LMD ST_2

30/05/09

$1^h 30^{mn}$

جامعة منتوري، قسنطينة

MATH 5 مراقبة

تمرين 1:

عين النقاط الشاذة ثم برهن أنها أقطاب للدالة f وذلك بكتابة

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$$ حيث

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3+z^2-z-1}$$

تمرين 2

Ⓐ احسب باستعمال قاعدة كوشي للتكامل

$$I = \oint_c \frac{\cos z}{(z+1)^2(z-1)}\,dz \qquad ①: c: |z-1| = 1 \;,\; ② \; c: |z+1| = 1$$

Ⓑ

$$I_1 = \oint_c \frac{\cos z}{(z+1)(z-1)}\,dz \qquad ① \; c: |z-i| = \frac{1}{2} \;,② \; c: |z-i| = 2$$

Ⓒ احسب باستعمال النظرية الأساسية للبواقي:

$$I = \oint_c \frac{\cos z}{(z+1)^2(z-1)}\,dz \qquad c: |z-i| = 2$$

تمرين 3:

Ⓐ انشر في سلسلة Laurent الدالة f في الحلقة:

$$1 < |z+2| < 4 \qquad f(z) = \frac{1}{z^2+2z-8}$$

Ⓑ احسب:

$$\int_c (z^2 + z\bar{z})\,dz$$

حيث c: قوس الدائرة $|z| = 1$ $(0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \pi)$

LMD ST_2

30/05/09

تصحيح الامتحان

MATH 5

تمرين 1 : (2,5 pts)

f تحليلية في $\mathbb{C}-\{z^3+z^2-z-1=0\}$ لأن $\sin z$ ، z^3+z^2-z-1 تحليليتان في $\mathbb{C}$.

$$z^3+z^2-z-1=0$$

$z=-1$ جذر واضح. (0,5)

$$\begin{array}{r|l} z^3+z^2-z-1 & z+1 \\ \hline z^3+z^2 & z^2-1 \\ 0 \quad 0 \quad -z-1 & \\ -z-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow z^3+z^2-z-1=(z+1)(az^2+bz+c)$$

$$\Rightarrow z^3+z^2-z-1=(z+1)(z^2-1)=(z+1)^2(z-1) \quad (0,5)$$

إذن $z=1$ ، $z=-1$ هي نقاط شاذة للدالة f.
نبرهن أنها أقطاب لـ f.

* $z=1$

$$f(z)=\frac{\frac{\sin z}{(z+1)^2}}{z-1}=\frac{\varphi(z)}{z-1} \quad (0,5) \quad ; \quad \varphi(z)=\frac{\sin z}{(z+1)^2}$$

لدينا $\varphi(z)$ تحليلية عند $z=1$ ، $\varphi(1)=\frac{\sin 1}{4}\neq 0$ (0,25)

إذن $z=1$ قطب بسيط للدالة f.

* $z=-1$

$$f(z)=\frac{\frac{\sin z}{z-1}}{(z+1)^2}=\frac{\varphi_1(z)}{(z+1)^2} \quad (0,5) \quad , \quad \varphi_1(z)=\frac{\sin z}{z-1}$$

لدينا $\varphi_1(z)$ تحليلية عند $z=-1$ ،

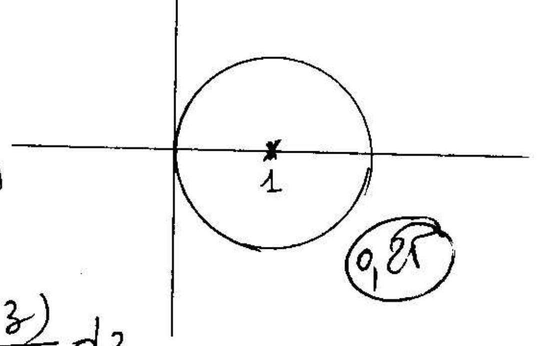
$$\varphi_1(-1)=\frac{\sin(-1)}{-2}=\frac{\sin 1}{2}\neq 0$$

إذن $z=-1$ قطب من الدرجة 2 للدالة f. (0,25)

-1-

(9pts) تمرين 2:

A)
$$I = \oint_C \frac{\cos z}{(z+1)^2(z-1)}\,dz \qquad ① \; C : |z-1| = 1$$



(0,5) ن. ش. م $z=-1$ ، $z=1$

$z=1$ تقع داخل C أما $z=-1$ تقع خارج C.

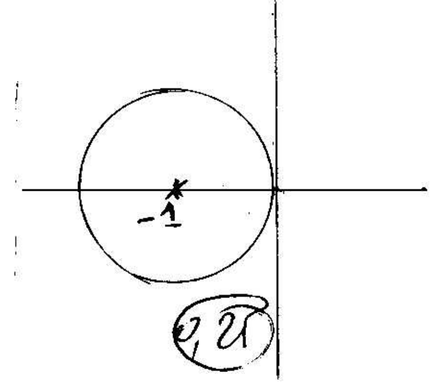
(0,25)

$$I = \oint_C \frac{\cos z}{(z+1)^2(z-1)}\,dz = \oint_C \frac{\frac{\cos z}{(z+1)^2}}{z-1}\,dz = \oint_C \frac{f(z)}{z-1}\,dz$$ (0,5)

حيث f تحليلية على C . اذن حسب قاعدة كوشي للتكامل:

$$I = \oint_C \frac{f(z)}{z-1}\,dz = 2\pi i\, f(1) = 2\pi i \cdot \frac{\cos 1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}\pi i \cos 1}$$ (0,5)

② $C : |z+1| = 1$



$z=-1$ تقع داخل C أما $z=1$ تقع خارج C

(0,25)

$$I = \oint_C \frac{\cos z}{(z+1)^2(z-1)}\,dz = \oint_C \frac{\frac{\cos z}{z-1}}{(z+1)^2}\,dz = \int \frac{g(z)}{(z+1)^2}$$ (0,5)

$g(z)$ تحليلية على C . اذن حسب قاعدة كوشي للتكامل فان:

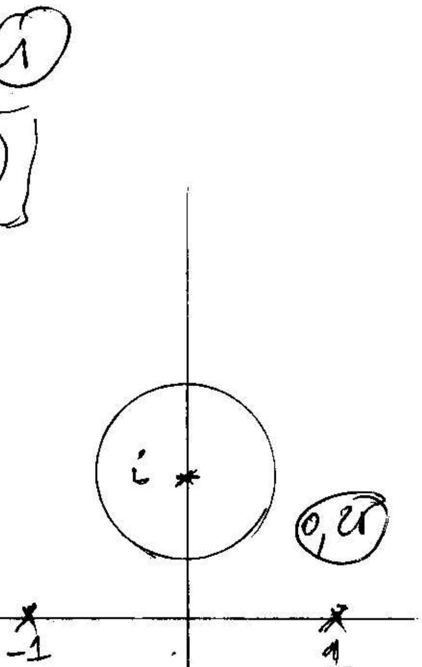
$$I = \oint_C \frac{\cos z}{(z+1)^2(z-1)}\,dz = 2\pi i\, g'(-1), \quad g(z) = \frac{\cos z}{z-1}, \; g'(z) = \frac{-\sin z(z-1) - \cos z}{(z-1)^2}$$

$$g'(-1) = \frac{-2\sin 1 - \cos 1}{4}$$

(1)

$$I = 2\pi i \left(\frac{-2\sin 1 - \cos 1}{4}\right) = \boxed{\frac{\pi i}{2}\left(-2\sin 1 - \cos 1\right)}$$

B) $$I_1 = \oint_C \frac{\cos z}{(z+1)(z-1)}\,dz \qquad ① : |z-i| = \frac{1}{2}$$



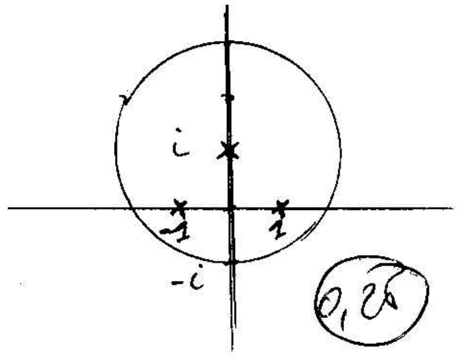
(0,5) ن. ش. م $z=-1$ ، $z=1$ وهما تقعان خارج C اي الدالة تحليلية على C

(0,25)

اذن حسب قاعدة كوشي للتكامل فان $I_1 = 0$

② $C: |z-i| = 2$

.C تقعان داخل $z=-1$ ، $z=1$



0,25

$$\frac{1}{(z+1)(z-1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}$$ 0,5

$$= -\frac{1}{2(z+1)} + \frac{1}{2(z-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos z}{(z+1)(z-1)} = -\frac{\cos z}{2(z+1)} + \frac{\cos z}{2(z-1)}$$

$$\oint_C \frac{\cos z}{(z+1)(z-1)}\,dz = -\frac{1}{2}\oint_C \frac{\cos z}{z+1}\,dz + \frac{1}{2}\oint_C \frac{\cos z}{z-1}\,dz$$ 0,5

$\cos z$ تحليلية على C إذن حسب قاعدة كوشي للتكامل:

$$I_1 = -\frac{1}{2}\left(2\pi i \cos(-1)\right) + \frac{1}{2}\left(2\pi i \cos(1)\right) = 0$$ 1

c) $I = \oint_C \frac{\cos z}{(z+1)^2(z-1)}\,dz \qquad C: |z-i| = 2$

حسب النظرية الأساسية للبواقي نجد:

$$I = \oint_C \frac{\cos z}{(z+1)^2(z-1)}\,dz = 2\pi i\left(\text{Res} f(-1) + \text{Res} f(1)\right)$$

* $\lim_{z\to 1} f(z) = \infty \Rightarrow$ $z=1$ قطب بسيط. 0,5

$$\text{Res} f(1) = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{\cos z}{(z+1)^2} = \frac{\cos 1}{4}$$ 0,5

* $\lim_{z\to -1} f(z) = \infty \Rightarrow$ $z=-1$ قطب من الدرجة 2. 0,5

$$\text{Res} f(-1) = \lim_{z\to -1}\left((z+1)^2 f(z)\right)' = \lim_{z\to -1}\left(\frac{\cos z}{z-1}\right)' = \frac{-2\sin 1 - \cos 1}{4}$$ 0,5

$$I = 2\pi i\left(-\frac{2\sin 1-\cos 1}{4}+\frac{\cos 1}{4}\right)=2\pi i\left(-\frac{2\sin 1}{4}\right)=\boxed{-\pi i\sin 1}$$ 0,5

8,5 pts

تمرين 3:

A

$$f(z)=\frac{1}{z^2+2z-8}=\frac{1}{(z+4)(z-2)}=\frac{A}{z+4}+\frac{B}{z-2} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{6} \\ B=\frac{1}{6}\end{cases}$$ 0,5 0,5

$$f(z)=-\frac{1}{6}\,\frac{1}{z+4}+\frac{1}{6}\,\frac{1}{z-2}$$

0,5

$$* \ \frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-4+2}=\frac{1}{(z+2)-4}=-\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{z+2}{4}}=-\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-t} \ ; \ t=\frac{z+2}{4}$$

on a: $1<|z+2|<4 \Rightarrow \left|\frac{z+2}{4}\right|=|t|<1$ 0,5

$$\Rightarrow \frac{1}{z-2}=-\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-t}=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}t^n=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2}{4}\right)^n=\boxed{-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{4^{n+1}}}$$ 0,5

0,5

$$* \ \frac{1}{z+4}=\frac{1}{(z+2)+2}=\frac{1}{2\left(1+\frac{z+2}{2}\right)}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\frac{z+2}{2}}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+X} \ ; \ X=\frac{z+2}{2}$$

on a: $1<|z+2|<4 \Rightarrow \frac{1}{2}<\left|\frac{z+2}{2}\right|<2$ 0,5

a) Si $\frac{1}{2}<\left|\frac{z+2}{2}\right|<1$ 0,5 $(|X|<1)$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+X}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n X^n=\sum(-1)^n\left(\frac{z+2}{2}\right)^n=\sum_{n=0}(-1)^n\frac{(z+2)^n}{2^n}$$

$$\frac{1}{z+4}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+2)^n}{2^n}=\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+2)^n}{2^{n+1}}}$$ 0,5

donc: $$f(z)=-\frac{1}{6}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+2)^n}{2^{n+1}}\right)+\frac{1}{6}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{4^{n+1}}\right)$$

$$\boxed{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{3\cdot 2^{n+2}}-\frac{1}{6\cdot 4^{n+1}}\right](z+2)^n}$$ 0,5

$\frac{1}{2}<\frac{|z+2|}{2}<1$

$\Leftrightarrow 1<|z+2|<2$

b) si: $1 < \left|\frac{z+2}{2}\right| < 2$ 0,1 $\quad (2 < |z+2| < 4) \quad (|X| > 1)$

$$\frac{1}{1+X} = \frac{1}{X\left(1+\frac{1}{X}\right)} = \frac{1}{X}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{X}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{X^{n+1}}$$

$$\frac{1}{1+\frac{z+2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+1}}{(z+2)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+1}}{(z+2)^{n+1}} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(z+2)^{n+1}}}$$ 0,1

donc: $$f(z) = -\frac{1}{6}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(z+2)^{n+1}}\right) + \frac{1}{6}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{4^{n+1}}\right)$$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{6}\frac{2^n}{(z+2)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{6\cdot 4^{n+1}}}$$ 0,5

$1 < \left|\frac{z+2}{2}\right| < 2$

$\Updownarrow$

$2 < |z+2| < 4$

B

$$\int_C \left(z^2 + z\bar{z}\right) dz .$$

$z = e^{i\theta}$ 0,25 , $dz = ie^{i\theta}d\theta$ 0,25

$0 \leq \theta \leq \pi$

0,25 $z^2 = e^{2i\theta}$, $\bar{z} = e^{-i\theta}$ 0,25

$$\int_0^{\pi}\left(e^{2i\theta} + e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta}\right)ie^{i\theta}d\theta = \int_0^{\pi}\left(e^{2i\theta}+1\right)ie^{i\theta}d\theta$$ 0,25

$$= \int_0^{\pi}\left(ie^{3i\theta} + ie^{i\theta}\right)d\theta = i\int_0^{\pi}\left(e^{3i\theta}+e^{i\theta}\right)d\theta = i\left[\frac{1}{3i}e^{3i\theta} + \frac{1}{i}e^{i\theta}\right]_0^{\pi}$$ 0,25

$$= \frac{1}{3}e^{3i\pi} + e^{i\pi} - \frac{4}{3}$$ 0,25

$$; \begin{cases} e^{3i\pi} = \cos 3\pi + i\sin 3\pi = -1 \\ e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \end{cases}$$

$$= -\frac{1}{3} - 1 - \frac{4}{3} = \boxed{-\frac{8}{3}}$$ 0,25