DEPARTEMENT DE MECANIQUE

Examen d'Outils numériques (L3GEN)

N.B : *Aucun document n'est autorisé. Durée : 1 h 30 mn.*

Exercice N° 1: (5 points)

Considérons l'équation de Laplace en deux dimensions.

En discrétisant le terme en x par un schéma décentré avant d'ordre 2, le terme en y par un schéma décentré avant d'ordre 1 et en posant $\beta = \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}$, donner le schéma de discrétisation (équation) et dessiner les cellules correspondantes pour β=1.

Exercice N° 2: (5 points)

Soit le schéma de discrétisation suivant :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = 5 \left[\frac{T_{i-1}^n - 2\,T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2}\right]$$

En posant $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, étudier la stabilité de ce schéma.

Exercice N° 3: (6 points)

Soit une plaque rectangulaire discrétisée par 3 divisions selon x et 5 selon y.

En appliquant le schéma à 5 points et en posant $\beta = \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}$, déterminer la forme matricielle du problème A.T = B.

Exercice N° 4: (4 points)

Soient les deux EDP suivantes : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ et $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

1. Discrétiser l'équation de la chaleur par un schéma décentré arrière d'ordre 2 en temps et décentré avant d'ordre 1 en espace.
2. Discrétiser l'équation d'onde par un schéma décentré avant d'ordre 1 en temps et décentré arrière d'ordre 2 en espace.

Bonne chance

	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
$h\,f^{'}(x)$	-1	+1			
$h^2\,f^{''}(x)$	+1	-2	+1		

Tab.1- Approximation décentrée en avant en $O(h)$.

	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$
$h\,f^{'}(x)$				-1	+1
$h^2\,f^{''}(x)$			+1	-2	+1

Tab.2- Approximation décentrée en arrière en $O(h)$.

	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$
$2h\,f^{'}(x)$	-3	+4	-1			
$h^2\,f^{''}(x)$	+2	-5	+4	-1		

Tab.3- Approximation décentrée en avant en $O(h^2)$.

	$f(x-5h)$	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$
$2h\,f^{'}(x)$				+1	-4	+3
$h^2\,f^{''}(x)$			-1	+4	-5	+2

Tab.4- Approximation décentrée en arrière en $O(h^2)$.

	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$
$2h\,f^{'}(x)$		-1	0	+1	
$h^2\,f^{''}(x)$		+1	-2	+1	

Tab.5- Approximation centrée en $O(h^2)$.