Université Frères Mentouri
ST 2
Tronc commun 'Sciences et Techniques'

Module :
« Méthodes Numériques »
2014/2015

Contrôle semestriel

Exercice 1

On considère l'équation : f(x)= $X^3 - 3X - 1 = 0$

1- Montrer que cette équation possède une solution unique dans [1,2].
2- Démontrer que la forme g(x)= $(X^3 - 1)/3$ ne permet pas la convergence de la méthode du point fixe.
3- Démontrer que la forme g(x)= $(3X + 1)^{1/3}$ permet la convergence.
4- Calculer les quatre premières itérations à partir de $X_0 = 1$.

Exercice 2

Soit la matrice suivante:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

1- Calculer le déterminant de A par la méthode de Gauss.
2- Déduire le déterminant de A^{-1}.

Exercice 3

Trouver le nombre n d'intervalles nécessaires dans la méthode de Simpson généralisée pour évaluer $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx$ avec une précision de $0.5.10^{-3}$.

Question de cours

Reprendre le développement ayant conduit à la formule de Gauss-Seidel.

Bon courage
Pr. A.Messai

Université Tahar Moulay ... ST 2
Constantine 1 ... Module : M.N
Tronc Commun S.T

Corrigé type
du Contrôle Semestriel

08 pts

EXE 1 1-/ $f(x) = x^3 - 3x - 1$ sol unique ? ds $[1,2]$

$f(1) = -3$, $f(2) = 1$. $f(1) \cdot f(2) < 0$

de plus : $f'(x) = 3x^2 - 3$ (1 pt)

$\forall x \in [1,2]$ $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f \nearrow$

Donc : $\exists c$ (unique) $\in [1,2]$ tel que : $f(c) = 0$ (0.25 pt)

2/- $f(x) = x^3 - 3x - 1 = 0$

$3x = x^3 - 1$ ou $x = \frac{x^3 - 1}{3}$

- $x = g(x) = \frac{x^3 - 1}{3}$

a/- $g : [1,2] \xrightarrow{?} [1,2]$

g est $\nearrow$ dans $[1,2]$. $g(1) = 0 \notin [1,2]$ (1 pt)

$g(2) = \frac{7}{3} \notin [1,2]$

b/- $|g'(x)| = x^2$ et $\max_{[1,2]} |g'(x)| = 4 >> 1$

donc cette forme de g n'assure pas la convergence de la méthode du point fixe

3/- $x^3 = 3x + 1$ ou $x = (3x+1)^{1/3}$ (0.25 pt)

$x = g(x) = (3x+1)^{1/3}$

a/- g est $\nearrow$ dans $[1,2]$. $g(1) = 4^{1/3} = 1.587 \in [1,2]$

$g(2) = 7^{1/3} = 1.913 \in [1,2]$

$g : [1,2] \xrightarrow{\text{vérifiée}} [1,2]$ (1.5 pt) b/ $|g'(x)| = 1/3 \cdot 3 (3x+1)^{-2/3} = (3x+1)^{-2/3} \searrow$ dans $[1,2]$.

1.5

de là : $\forall x \in [1,2]$, $|g'(x)| \leq |g'(2)|$

$|g'(2)| = (3.2+1)^{-2/3} = 7^{-2/3} = 0.396 < 1$.

$\Rightarrow \forall x \in [1,2]$, $|g'(x)| \leq 0.396 < 1$.

Donc cette forme de g assure la convergence de la méthode du ~~Point~~ fixe.

4/ $\begin{cases} X_k = g(X_{k-1}) = (3X_{k-1}+1)^{1/3} \\ X_0 = 1 \end{cases}$

k	
0	1
1	1.5874011
2	1.7927904
3	1.8545417
4	1.8723251

$1.5 p^t$

EXE 2 (03 points)

1/ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$

Etape 1 $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2} L_1$

$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 5/2 \end{bmatrix}$

$1 p^t$

$p^c 2$: $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{(1/2)}{(3/2)} L_2$ ou $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3} L_2$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{bmatrix}$$ 0.75 pt

$\text{Det}\,A = 2 \times (3/2) \cdot (7/3) = 7$ 0.75 pt

2/- on sait que pour les matrices diagonales ou Triangulaires Supérieurs $\text{Det}\,A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}\,A}$

de la : $\text{Det}\,A^{-1} = 1/7$ 0.5 pt

EXE 3 5 pts

Calcul du nombre d'intervalle n dans la méthode de Simpson généralisé qui assure une précision de 0.5×10^{-3} dans le calcul de $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx$ $h = \frac{b-a}{n}$

$|R_{sc}| \leq \frac{n h^5}{180} \cdot M$, $M = \text{Max}\{|f^{(4)}(\xi)|\}$, $\xi \in [-\pi, \pi]$ 1 pt

Pour que $|R_{sc}| \leq \varepsilon$, il suffit que n vérifie 1 pt

$\frac{n h^5}{180} M = \frac{(b-a)^5}{180 n^4} M \leq \varepsilon \Rightarrow n^4 \geq \frac{(b-a)^5}{180\,\varepsilon} \cdot M$

$f(x) = \cos x \Rightarrow |f^{(4)}(x)| = |\cos x|$ 1 pt

$\max_{x \in [-\pi, \pi]} \{|\cos x|\} = 1$

donc : $n \geq \sqrt[4]{\frac{(+\pi - (-\pi))^5}{180 \times 0.5 \times 10^{-3}} \times 1}$ donne 1 pt

$n \geq 18.15$

on prend $n = 20$ 1

Question de Cours (04 points).

$A\vec{X} = \vec{b}$

$A = M - N$

$(M-N)\vec{X} = \vec{b}$

$M\vec{X} = N\vec{X} + \vec{b}$

On obtient : $\vec{X}^{(k+1)} = M^{-1}N\vec{X}^{(k)} + M^{-1}\vec{b}$

à partir de $\vec{X}^{(0)}$

1 Décomposition de A

D : Matrice diagonale telle que : $d_{ii} = a_{ii}$ et $d_{ij} = 0 \; \forall i \neq j$

L : " Triang. Inf telle que :

$l_{ij} = -a_{ij}$ si $i > j$

$l_{ij} = 0$ si $i \leq j$

U : " Triang Sup telle que :

$U_{ij} = -a_{ij}$ si $j > i$

$U_{ij} = 0$ si $j \leq i$

Méth de Gauss-Seidel :

$M = D - L$ et $N = U$

On obtient : $\vec{X}^{(k+1)} = D^{-1}L\vec{X}^{(k+1)} + D^{-1}U\vec{X}^{(k)} + D^{-1}\vec{b}$

ou encore :

$$\begin{cases} X_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}X_2^{(k)} - a_{13}X_3^{(k)} - \dots - a_{1n}X_n^{(k)})/a_{11} \\ X_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}X_1^{(k+1)} - a_{23}X_3^{(k)} - \dots - a_{2n}X_n^{(k)})/a_{22} \\ \dots \\ X_n^{(k+1)} = (b_n - a_{n1}X_1^{(k+1)} - a_{n2}X_2 - \dots - aX^{(k+} \end{cases}$$