \ x < q < y].$

On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Partie entière d'un nombre réel.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $x_0 \in \mathbb{Z}$: $x_0 \leq x < x_0 + 1$.

Cet entier relatif x_0 est appelé partie entière de x et est noté $E(x)$ ou $[x]$.

Exemple : $E(27/12) = 2$, $E(-\pi) = -4$.

Propriétés : $\forall x \in \mathbb{R}, \ E(x) \leq x < E(x) + 1$, $x - 1 < E(x) \leq x$.

1.5 Borne inférieure et borne supérieure d'une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Définition (Minorant, Majorant).

Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$.

(1) $X \subset \mathbb{R}$ est une partie minorée $\Longleftrightarrow \exists \ m \in \mathbb{R}/ \ \forall x \in X : \ m \leq x$.

Dans ce cas, on dit que m est un minorant de X.

(2) $X \subset \mathbb{R}$ est une partie majorée $\Longleftrightarrow \exists \ M \in \mathbb{R}/ \ \forall x \in X : \ x \leq M$.

Dans ce cas, on dit que M est un majorant de X.

(3) Si la partie $X \subset \mathbb{R}$ est à la fois minorée et majorée, alors X est dite "bornée".

Remarque :

(i) Si X est minorée par m et $m \in X$, alors m est appelé le plus petit élément de X (noté : $\min(X)$).

(ii) Si X est majorée par M et $M \in X$, alors M est appelé le plus grand élément de X (noté : $\max(X)$).

Définition (Bornes inférieure et supérieure).

(1) On appelle borne inférieure de X, notée : $Inf(X)$, le plus grand minorant (s'il existe) de X.

- Si X n'est pas minorée, on écrit $Inf(X) = -\infty$.

(2) On appelle borne supérieure de X, notée : $Sup(X)$, le plus petit majorant (s'il existe) de X.

- Si X n'est pas majorée, on écrit $Sup(X) = +\infty$.

(3) Si une borne existe, alors elle est unique.

Exemple : (1) $X = [0, 1[$ donc $Inf(X) = 0$, $Sup(X) = 1$, $\min(X) = 0$ et $\max(X)$ n'existe pas.

(2) $(\mathcal{P}(E), \subset)$, $\min((\mathcal{P}(E)) =$ et $\max((\mathcal{P}(E)) = E$.

(3) Dans $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ ordonnés par "$\leq$",

$Inf(]a, b[) = Inf([a, b[) = Inf(]a, b]) = Inf([a, b]) = a$.

$Sup(]a, b[) = Sup([a, b[) = Sup(]a, b]) = Sup([a, b]) = b$.

Proposition :

Toute partie non vide et minorée (resp. majorée) $X \subset \mathbb{R}$, admet une borne inférieure (resp. supérieure).

Proposition(Caractérisation des bornes).

Soit $m, M \in \mathbb{R}$ et X une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$.

$$m = Inf(X) \iff \begin{cases} \forall x \in X,\ m \leq x \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\ x \in X /\ m \leq x < m + \varepsilon \end{cases}$$

$$M = Sup(X) \iff \begin{cases} \forall x \in X,\ x \leq M \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\ x \in X /\ M - \varepsilon < x \leq M \end{cases}$$

Exemple : Soit $X = \{3 + \frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R}$.
Désignons les éléments de X par x_n où $x_n = 3 + \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Or on a : $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow 3 < 3 + \frac{1}{n} \leq 4, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
$\Longleftrightarrow 3 < x_n \leq 4, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
$\Longrightarrow X$ est bornée.
$Sup(X) = \max(X) = 4 \ \ (4 \in X)$.
$Inf(X) = 3$; en effet, 3 est un minorant de X, de plus il est le plus grand minorant de X, car pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$x_n = 3 + \frac{1}{n} < 3 + \varepsilon$$

donc $1/n < \varepsilon \Longrightarrow n > 1/\varepsilon$.
Il suffit de choisir n le premier entier supérieur à $1/\varepsilon$ (par exemple : $n = E(1/\varepsilon) + 1$).
$(3 \notin X) \Longrightarrow \min(X)$ n'existe pas.

Proposition (Divers).

(1) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a :
$Sup(a, b) = \max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$.
$Inf(a, b) = \min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$.
Indication : utiliser que $\forall \ a, b \in \mathbb{R}$:
$\max(a, b) + \min(a, b) = a + b$ et $\max(a, b) - \min(a, b) = |a - b|$.

(2) Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$. On définit $(-X) = \{-x / \ x \in X\}$.
Si X est bornée, alors $Sup(-X) = -Inf(X)$ et $Inf(-X) = -Sup(X)$.

(3) Soient X_1 et X_2 deux parties non vides de $\mathbb{R}$ avec $X_2 \subset X_1$.
Si X_1 est bornée alors X_2 est bornée, et de plus, $Sup(X_2) \leq Sup(X_1)$ et $Inf(X_1) \leq Inf(X_2)$.

(4) Soient X_1, X_2 deux parties non vides, bornées de $\mathbb{R}$. Alors $X_1 \cup X_2$ est bornée, et on a :
$Inf(X_1 \cup X_2) = Inf\,(Inf(X_1), \ Inf(X_2))$, $Sup(X_1 \cup X_2) = Sup\,(Sup(X_1), \ Sup(X_2))$.

2

Nombres complexes

2.1 Introduction

Dans le corps $(\mathbb{R}, +, \times)$, l'équation $x^2 + a^2 = 0$ n'admet pas de solution, puisque dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des carrés est $\mathbb{R}^+$. Pour résoudre cette équation, il fallait construire un ensemble $\mathbb{C}$ dans lequel même les carrés seraient négatifs. Donc par extension de $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ a été construit, muni des deux lois $+$ et $\times$, il forme un corps commutatif.

2.2 Écriture des nombres complexes

Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrira $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$.
Cette écriture du nombre complexe z est unique et est appelée forme algébrique ou cartésienne de z.

- $x = \mathcal{R}_e(z)$: partie réelle de z.
- $y = \mathcal{I}m(z)$: partie imaginaire de z.
- On a $i^2 = -1$.
- On a donc $\mathbb{C} = \{x + iy \;\text{ où }\; x, y \in \mathbb{R}\}$ et $z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbb{R} \;/\; z = x + iy$.

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux complexes avec $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$. On a

- $z = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ et } y = 0)$.
- $z = z' \Leftrightarrow (x = x' \ \text{ et } \ y = y')$.
- Les lois $+$ et $\times$ sont définies par :
  $z + z' = (x + x') + i(y + y')$ et $z \times z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$.

2.2.1 Conjugués et modules.

Définition.

Soit $z = x + iy$ un complexe avec $x, y \in \mathbb{R}$. On appelle conjugué de z et on note $\overline{z}$ le complexe $\overline{z} = x - iy$.

Propriétés.

$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$:

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\quad \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$, $\quad \overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$.
- $2\mathcal{R}_e(z) = z + \overline{z}$ $\quad$ et $\quad$ $2\mathcal{I}m(z) = z - \overline{z}$.

On dit que $z \mapsto \overline{z}$ est un morphisme d'anneau.

Définition.

Soit $z = x + iy$ un complexe avec $x, y \in \mathbb{R}$. On appelle module de z et on note $|z|$ le nombre réel positif ou nul défini par $|z| = \sqrt{z.\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Propriétés.

$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$:

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$, $\quad |z| \geq 0$, $\quad |z| = |\overline{z}|$, $\quad |z + z'| \leq |z| + |z'|$.
- $\mathcal{R}_e(z) \leq |z|$, $\quad |z.z'| = |z|.|z'|$, $\quad |\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$ avec $z' \neq 0$.
- $|z^{-1}| = |z|^{-1}$, $\quad ||z| - |z'|| \leq |z - z'|$, $\quad z.\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$.
- On a donc que l'inverse d'un complexe $z = x + iy$ est :

$$z^{-1} = \frac{x - iy}{|z|^2}$$

2.3 Le plan complexe

Soit le plan (P) muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
A tout nombre complexe $z = x + iy$, on associe le point M de coordonnées (x, y). Par définition :

- M est l'image de z.
- z est l'affixe du point M.

D'après le théorème de Pythagore, on a $OM^2 = x^2 + y^2$ c'est à dire $OM = |z|$.

2.3.1 Forme trigonométrique d'un nombre complexe.

Définition.

- On appelle argument de z et on note $Arg(z)$ toute mesure (définie à $2k\pi$ près $k \in \mathbb{Z}$) de l'angle $(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{OM})$.
  Notation : On note $Arg(z) \equiv \theta[2\pi]$ ou $Arg(z) \equiv \theta \mod 2\pi$ pour exprimer le fait que $Arg(z) = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Soit $z = x + iy$ un complexe avec $x, y \in \mathbb{R}$. On appelle forme trigonométrique de z la représentation suivante :
  $$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad \text{où} \quad r = |z| \quad \text{et} \quad \theta = Arg(z).$$
  avec $x = |z|\cos\theta \quad \text{et} \quad y = |z|\sin\theta$.
  On note aussi la forme trigonométrique d'un complexe z par $z = [r,\ \theta]$.

Propriétés.

- Sous forme trigonométrique, deux nombres complexes $z = [r,\ \theta]$ et $z' = [r',\ \theta']$ sont égaux si et seulement si $r = r'$ et $\theta = \theta'[2\pi]$.
- Produit et Division.
  $$z.z' = [r,\ \theta].[r',\ \theta'] = [r.r',\ \theta + \theta'] \quad et \quad \forall n \in \mathbb{Z},\ z^n = [r,\ \theta]^n = [r^n,\ n\theta],$$
  $$\frac{z}{z'} = \frac{[r,\ \theta]}{[r',\ \theta']} = \left[\frac{r}{r'},\ \theta - \theta'\right], \quad \frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r},\ -\theta\right].$$

2.4 Notation exponentielle

Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
$\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$.

2.4.1 Propriétés.

- Soient x, y deux réels. On définit $e^{x+iy} = e^x.e^{iy}$
- Soient z et z' deux complexes et $n \in \mathbb{Z}$. On a :

$$e^{z+z'} = e^z.e^{z'} \quad \text{et} \quad e^{nz} = (e^z)^n$$

- Formule de Moivre :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \ (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = e^{in\theta}.$$

- Formules d'Euler :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \ \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad et \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

2.5 Équation du second degré dans $\mathbb{C}$

- Dans le corps $\mathbb{C}$, toute équation de degré n, admet n solutions.
- Soit donc dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b et c complexes ou pas.

$$\Delta = b^2 - 4ac \ , \quad z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2.6 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

1. **Racines carrées d'un nombre complexe.**
   Soit $Z = a + ib$ un complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$. On appelle racines carrées de Z, les solutions z dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^2 = Z$.
   - Méthode de résolution algébrique de $z^2 = Z$.
     Posons $Z = a + ib$ et désignons par $x + iy$ une des racines carrées de Z. On a

$$z^2 = Z \iff (x+iy)^2 = a + ib \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (3) \end{cases}$$

     La résolution de ce système nous donne les racines carrées z de Z.
   - Méthode de résolution trigonométrique de $z^2 = Z$.
     Soit $Z = [r, \ \alpha]$ un complexe.

Le nombre complexe $[\rho,\ \theta]$ est solution de $z^2 = Z \Longleftrightarrow [\rho^2,\ 2\theta] = [r,\ \alpha]$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho^2 = r \\ \\ 2\theta = \alpha[2\pi] \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{r} \\ \\ \theta = \frac{\alpha}{2}[\pi] \end{array} \right.$$

2. **Racines n-ièmes d'un nombre complexe.**
   Soit $Z = [r,\ \alpha]$ un complexe. On appelle racines n-ièmes de Z, les solutions z dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^n = Z \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.
   Posons $z = [\rho,\ \theta]$ une des racines de $z^n = Z$.
   On a : $z^n = Z \Longleftrightarrow [\rho^n,\ n\theta] = [r,\ \alpha]$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho^n = r \\ \\ n\theta = \alpha[2\pi] \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \\ \theta = \frac{\alpha}{n}\left[\frac{2\pi}{n}\right] \end{array} \right.$$

   Conclusion : L'ensemble S des solutions de l'équation $z^n = Z$ est :
   $S = \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$
   avec

$$z_k = \left[\sqrt[n]{r}\ ,\ \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right]\ ,\quad 0 \leq k \leq n-1$$

3. **Racines n-ièmes de l'unité.**
   Les racines n-ièmes de l'unité sont les solutions de l'équation $z^n = 1$. Les solutions de cette équation sont :

$$S' = \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\} \quad avec \quad z_k = \left[1\ ,\ \frac{2k\pi}{n}\right]$$

Exemple : Trouver les 5-racines de $Z = \sqrt{2}(16 - 16i)$.
On a

$$\begin{array}{rcl} Z = \sqrt{2}(16-16i) = \sqrt{2}.16(1-i) & = & \sqrt{2}.16.\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ & = & 32\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ & = & 32\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right) \end{array}$$

$$\Longrightarrow Z = 32\ e^{-i\frac{\pi}{4}} = \left[32,\ -\frac{\pi}{4}\right]$$

Cherchons $z = [\rho,\ \theta]$ tel que $z^5 = Z$.
$z^5 = Z \Longleftrightarrow [\rho^5,\ 5\theta] = \left[32,\ -\frac{\pi}{4}\right] \Longleftrightarrow \rho^5 = 32$ *et* $5\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[5]{32} = 2 \\ \theta = -\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}, \quad 0 \leq k \leq 4. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow z_k = \left[2\ ,\ -\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right] = 2\exp\left\{i\left(-\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right)\right\}\ ,\ 0 \leq k \leq 4$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation $z^5 = Z$ est :

$$S = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\} \quad avec \quad z_k = \left[2\ ,\ -\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right]$$

3

Structures algébriques fondamentales

3.1 Groupes

Soit G un ensemble ($\neq$).
Une loi de composition interne (une LCI) sur G est une application de $G \times G$ dans G.
Notation :
$\star : G \times G \to G;\ (x, y) \mapsto \star(x, y) = x \star y.$
On dit que G est un groupe, noté $(G, \star)$ si la loi $\star$ vérifie :
(a) $\star$ est une LCI sur G si $\forall\ x, y \in G, \quad x \star y \in G.$
(b) La loi $\star$ est associative c'est-à-dire $\forall\ x, y, z \in G,\ x \star (y \star z) = (x \star y) \star z.$
(c) La loi $\star$ admet un élément neutre c'est-à-dire $\exists\ e \in G/\ \forall\ x \in G,\ x \star e = e \star x = x.$
(d) Tout élément est symétrisable c'est-à-dire $\forall\ x \in G,\ \exists\ x' \in G/\ x \star x' = x' \star x = e.$
Si la loi $\star$ est de plus commutative ($\forall\ x, y \in G,\ x \star y = y \star x$), le groupe est dit commutatif ou abélien.

Remarques :
(1) L'élément neutre e est unique, en effet : si e et e' deux éléments neutres, on a :
$e = e \star e' = e'.$

(2) L'élément symétrique x' de $x \in G$ est unique, en effet : soient x' et x'' deux symétriques de x, alors :
$x \star x' = x' \star x = e$ et $x \star x'' = x'' \star x = e$, on a :

$$\begin{aligned} x' \star x \star x'' &= (x' \star x) \star x'' = e \star x'' = x'' \\ &= x' \star (x \star x'') = x' \star e = x'. \end{aligned}$$

Exemples :
- $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien où $+$ est l'addition usuelle.
- $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe où $\times$ est la multiplication usuelle.
- $(\mathbb{Z}, \times)$ et $(\mathbb{R}, \times)$ ne sont pas des groupes.

3.1.1 Sous-groupe de G.

Soit $(G, \star)$ un groupe. Soit $H \subset G$ et $H \neq$.
On dit que H est un sous-groupe de $(G, \star)$ si et seulement si H est un groupe pour la loi $\star$ induite.

Exemples :
- $(\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
- $2\mathbb{Z} = \{2k/\ k \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
- $2\mathbb{Z} + \{1\} = \{2k + 1/\ k \in \mathbb{Z}\}$ n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

Propriétés : Soit $(G, \star)$ un groupe.
(1) pour tous les éléments a et b de G, on a : $(a \star b)^{-1} = b^{-1} \star a^{-1}$.
(2) $\forall\ n, p \in \mathbb{Z},\ \ \forall\ x \in G : x^{n+p} = x^n \star x^p$ et $x^{n \times p} = (x^n)^p$.
(3) En notation additive, cela donne, $\forall\ n, p \in \mathbb{Z},\ \ \forall\ x \in G : (n + p)x = (nx) \star (px)$ et $(n \times p)x = n(px)$.

Théorème :
Soit $(G, .)$ un groupe noté multiplicativement. Soit $H \subset G$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) H est un sous-groupe de G.
(2) $H \neq$, H est stable par la loi de G et $\forall\ x \in H$, on a $x^{-1} \in H$.
(3) $H \neq$ et $\forall\ x, y \in H$, on a $x.y^{-1} \in H$.
Preuve :
(1) $\Rightarrow$ (2) évident
(2) $\Rightarrow$ (3) évident
(3) $\Rightarrow$ (1) Associativité : découle de celle de G.

Elément neutre : $\forall\, x \in H,\ x.x^{-1} \in H \Rightarrow e \in H.$
Symétrique : $\forall\, x \in H,\ e.x^{-1} \in H \Rightarrow x^{-1} \in H.$
Loi de composition interne : $\forall\, x, y \in H$, on a $y^{-1} \in H \Rightarrow x.y = x.(y^{-1})^{-1} \in H.$

Remarques : Soit H un sous-groupe de G.
L'élément neutre de H est le même que celui de G.
Le symétrique d'un élément de H est le même dans H que dans G.
Si la loi de G est une loi notée additivement, on a :
(2') $H \neq$, H est stable par la loi de G et $\forall\, x \in H$, on a $-x \in H$.
(3') $H \neq$, $\forall\, x, y \in H$, on a $x - y \in H$.

Exemple important : Soit G un groupe.
$\{e\}$ et G sont des sous-groupes de G.
Tous les autres sous-groupes sont dits propres.

3.1.2 Homomorphisme de groupes.

Soient $(G, \star)$ et $(G', \triangle)$ deux groupes.
On dit qu'une application f de G dans G' est un homomorphisme (ou morphisme) de groupes si et seulement si :

$$\forall\, x, y \in G : f(x \star y) = f(x) \triangle f(y)$$

et on écrit : $f \in Hom(G, G')$.
Exemple : $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_+^*, \times),\ \ x \mapsto f(x) = \exp(x)$.

Remarques :
(1) Un morphisme transforme l'élément neutre e de G en l'élément neutre e' de G'.
$f(e) = f(e \star e) = f(e) \triangle f(e) = f(e) \triangle e'$, d'où : $f(e) = e'$.

(2) $\forall\, x \in G :\ [f(x)]^{-1} = f(x^{-1})$.
Soit $x \in G,\ x \star x^{-1} = e \Longrightarrow f(x \star x^{-1}) = f(x) \triangle f(x^{-1}) = f(e) = e'$.
d'où : $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$.

(3) $f^{-1}(\{e'\})$ est un sous-groupe de G appelé noyau de f et noté $Kerf$.
$Kerf = \{x \in G /\ f(x) = e'\}$.
$f(G)$ est un sous-groupe de G' appelé image de f et noté Imf.
$f(G) = Imf = \{y \in G' /\ \exists\, x \in G;\ y = f(x)\}$.

(4) Un morphisme d'un ensemble dans lui-même est appelé un endomorphisme.
Un morphisme bijectif est appelé un isomorphisme.

Un endomorphisme bijectif est appelé un automorphisme.

Propriété : Soit G un groupe. Soit $(H_i, i \in I)$ une famille non vide de sous-groupes de G. Alors $\bigcap\limits_{i\in I} H_i$ est un sous-groupe de G.

Preuve :

- $\forall\ i \in I(\neq\ ),\ e \in H_i$ donc $e \in \bigcap\limits_{i\in I} H_i \Rightarrow \bigcap\limits_{i\in I} H_i \neq$.
- Soit $x, y \in \bigcap\limits_{i\in I} H_i,\ \ \forall\ i \in I,\ \ x$ et $y \in H_i$ donc $xy^{-1} \in H_i$. D'où $xy^{-1} \in \bigcap\limits_{i\in I} H_i$.

Remarque : En général, la réunion de 2 sous-groupes n'est pas un sous-groupe.
Par exemple, on a : $2\mathbb{Z}$ et $3\mathbb{Z}$ sont deux sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.
Si $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ était un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, on devrait avoir $2 + 3 \in 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$.

3.2 Anneaux

Soit A un ensemble muni de deux LCI $\star$ et $\perp$.
On dit que $(A, \star, \perp)$ est un anneau si et seulement si :
(i) $(A, \star)$ est un groupe abélien.
(ii) $(A, \perp)$ est un monoïde. C'est-à-dire :
$(A, \perp)$ est unifère ou admet un élément neutre $\exists\ e \in A/\ \forall x \in A,\ \ e\perp x = x\perp e = x$.
et $(A, \perp)$ est associatif $\forall\ x, y, z \in A,\ \ x\perp(y\perp z) = (x\perp y)\perp z$.
(iii) La loi $\perp$ est distributive par rapport à la loi $\star$.
c'est-à-dire distributive à gauche : $\forall\ x, y, z \in A,\ \ x\perp(y \star z) = (x\perp y) \star (x\perp z)$.
et distributive à droite : $\forall\ x, y, z \in A,\ \ (y \star z)\perp x = (y\perp x) \star (z\perp x)$.

Remarques :

- Un anneau n'est jamais vide.
- Généralement la loi donnant la structure de groupe est notée additivement et l'autre est notée multiplicativement.

Exemples :

- $(\mathbb{Z}, +, \times)$ où $+$ et $\times$ sont l'addition usuelle et la multiplication usuelle.
- $(\{0\}, +, \times)$. Cet anneau est appelé un anneau nul.

Notation : Soit $(A, +, \times)$ un anneau.

- L'anneau $(A, +, \times)$ est dit commutatif si la 2-ème loi $\times$ est commutative.
- On note généralement 0 ou 0_A l'élément neutre de $(A, +)$ et 1 ou 1_A l'élément neutre de $(A, \times)$.
- On parlera d'opposé pour le symétrique d'un élément pour la loi $+$.

On note $A^* = A - \{0_A\}$.

Exemples :

• $(\mathbb{Z}, +, \times)$ et $(\{0\}, +, \times)$ sont des anneaux commutatifs.

• Soit $(G, +)$ un groupe abélien.

Soit End(G)=$\{$endomorphismes de $G\}$.

$+$ et $\circ$ étant l'addition et la composition usuelle des fonctions.

(End(G),$+, \circ$) est un anneau qui n'est généralement pas commutatif.

• $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \times)$ que nous verrons plus tard n'est pas non plus commutatif.

Propriétés : Soit $(A, +, \times)$ un anneau.

a. $\forall\, x \in A,\ 0 \times x = x \times 0 = 0.$

b. $\forall\, x, y \in A,\ (-x) \times y = x \times (-y) = -(x \times y).$

c. $\forall\, x, y \in A,\ (-x) \times (-y) = -[x \times (-y)] = -[-(x \times y)] = x \times y.$

d. $\forall\, x \in A,\ (-x)^n = \begin{cases} x^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ -x^n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

Preuve :

a. $\forall\, x \in A,\ 0 \times x = (0 + 0) \times x = (0 \times x) + (0 \times x).$

Donc $0 \times x = 0$. Idem pour l'autre égalité.

Le reste de la preuve (b, c et d) : exercice.

Définition : Soit $(A, +, \times)$ un anneau unifère.

On dit qu'un élément de A est inversible si et seulement si il admet un symétrique par rapport à la loi $\times$.

c'est-à-dire : $x \in A$ et x inversible $\Longleftrightarrow \exists\, x' \in A /\ x \times x' = x' \times x = 1.$

On note $u(A) = \{x \in A /\ x \text{ inversible}\}$: ensemble des unités de A.

Exemples :

• $u(\mathbb{Z}) = \{-1; 1\}$.

• $u(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^*$.

Propriété : Soit $(A, +, \times)$ un anneau unifère.

L'ensemble $u(A)$ des unités est un groupe pour la loi $\times$ de A (loi induite).

Par exemple : $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau dont les éléments inversibles sont -1 et 1 donc $(\{-1; 1\}, \times)$ est un groupe.

Définition : Soit $(A, +, \times)$ un anneau unifère. Soit $a, b \in A^*$.

Si $a \times b = 0$, on dit que a est un diviseur de zéro à gauche et que b est un diviseur de zéro à droite.

Exemples :

• $(E,+,\times)$ où E={ fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$}.

Soient f et g les fonctions de E définies par :

$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{sinon}\end{cases}$ $\qquad$ $g(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

On a $f\times g=0$.

• Dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, on a $\overline{2}\times\overline{3}=\overline{0}$.

Définition : On dit qu'un anneau non nul est intègre si et seulement si il ne possède pas de diviseur de zéro.

Exemples :

• $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau intègre, $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau intègre "+ et $\times$ étant les lois quotients".

• De façon général, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau intègre si p est premier.

Définition : (morphisme d'anneaux)

Soit $(A,+,\times)$ et $(A',+,\times)$ deux anneaux.

On appelle morphisme d'anneaux toute application f de A dans A' qui vérifie :

$\forall\ x,y\in A,\ f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \text{et} \quad f(x\times y)=f(x)\times f(y).$

Par exemple $f:(\mathbb{C},+,\times)\longrightarrow(\mathbb{C},+,\times),\ \ z\longmapsto f(z)=\overline{z}.$

Définition : (sous-anneau)

Soit $(A,+,\times)$ un anneau.

On dit qu'une partie non vide B de A est un sous-anneau de A si et seulement si :

(i) $(B,+)$ est un sous-groupe de A.

(ii) B est stable pour la loi $\times$ c'est-à-dire $\forall x,y\in B,\ x\times y\in B$.

Exemples :

• $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R},+,\times)$.

• $(2\mathbb{Z},+,\times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Z},+,\times)$.

Propriété : Soit $(A,+,\times)$ un anneau. Soit $(B_i, i\in I)$ une famille non vide de sous-anneaux de A. Alors $\bigcap\limits_{i\in I} B_i$ est un sous-anneau de A.

Preuve : - $\forall i\in I$, B_i est un sous-groupe de A donc $\bigcap\limits_{i\in I} B_i$ est un sous-groupe de A.

- stable par multiplication. $x,y\in\bigcap\limits_{i\in I} B_i \Leftrightarrow \forall i\in I, x\in B_i$ et $y\in B_i$.

$\Rightarrow \forall i\in I, x\times y\in B_i \Rightarrow x\times y\in\bigcap\limits_{i\in I} B_i.$

Définition : Soit $(A,+,\times)$ un anneau commutatif et soit I une partie de A.

On dit que I est un idéal de A si et seulement si :
(i) $(I, +)$ est un sous-groupe de A.
(ii) $\forall x \in I,\ \forall a \in A,\ \ a \times x \in I.$

Exemples :
• $(2\mathbb{Z}, +, \times)$ est un idéal de • $(\mathbb{Z}, +, \times)$.
• De façon plus générale, $(p\mathbb{Z}, +, \times)$ est un idéal de $(\mathbb{Z}, +, \times)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
• A et $\{0_A\}$ sont des idéaux de A.
• $(\mathbb{Z}, +, \times)$ n'est pas un idéal de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Propriété : Tout idéal est un sous-anneau.
Soit $(A, +, \times)$ un anneau et soit $(I_j)_{j\in J}$ une famille non vide d'idéaux de A. Alors $\bigcap\limits_{j\in J} I_j$ est un idéal de A.

3.3 Corps

On appelle corps tout anneau unifère tel que tout élément non nul soit inversible.
C'est-à-dire, si $(K, +, \times)$ un anneau unifère, on a : K corps $\Leftrightarrow (K^*, \times)$ est un groupe.
- Si de plus la loi $\times$ est commutative, on dit que le corps est commutatif.
- Toute partie K' d'un corps K qui est elle-même un corps s'appelle un sous-corps de K.

Exemples :
• $(\mathbb{R}, +, \times)$ et $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ sont des corps.
• $(\mathbb{Z}, +, \times)$ n'est pas un corps.

Propriété : Tout corps est intègre.

Preuve : Supposons $ab = 0$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
Si $a \neq 0$, alors a est inversible $\Rightarrow a^{-1}ab = a^{-1}0 \Rightarrow b = 0$ absurde.

4

Suites numériques

4.1 Définitions

On appelle suite numérique (ou suite réelle), toute application u d'une partie I de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels dans l'ensemble $\mathbb{R}$. On note :

$$\begin{aligned} u : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u_n. \end{aligned}$$

n : indice de la suite.
u_n : est appelée terme d'indice n, ou *terme général*, de la suite u, et u_0 en est le *terme initial*.
L'ensemble des termes de la suite est représenté par $\{u_0, u_1, ..., u_n, ...\}$ mais aussi par $(u_n)_{n\geq 0}$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On dira que la suite est finie si l'ensemble I des indices est fini.
Si $I = \mathbb{N}$, la suite est dite infinie dénombrable.
- Soient u et v deux suites de $\mathbb{R}$. On a $u = v \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\, u_n = v_n$.
- On note parfois $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

4.1.1 Suites bornées.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle.
On dit que $(u_n)_n$ est majorée si et seulement si $\exists\ M \in \mathbb{R}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$.
On dit que $(u_n)_n$ est minorée si et seulement si $\exists\ m \in \mathbb{R}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n$.
On dit que la suite $(u_n)_n$ est bornée si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarques :

- $(u_n)_n$ est majorée $\Leftrightarrow$ l'ensemble des nombres u_n admet un majorant dans $\mathbb{R}$.
- $(u_n)_n$ est minorée $\Leftrightarrow$ l'ensemble des nombres u_n admet un minorant.
- Une suite réelle $(u_n)_n$ est bornée si et seulement si $\exists\ M \geq 0\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$.

4.1.2 Suites monotones.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels. On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est :
$\triangleright$ croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$.
$\triangleright$ décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_{n+1}$.
$\triangleright$ monotone si et seulement si elle est croissante ou décroissante. La monotonie se met en évidence en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.
Dans le cas où u_n est positif, on peut aussi comparer à 1 le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
Si l'inégalité est stricte, on dira que $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante (resp. strictement décroissante).

4.2 Suites, fonctions et limites

4.2.1 Suites convergentes.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels. On dit que la suite est convergente et admet pour limite le nombre réel l si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ N_0 \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_0 \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$$

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Exemple :

Soit la suite réelle : $u_n = \frac{-2n+1}{n+1}$, $(n \in \mathbb{N})$.
On montre par définition que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$ $(l = -2)$.
Soit $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned} |u_n - l| < \varepsilon &\iff |u_n + 2| < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \frac{3}{n+1} < \varepsilon \\ &\Longrightarrow n > \frac{3}{\varepsilon} - 1. \end{aligned}$$

Le plus petit entier positif ou moins égal à $\frac{3}{\varepsilon}$ répond au problème.
Il suffit alors de prendre $N_0 = \left[\frac{3}{\varepsilon}\right]$ $(> \frac{3}{\varepsilon} - 1)$ où $[x]$ désigne la partie entière de x.
Donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ N_0 = \left[\frac{3}{\varepsilon}\right] \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_0 \Rightarrow |u_n + 2| < \varepsilon.$$

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2.$

Remarques :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ (fini) $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - l) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0.$
- Si une suite n'admet pas de limite quand n tend vers l'infini, on dit qu'elle est divergente.

Théorème : (Unicité de la limite)

La limite d'une suite, lorsqu'elle existe, est unique.

Théorème :

- Toute suite réelle $(u_n)_n$ croissante et majorée est convergente. Plus précisément, elle converge vers le $\sup\{u_n\ /\ n \in \mathbb{N}\}$.
- Toute suite réelle $(u_n)_n$ décroissante et minorée est convergente. Plus précisément, elle converge vers le $\inf\{u_n\ /\ n \in \mathbb{N}\}$.
- Une suite convergente vers l fini est bornée.
  La réciproque est fausse. La suite $u_n = (-1)^n$ est bornée, car $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \{-1, 1\} \subset [-1, 1]$. Mais $(u_n)_n$ est divergente.

Propriétés :

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ (fini) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |l|$.
  La réciproque est fausse. Par exemple, il suffit de prendre la suite de terme général $u_n = (-1)^n$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$. Alors on a : $l \geq 0$.
- Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ (fini) et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$ (fini) et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors : $u_n + v_n$ converge vers $l + l'$ et $u_n \times v_n$ converge vers $l \times l'$. λu_n converge vers λl. Si $l \neq 0$, $\frac{1}{u_n}$ converge vers $\frac{1}{l}$ et si $l' \neq 0$, $\frac{u_n}{v_n}$ converge vers $\frac{l}{l'}$.

Théorème des trois suites (ou *d'encadrement*).

- Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites telles que $u_n \leq w_n \leq v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
  Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers la même limite l. Alors $(w_n)_n$ converge également vers l.
  Le résultat reste vrai si l'inégalité n'est vérifiée qu'à partir d'un certain rang.
  Par exemple : Soit la suite $w_n = 2 + \frac{\sin n}{n}$, $\quad (n \geq 1)$.
  Pout tout $n \geq 1$, $|\sin n| \leq 1$. Donc $2 - \frac{1}{n} \leq w_n \leq 2 + \frac{1}{n}$.
  On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \frac{1}{n} = 2 = \lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \frac{1}{n} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2$ ($(w_n)_n$ converge vers 2).
- Soit $u_n \leq v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Si $(v_n)_n$ converge vers l fini $\Longrightarrow (u_n)_n$ est majorée.

4.2.2 Suites adjacentes.

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles.
On dit que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes si et seulement si :

- $(u_n)_n$ est croissante.
- $(v_n)_n$ est décroissante.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Théorème :

Deux suites adjacentes sont convergentes et admettent une même limite $l \in \mathbb{R}$ qui vérifie :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1} \leq l \leq v_{n+1} \leq v_n$.

4.2.3 Suites définies par récurrence.

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On peut définir une suite $(u_n)_n$ par :
- La donnée de son terme initial u_0 ou $u_1 \in I$.
- La relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

On supposera $f(I) \subset I$ (u_n est donc définie).
On dit alors que la suite $(u_n)_n$ est définie *par récurrence* (ou est *récurrente*).

Monotonie.

L'étude de la monotonie de la suite revient à celle de la fonction f. On vérifie par récurrence, en utilisant

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1}),$$

que
- Si f est croissante $\Rightarrow$ $(u_n)_n$ est monotone,

$$\begin{cases} \text{croissante, } si & f(u_1) - u_1 \geq 0\,; \\ \text{constante, } si & f(u_1) - u_1 = 0\,; \\ \text{décroissante, } si & f(u_1) - u_1 \leq 0. \end{cases}$$

- Si f est décroissante, on ne peut rien dire sur la monotonie de $(u_n)_n$.
- La fonction f "conserve" les ordres $u_1 \geq u_0 \Rightarrow f(u_1) \geq f(u_0) \Rightarrow u_2 \geq u_1$.

Convergence.

On suppose que f est continue sur I. Si la suite $(u_n)_n$ converge vers $l \in I$, cette limite vérifie $l = f(l)$.
La recherche de la limite se ramène donc à l'étude de l'équation $l = f(l)$ avec $l \in I$.

Exemple :

Étudier la suite définie par : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}, \quad u_0 = 1$.
On a $f(x) = \sqrt{x+2}, \quad I = [-2, +\infty[\quad$ et $\quad f(I) \subset I$.
On montre par récurrence que : $u_n \leq 2, \ \forall n \in \mathbb{N}$
$\Longrightarrow (u_n)_n$ est majorée par 2 . . . (a)
La fonction f étant strictement croissante sur $I \Rightarrow (u_n)_n$ est définie et monotone.
D'autre part : $u_0 = 1, \ \ u_1 = f(u_0) = \sqrt{3} > u_0$.

$\Longrightarrow (u_n)_n$ est strictement croissante . . . (b)
Donc $(u_n)_n$ est convergente. Soit l sa limite.
La fonction f est continue sur I. On a
$l = f(l) \Leftrightarrow l = \sqrt{l+2} \Leftrightarrow l^2 - l - 2 = 0 \Leftrightarrow (l-2)(l+1) = 0 \Leftrightarrow l = 2$ ou $l = -1$.
Puisque $0 \leq u_n \leq 2 \Longrightarrow l = 2$ $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2\right)$.

4.2.4 Suites extraites

Propriété :

Soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \varphi(n) \geq n$.
Définition : Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.
On appelle *suite extraite* (ou sous-suite) de la suite $(u_n)_n$ toute suite $(v_n)_n$ de $\mathbb{R}$ dont le terme général peut s'écrire $v_n = u_{\varphi(n)}$, où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Exemples :

- $\varphi_1 : n \to \varphi_1(n) = 2n+1$ et $u_n = (-1)^n$ on a : $v_n = u_{2n+1} = -1$.
- $\varphi_2 : n \to \varphi_2(n) = 2n$ et $u_n = (-1)^n$ on a : $v_n = u_{2n} = 1$.
- $\varphi_3 : n \to \varphi_3(n) = 2^n$ et $u_n = \frac{1}{n}$ on a : $v_n = u_{2^n} = \frac{1}{2^n}$.

Proposition :

Soit $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ (resp. $-\infty$, $+\infty$) $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = l$ (resp. $-\infty$, $+\infty$).
Attention, la réciproque est fausse. Par exemple : $u_n = (-1)^n$.

Théorème : (de *Bolzano-Weirstrass*)

Toute suite bornée de nombres réels admet une sous-suite convergente.

4.3 Suites de Cauchy

On dit qu'une suite réelle $(u_n)_n$ est de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ N_0 \in \mathbb{N}\ /\ \forall p, q \in \mathbb{N},\ p, q \geq N_0 \Longrightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

Théorème : (*Critère de Cauchy*)

Une suite réelle $(u_n)_n$ est de Cauchy si et seulement si elle est convergente (On dira que $\mathbb{R}$ est complet).

Exemple :

On considère la suite :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2},\quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ tel que $p > q$, on a

$$\begin{aligned} |u_p - u_q| &= \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+2)^2} + \ldots + \frac{1}{p^2} \\ &\leq \frac{1}{q(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots + \frac{1}{(p-1)p}. \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{q(q+1)} = \frac{1}{q} - \frac{1}{q+1}$, donc on aura :

$$\begin{aligned} |u_p - u_q| &\leq \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q+1}\right) + \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{q+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right) \\ &\leq \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) < \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour que $|u_p - u_q| < \varepsilon$, il suffit que $\frac{1}{q} < \varepsilon \Longrightarrow q > \frac{1}{\varepsilon}$.
Alors, il suffit de choisir $N_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.
Donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ N_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N}^*\ /\ \forall p, q \in \mathbb{N}^*,\ p, q \geq N_0 \Longrightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

$\Longrightarrow (u_n)_n$ est de Cauchy, donc convergente.

4.4 Suites arithmétiques

On appelle suite arithmétique, toute suite, où chaque terme se déduit du précédent par l'addition d'une constante.
c'est-à-dire $\forall n \geq 1,\ u_n = u_{n-1} + r$.

- La constante r s'appelle la raison de la suite arithmétique.
- Une suite arithmétique est dite réelle si ses termes sont réels.
- $\mathbb{R}$ étant un corps ordonné, la suite est dite :

$$\begin{cases} \text{croissante, } si & r > 0\,; \\ \text{constante, } si & r = 0\,; \\ \text{décroissante, } si & r < 0. \end{cases}$$

- Une suite arithmétique est dite finie, si I est fini.
- Le terme général d'une suite arithmétique, en fonction de u_1, n et r, est : $u_n = u_1 + (n-1)r$.
  NB : Si le premier terme de la suite est u_0, on a : $u_n = u_0 + nr$.
  Dans une suite arithmétique finie, $u_1 + u_n = u_i + u_{n-i+1},\quad i \in [1, n]$.

Somme des termes d'une suite arithmétique finie :

$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$
$S_n = u_n + u_{n-1} + \ldots + u_1$
En ajoutant membre à membre ces inégalités, on obtient :
$2S_n = (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + \ldots + (u_n + u_1)$
$2S_n = n(u_1 + u_n)$
$\Longrightarrow S_n = \frac{n}{2}\,(u_1 + u_n)$.
NB : Si le premier terme de la suite est u_0, on aurait : $S_n = \frac{n+1}{2}\,(u_0 + u_n)$.
Trois termes x, y et z dans cet ordre sont en progression arithmétique si $2y = x + z$.

Exemple :

Pour $n \in \mathbb{N},\ u_n = n$: Suite arithmétique, de premier terme $u_0 = 0$ et de raison $r = 1$.
Car $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_{n-1} + 1$.
La somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite (u_n) est : $S_n = \frac{(n+1)n}{2}$.
Si $n = 5$, $S_5 = u_0 + u_1 + \ldots + u_5 = \frac{6 \times 5}{2} = 15$.

4.5 Suites géométriques

On appelle suite géométrique, une suite telle que chaque terme se déduit du précédent par multiplication par une constante : $\forall n \geq 1,\ u_n = u_{n-1} \times q$.
q : raison de la suite.

- **Expression de u_n en fonction de u_1, q et n.**

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

NB : Si le premier terme de la suite est u_0, on aurait : $u_n = u_0 \times q^n$

- **Nature de la suite.**

$$(q > 1)\ avec \begin{cases} u_1 > 0 & \text{suite croissante;} \\ u_1 < 0 & \text{suite décroissante.} \end{cases}$$

$$(0 < q < 1)\ avec \begin{cases} u_1 > 0 & \text{suite décroissante;} \\ u_1 < 0 & \text{suite croissante.} \end{cases}$$

$$(q < 0) : \text{ suite alternée}$$

$$(q = 0) : \text{ le 1-er terme est } u_1\text{, tous les autres sont nuls}$$

$$(q = 1) : \text{ tous les termes sont égaux au premier}$$

- Dans toute suite géométrique finie, $u_1 \times u_n = u_j \times u_{n-j+1}, \quad j \in [1, n]$.
- Trois termes rangés dans l'ordre x, y, z sont en progression géométrique si $y^2 = x \times z$.

Somme des termes d'une suite géométrique finie :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k &= u_1 + u_2 + \ldots + u_n \\ &= u_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}. \end{aligned}$$

Si le premier terme de la suite est u_0, alors

$$S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Limite de la somme d'une suite géométrique illimitée :

$$S_n = u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}.$$

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } |q| \geq 1, \text{ la suite } (S_n) \text{ diverge.} \\ u_1 \times \frac{1}{1-q} & \text{si } |q| < 1, \text{ la suite } (S_n) \text{ converge vers la limite } \frac{u_1}{1-q}. \end{cases}$$

Dans ce dernier cas, le nombre $S = \frac{u_1}{1-q} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exemple :

Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\frac{1}{2})^n$: Suite géométrique, de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \frac{1}{2}$. Car $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2} \times u_{n-1}$.
On a $|q| = \frac{1}{2} < 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (\frac{1}{2} - 1) \leq 0$ donc la suite (u_n) est décroissante. Par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, donc (u_n) est minorée. Ainsi, la suite (u_n) converge. Sa limite est $l = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0$.
La somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite (u_n) est :

$$S_n = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}$$

On a $S = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} S_n = 2$.

5

Déterminants

Dans tout ce chapitre, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un espace vectoriel sur K et n un entier naturel non nul.

5.1 Déterminant d'une matrice carrée

5.1.1 Généralités.

Définition :

On définit le déterminant d'une matrice $A = (a_{ij})_{i=1,n;\ j=1,n}$ de $\mathcal{M}_n(K)$ qui sera noté

$$detA = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

par récurrence de la façon suivante :

- Si $n = 1$, on a $A = (a_{11})$ et $detA = a_{11}$.
- Si $n \geq 2$, soit A_{ij} la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne. On pose $detA = a_{11}\ detA_{11} - a_{12}\ detA_{12} + \cdots + (-1)^n a_{1n}\ detA_{1n}$.

Remarques :

- Plus généralement, on appellera déterminant d'ordre n tout tableau de la forme précédente, sans préciser son origine (matrice, famille de vecteurs ou endomorphisme).
- L'application $det : \mathcal{M}_n(K) \to K$ à une valeur $A \mapsto detA$, est une forme multilinéaire alternée.

5.1.2 Déterminants particuliers.

Propriétés :

- Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_2(K)$, on a $detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}\ a_{21}$.
- Si $A \in \mathcal{M}_3(K)$, on obtient

$$\begin{aligned} detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

- Les termes positifs et les termes négatifs vérifient la règle dite *règle de SARRUS*.
  ▷ les éléments de la diagonale principale et de ses parallèles donnent les termes de signe (+).
  ▷ les éléments de la 2-ème diagonale et de ses parallèles donnent les termes de signe (-).

Exemple :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} &= [5 \times 4 \times (-2)] + [7 \times (-3) \times 2] + [3 \times 0 \times 1] \\ &- [2 \times 4 \times 1] - [7 \times 3 \times (-2)] - [0 \times (-3) \times 5] = -48. \end{aligned}$$

- Soit $A = (a_{ij})_{i=1,n;\ j=1,n}$ une matrice triangulaire inférieure ou supérieure de $\mathcal{M}_n(K)$.
  Alors $detA = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ (produit des coefficients diagonaux).
- Soit $A = (a_{ij})_{i=1,n;\ j=1,n}$ une matrice carrée d'ordre n, de terme général $a_{ij} = x_i^{j-1}$.
  Alors $detA = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$.

5.1.3 Calcul d'un déterminant.

Définition :

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$, avec $n \geq 2$, de terme général a_{ij}.
Pour tout couple d'indices (i, j), on appelle mineur de a_{ij} dans A le déterminant $detA_{ij}$.
N.B : $detA_{ij}$ est le déterminant d'ordre $(n-1)$ obtenu en supprimant dans A la i-ème ligne et la j-ème colonne.

Propriété :

Soit $A = (a_{ij})_{i=1,n;\ j=1,n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$, avec $n \geq 2$.

- Pour tout indice i de $\{1, \cdots, n\}$, on a $detA = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\ a_{ij}\ detA_{ij}$.
  Cette égalité est appelée développement de $detA$ par rapport à sa i-ème ligne.
- Pour tout indice j de $\{1, \cdots, n\}$, on a $detA = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\ a_{ij}\ detA_{ij}$.
  Cette égalité est appelée développement de $detA$ par rapport à sa j-ème colonne.

Exemple :

Calcul de $detA$ suivant la 2-ème ligne (*on fixe* $i = 2$).

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3}(-1)^{2+j}\ a_{2j}\ detA_{2j} = -\ a_{21}\ detA_{21} + a_{22}\ detA_{22} - a_{23}\ detA_{23}$$

$$= -\ 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -4.$$

5.1.4 Opérations sur les déterminants.

Propriété :

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ avec $n \geq 2$ et soient $C_1, C_2, \cdots, C_n$ les vecteurs colonnes de A.
Le déterminant est une fonction linéaire par rapport aux colonnes.
C'est-à-dire, si $C_i = \lambda C_i' + \mu C_i''$ pour deux scalaires λ, $\mu \in K$, alors

$$\begin{aligned} detA &= det(C_1, C_2, \cdots, C_i, \cdots, C_n) \\ &= det(C_1, C_2, \cdots, \lambda C_i' + \mu C_i'', \cdots, C_n) \\ &= \lambda\ det(C_1, C_2, \cdots, C_i', \cdots, C_n) + \mu\ det(C_1, C_2, \cdots, C_i'', \cdots, C_n). \end{aligned}$$

Exemple :

Dans l'exemple précédent, si on fait $C_2 \to C_2 - 2C_1$. Alors :
$det(C_1, C_2, C_3) = det(C_1, C_2 - 2C_1, C_3)$ où C_1, C_2 et C_3 sont les colonnes de A.

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 - 2C_1 & C_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 7 & -3 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} \\ \\ &= -4. \text{ [suivant la 1-ère ligne]} \end{aligned}$$

Propriétés :

- Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(K)$. On a $det(AB) = (detA)(detB)$.
- Le déterminant de la matrice identité est égal à 1 i.e. $det(I_n) = 1$.
- Une matrice A de $\mathcal{M}_n(K)$ est inversible si et seulement si $detA \neq 0$. On a alors
$$det(A^{-1}) = \frac{1}{detA} = (detA)^{-1}$$
- Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(K)$ et pour tout entier naturel k, on a $detA^k = (detA)^k$. Si A est inversible, cette égalité s'étend au cas des entiers négatifs.
- Toute matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux a_{ii} sont non nuls. A^{-1} est alors triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les inverses des a_{ii}.
  On a le même résultat si on remplace triangulaire supérieure par inférieure ou par diagonale.

Rappel :

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(K)$.
On dit que A et B sont semblables si et seulement si il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$.

Corollaire :

Si les matrices carrées A et B sont semblables, alors $detA = detB$.
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$. Alors $detA = det(^tA)$.

Remarque :

Les propriétés suivantes sont exprimées en termes de colonnes. Elles pourraient être exprimées à l'identique en termes de lignes via la propriété précédente.

Propriétés :

- Si A contient une colonne nulle, alors $detA = 0$.
- Si on permute deux colonnes de A, la valeur du déterminant est changée en son opposé. Plus généralement, si on effectue une permutation sur les colonnes de A, la valeur de $detA$ est inchangée (resp. changée en son opposée) selon que cette permutation peut se décomposer en un nombre pair (resp. impair) d'échanges de colonnes.
- On ne modifie pas la valeur de $detA$ en ajoutant à l'une des colonnes de A une combinaison linéaire des autres colonnes de A.
- La valeur de $detA$ est nulle si et seulement si les colonnes de A sont liées.

5.2 Comatrice

Définition :

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$, avec $n \geq 2$.
La quantité $b_{ij} = (-1)^{i+j} detA_{ij}$ est appelée cofacteur du terme a_{ij}.

On appelle comatrice de A et on note $C(A)$ la matrice carrée d'ordre n et de terme général b_{ij}.

Exemple :

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}, \text{alors } C(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & b'' \\ c & c'' \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & a'' \\ c & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & a'' \\ b & b'' \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Propriétés :

- La proposition précédente peut s'écrire :
  $\forall A \in \mathcal{M}_n(K),\ A.{}^tC(A) = {}^t C(A).A = (detA).I_n$
- Si la matrice A est inversible, alors l'inverse de A est :

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}.{}^tC(A)$$

  Cette formule n'a cependant qu'un intérêt assez théorique dès que $n \geq 4$.
- Par exemple, soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Si $detA = ad - bc \neq 0$, alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

6

Systèmes d'équations linéaires

L'une des nombreuses applications des déterminants est la résolution des systèmes d'équations linéaires.

6.1 Généralités

Définition 1 :

Soient E et F deux K-e.v.
Soit $f : E \to F$ une application linéaire et $b \in F$. On a
$f(x) = b \cdots$ (1) : équation linéaire avec second membre.
$f(x) = 0 \cdots$ (2) : est l'équation homogène associée.
On a $f(x) = b \Longleftrightarrow x \in E \; et \; x = f^{-1}(\{b\})$.

- Si $f^{-1}(\{b\}) = \; \Longrightarrow$ (1) est impossible (ou (1) n'admet pas de solution).
- $f(x) = 0 \Longrightarrow x \in Kerf$.
  Or $0 \in Kerf \Longrightarrow x = 0$: solution de l'équation (2)(appelée solution triviale).

Définition 2 :

Soit E un K-e.v, F_i un K-e.v, $(i = 1, \cdots, n)$.
Soit $f_i : E \to F_i$ une application linéaire et $b_i \in F_i$, $i = 1, \cdots, n$. Alors

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = b_1 \\ \dots \\ f_n(x) = b_n \end{array} \right. \qquad \text{système de n équations linéaires}$$

Remarque :

$(S) : f(x) = b$, où $f = (f_1, \dots, f_n)$ et $b = (b_1, \dots, b_n)$.

Exemple :

$E = F = K$, soit $ax = b$.
- Si $a \neq 0 \Longrightarrow x = a^{-1}b$: est l'unique solution.
- Si $a = 0$ et $b \neq 0$: l'équation est impossible.
- Si $a = 0$ et $b = 0$: il y a une infinité de solutions.

6.2 Système linéaire sous forme matricielle

On appelle système de n équations linéaires à p inconnues à coefficients dans un corps K, tout système de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \cdots + a_{1p}\ x_p = b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \cdots + a_{2p}\ x_p = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\ x_1 + a_{n2}\ x_2 + \cdots + a_{np}\ x_p = b_n \end{array} \right. \qquad (1)$$

avec $(n > p$ ou $n = p$ ou $n < p)$.

Soit la matrice $A = (a_{ij})_{i=1,\cdots,n;\ j=1,\cdots,p} \in \mathcal{M}_{n,\ p}(K)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

$(1) \Longleftrightarrow A\ X = B \Longleftrightarrow f(x) = b$.

$$A = \mathcal{M}(f)_{B_E,\ B_F} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad f : E \to F,\ x \mapsto f(x) = b.$$

A : est dite la matrice associée à (1).
$B_E = \{e_1, \cdots, e_p\}$, $B_F = \{e'_1, \cdots, e'_n\}$, $\dim E = p$ et $\dim F = n$.
$x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$, $b = \sum_{j=1}^{n} b_j e'_j$.
Alors (1) se met sous forme fonctionnelle $f(x) = b$
et sous la forme matricielle $AX = B$.
-On appelle rang du système linéaire (1) le rang de la matrice associée A :
r =rang de (1)= $rg(A) = rg(f)$.

6.3 Résolution du système (1)

(1) $\Longleftrightarrow f(x) = b$.

- 1-er cas :
  Si $b \in Imf \Longrightarrow \exists x \in E \ / \ b = f(x)$.
  $\Longrightarrow$ (1) admet des solutions.
- 2-ème cas :
  Si $b \notin Imf \Longrightarrow$ (1) est impossible. Donc l'existence des solutions de (1) dépend de la bijection de f, donc de l'inversibilité de A.
  (f bijective $\Longrightarrow n = p = r$).

6.3.1 Résolution par la méthode de Cramer.

(1) : $AX = B$ est dit système de Cramer si $\det A \neq 0$ (i.e. A est inversible) et $n = p = r$.
On note $\det A$ le déterminant de A = déterminant du système (1).
Posons $\det A_i$ le déterminant de la matrice obtenue à partir de A, en remplaçant la colonne i par la colonne B des b_i. Alors la solution unique du système (1) est donnée par les formules

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \quad \text{pour} \quad i = 1, \cdots, n$$

6.3.2 Résolution par la méthode de la matrice inverse.

Théorème : Si $\det A \neq 0$ (i.e. A est inversible). Alors le système (1) : $AX = B$ admet une solution unique $X = A^{-1}B$.
où

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}.{}^tC(A) \Longrightarrow X = \frac{1}{\det A}.{}^tC(A).B$$

$C(A) = (c_{ij})_{i,j}, \;\; c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$

Donc $\forall i = 1, \cdots, n : x_i = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} \; {}^tc_{ij} \; b_j.$

Exemple :

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y - z = \mathbf{2} \\ x + 2y + z = \mathbf{3} \\ x + y - 5z = \mathbf{0} \end{cases} \quad (1)$$

Solution :

1ére Méthode : La matrice associée à (1) est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

On fait $C_1 \to C_1 - C_2$.
$\det A = -4 \neq 0 \Longrightarrow rg(A) = 3.$ [suivant la 1-ère colonne].
Le système (1) est alors de Cramer, il admet une solution unique donnée par :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{2} & 1 & -1 \\ \mathbf{3} & 2 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & -5 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-10}{-4} = \frac{5}{2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{2} & -1 \\ 1 & \mathbf{3} & 1 \\ 1 & \mathbf{0} & -5 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{0}{-4} = 0, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{2} \\ 1 & 2 & \mathbf{3} \\ 1 & 1 & \mathbf{0} \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

2éme Méthode :

Le système (1) s'écrit $AX = B$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a : $\det A = -4 \neq 0 \Leftrightarrow A$ est inversible. Le système admet une solution unique donnée par les formules

$$\begin{aligned}(1) : AX = B &\Leftrightarrow X = A^{-1}B \\ &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/4 & -1 & -3/4 \\ -3/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

6.3.3 Résolution par la méthode de Fontené Rouché.

Définition :

Soit $(1) : AX = B$ un système linéaire de n équations à p inconnues. Soit $r = rg(A)(= rg(1))$.
Soit $M \in \mathcal{M}_r(K)$, inversible, la matrice obtenue à partir de A en supprimant les $(n-r)$ dernières lignes et les $(p-r)$ dernières colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rp} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

1) les r premières équations de M s'appellent les équations principales.
   les r inconnues $x_1, \cdots, x_r$ s'appellent les inconnues principales.
2) On appelle déterminant caractéristique de (1), les $(n-r)$ déterminants d'ordre $(r+1)$ suivants :

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & b_r \\ a_{k1} & \cdots & a_{kr} & b_k \end{vmatrix}, \quad k = r+1, \cdots, n$$

Théorème : (*de Fontené Rouché*)

Soit (1) le système linéaire de n équations à p inconnues et $r = rg(1)$.

(a) Si $\mathbf{r=n< p}$.

Le système (1) est dit indéterminé à $(p-r), (= p-n)$ paramètres. On attribut aussi

$(p-r)$ paramètres de valeurs arbitraires.

les r équations principales (restantes) sont données par un système de Cramer.

(b) Si **r=n=p.** le système (1) est de Cramer ($rg(A) = r = n \Longrightarrow \det A \neq 0$).

(c) Si **r<n.** (A est non inversible)

• $\exists k \in \{r+1, \cdots, n\},\ D_k \neq 0$.

$\Rightarrow$ (1) est impossible (ou n'admet pas de solution).

• $\forall k = r+1, \cdots, n,\ D_k = 0$.

$\Rightarrow$ (1) se réduit aux r équations principales et se résout comme dans le cas **(a)**.

Exemple :

Résoudre et discuter suivant le paramètre réel m le système :

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ x+2y+z=3 \\ x+y+(m^2-5)z=m \end{cases} \qquad (1)$$

Solution :

La matrice associée à (1) est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & m^2-5 \end{pmatrix}$

On fait $C_1 \to C_1 - C_2$.

$\det A = m^2 - 4 = (m-2)(m+2)$, [suivant la 1-ère colonne].

• 1-er cas : Si $m \neq 2$ et $m \neq -2 \Longrightarrow \det A \neq 0 \Longrightarrow rg(A) = 3$.

le système (1) est alors de Cramer, il admet une solution unique :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ m & 1 & m^2-5 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{m^2+3m-10}{(m-2)(m+2)} = \frac{m+5}{m+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & m & m^2-5 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{m^2-2m}{(m-2)(m+2)} = \frac{m}{m+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{m-2}{(m-2)(m+2)} = \frac{1}{m+2}$$

- 2-ème cas : $m = 2 \Longrightarrow \det A = 0 \Longrightarrow rg(A) < 3$.
  Le système (1) devient :

$$(1) \begin{cases} x + y - z = 2 \cdots (a) \\ x + 2y + z = 3 \cdots (b) \\ x + y - z = 2 \cdots (c) \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Le déterminant d'ordre 2 extrait de A suivant : $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow rg(A) = 2$.

On choisit : $\begin{cases} (a) \text{ et } (b) \text{ comme équations principales} \\ x \text{ et } y \text{ comme inconnues principales.} \end{cases}$

Le seul déterminant caractéristique de (1) est :

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$\Longrightarrow$ le système est réduit aux deux équations principales

$$(1) \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 + z \\ x + 2y = 3 - z \end{cases}$$

qui est un système de Cramer, indéterminé à un paramètre z.

$$\Longrightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 2+z & 1 \\ 3-z & 2 \end{vmatrix}}{1} = 1 + 3z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2+z \\ 1 & 3-z \end{vmatrix}}{1} = 1 - 2z, \quad z \in \mathbb{R} \text{ arbitraire.}$$

- 3-ème cas : $m = -2 \Longrightarrow \det A = 0 \Longrightarrow rg(A) < 3$.
  Le système (1) devient :

$$(1) \begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + y - z = -2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Comme dans le 2-ème cas, $rg(A) = 2$.
Même choix du 2-ème cas, le seul déterminant caractéristique est :

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$D_3 \neq 0 \Longrightarrow$ le système (1) n'admet pas de solution.

Bibliographie

[1] K. Allab, *Eléments d'Analyse*, OPU, 1986.

[2] J. Pichon, *Arithmétique, systèmes linéaires, structures*, Ellipses, 1992.

[3] B. Basili, C. Peskine, *Algèbre*, Diderot éditeur, 1995.

[4] F. Liret, D. Martinais, *Cours de mathématiques Analyse* 1^{re} *année*, Dunod, 1997.

[5] J. Dixmier, *Cours de mathématiques du* 1^{er} *cycle*, Dunod, 2001.

[6] V. Collet, *Maths-Licence Sciences* 1^{re} *année.* Tout le 2^{e} semestre, nouvelle édition, 312 pages, 2004.