



## Examen d'Outils numériques (L3GEN)

**N.B :** Aucun document n'est autorisé. Durée : 1 h 30 mn.

### **Exercice N° 1:** (11 points)

Considérons l'équation de Laplace appliquée à une plaque rectangulaire.

1- Quel est le type de cette EDP. Justifier votre réponse.

2- En posant  $\beta = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ , retrouver le schéma à 5 points.

3- Dessiner les cellules correspondantes à ce schéma pour  $\beta = 1$ .

Cette plaque est soumise aux conditions de Dirichlet suivantes :

10°C en bas, 50°C à gauche, 20°C à droite et  $T(x) = 5x + 10$  en haut.

Elle est discrétisée par 4 divisions selon  $X$  et 3 selon  $Y$  ( $\Delta x = 10$ ).

4- Ecrire les équations nécessaires à la résolution de ce problème (pour  $\beta = 1$ ).

5- Déterminer la forme matricielle du problème  $A.T = B$ .

### **Exercice N° 2:** (7 points)

Soit le schéma de discrétisation de l'équation de la chaleur ci-dessous:

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \lambda \left[ \frac{1}{3}(T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}) + \frac{1}{3}(T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n) \right]$$

1- Ce schéma est-il explicite ou implicite ? Justifier.

2- Déterminer le facteur d'amplification de ce schéma.

3- Etudier la stabilité de ce schéma ( $\lambda > 0$ ).

### **Exercice N° 3:** (2 points)

Discrétiser l'équation de la chaleur unidimensionnelle par une approximation décentrée arrière d'ordre 2 en temps et décentrée avant d'ordre 2 en espace.

Bonne chance

	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
$hf'(x)$	-1	+1			
$h^2 f''(x)$	+1	-2	+1		

*Tab.1- Approximation décentrée en avant en  $O(h)$ .*

	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$
$hf'(x)$				-1	+1
$h^2 f''(x)$			+1	-2	+1

*Tab.2- Approximation décentrée en arrière en  $O(h)$ .*

	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$
$2hf'(x)$	-3	+4	-1			
$h^2 f''(x)$	+2	-5	+4	-1		

*Tab.3- Approximation décentrée en avant en  $O(h^2)$ .*

	$f(x-5h)$	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$
$2hf'(x)$				+1	-4	+3
$h^2 f''(x)$			-1	+4	-5	+2

*Tab.4- Approximation décentrée en arrière en  $O(h^2)$ .*

	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$
$2hf'(x)$		-1	0	+1	
$h^2 f''(x)$		+1	-2	+1	

*Tab.5- Approximation centrée en  $O(h^2)$ .*