Université de Sétif-1
Faculté de Technologie
Tronc Commun ST

$2^{ème}$ année LMD
Date : 22/01/ 2013
Temps alloué : 1h30min

Examen du module Physique 3

Exercice 1 : Question de cours (06 points)

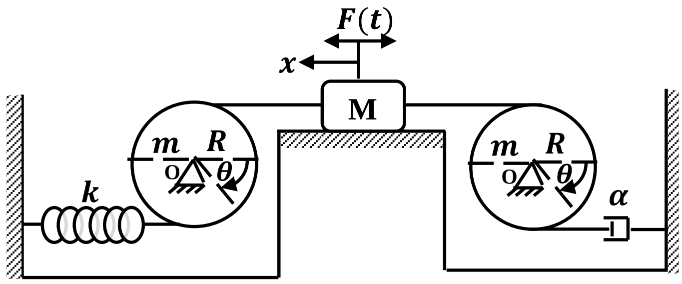
A : Répondez par **Oui « vrai »** ou **Non « faux » : (03 points)**

1. Une onde est dite transversale, si la perturbation est perpendiculaire à la direction de propagation.
2. Une onde est dite longitudinale, si la perturbation est perpendiculaire à la direction de propagation.
3. La direction de propagation est perpendiculaire au plan d'ondes.
4. Les ondes électromagnétiques peuvent se propager dans le vide.
5. Les ondes sonores peuvent se propager dans le vide.
6. Pour une onde progressive périodique, la relation qui relie la longueur d'onde $\lambda = V.T$

B : Démonstration : **(03 points)**
Soit un phénomène de propagation $S(r,t)$**.** Ecrire l'équation d'onde « de propagation » et trouver ses dérivées partielles si on considère le changement de variables suivant :

$$x = t - \frac{r}{v} \quad \text{et} \quad y = t + \frac{r}{v}$$

Exercice 2 : (08 points)



Dans le système de la figure ci-contre, deux disques homogènes de masse m et de moment d'inertie $J_{/0} = \frac{1}{2}mR^2$ peuvent tourner autour de leurs axes O et sont entrainés mutuellement par un fil inextensible et non glissant de masse négligeable.

1- Ecrire le Lagrangien du système en fonction de θ.

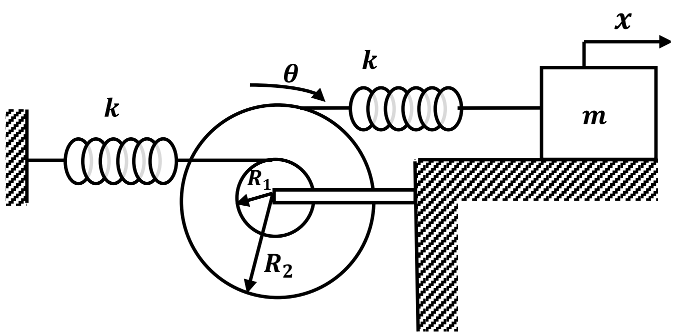
2- On applique une force $F(t) = F_0 sin\omega t$ sur la masse M.

2.1 Trouver l'équation différentielle du mouvement en fonction de θ.

2.2 Trouver l'expression de l'amplitude A et de la phase Ø de la solution particulière représentant le régime permanent.

2.3 Trouver la solution de l'équation différentielle dans le cas ou l'amortissement est faible.

Exercice 3 : (06 points)



La poulie du système ci-contre est constitué de deux disques homogènes de masse m et de rayons respectifs R_1 et R_2 .
Cette poulie tourne sans frottement autour d'un axe fixe. A l'équilibre $\theta = 0$.
La masse m reliée à un bâti fixe par un ressort de raideur k glisse sans frottement sur un plan horizontal.

1. Etablir les équations différentielles du mouvement.
2. Sachant que R_2=2R_1 calculer les pulsations propres et les modes d'oscillation.
3. Déduire les solutions représentant le mouvement global du système

BONNE CHANCE

Correction du module Physique 3 (22/01/ 2013)

Exercice 1 : Question de cours (06 points)

A)

1 :OUI 0.5	2 :NON 0.5	3 :OUI 0.5	4 :OUI 0.5	5 :NON 0.5	6 :OUI 0.5

B)

Soit un phénomène de propagation $\boldsymbol{S(r,t)}$. L'équation de propagation aura la forme :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} \qquad 1$$

On trouve ses dérivées partielles, si on considère le changement de variables suivant :

$$x = t - \frac{r}{v} \quad \text{et} \quad y = t + \frac{r}{v}$$

1. $\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} \qquad (\frac{\partial x}{\partial t} = 1, \frac{\partial y}{\partial t} = 1)$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial S}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right] \qquad 1$$

2. $\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial S}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = -\frac{1}{V}\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{V}\frac{\partial S}{\partial y} = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial S}{\partial x}\right)$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} = \frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial S}{\partial x}\right) = \frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial S}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial S}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = -\frac{1}{V} \; et \; \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{1}{V}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} = -\frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} = \frac{1}{V^2}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right] \qquad 1$$

Exercice 2: (08 points)

1..Le Lagrangien du système

<u>L'énergie cinétique</u> : $\boldsymbol{T = T_M + T_m + T_m}$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_{/0}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_{/0}\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + J_{/0}\dot{\theta}^2, \qquad J_{/0} = \frac{1}{2}mR^2$$

Puisque : $x = R\theta \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta}$

On aura : $T = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow$

$$\boldsymbol{T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2} \qquad 0.5$$

<u>L'énergie Potentielle :</u> $\boldsymbol{U = U_k = \frac{1}{2}kR^2\theta^2}$ 0.5

La Fonction de dissipation : $\boldsymbol{D = \frac{1}{2}\alpha R^2\dot{\theta}^2}$ 0.5

Le Lagrangien du système : $\boldsymbol{T = L - U = \frac{1}{2}(M+m)R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kR^2\theta^2}$ 0.5

2…On applique une force $\boldsymbol{F(t) = F_0 \sin\omega t}$ sur la masse $\boldsymbol{M}$

2.1..L'équation différentielle du mouvement forcé amorti en fonction de **θ :**

L'équation de Lagrange est : $\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial\theta}\right) = -\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} + \mathcal{M}(F(t))\right.$ 0.5

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = (M+m)R^2\dot{\theta} \text{ .. 0.25} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = (M+m)R^2\ddot{\theta} \text{ 0.25} \\ \frac{\partial L}{\partial\theta} = -kR^2\theta \text{ .. 0.25} \\ \frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} = \alpha R^2\dot{\theta} \text{ .. 0.25} \end{array}\right. \Longrightarrow (M+m)R^2\ddot{\theta} + \alpha R^2\dot{\theta} + kR^2\theta = F_0 R \sin\omega t$$

$$(M+m)R^2\ddot{\theta} + \alpha R^2\dot{\theta} + kR^2\theta = F_0 R \sin\omega t$$ 0.5

2.2..En utilisant la notation complexe, on trouve l'expression de l'amplitude **A** et de la phase ∅ de la solution particulière représentant le régime permanent :

On divise sur $(M+m)R^2$ on obtient : $\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{(M+m)}\dot{\theta} + \frac{k}{(M+m)}\theta = \frac{F_0 R}{(M+m)R^2}\sin\omega t$

L'équation différentielle peut être écrite sous la forme réduite :

$$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = B\sin\omega t$$ 0.25

Tel que : $2\delta = \frac{\alpha}{(M+m)}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{(M+m)}$ *et* $B = \frac{F_0 R}{(M+m)R^2}$

0.25 0.25 0.25

La grandeur complexe associée à $\theta(t)$ s'écrit :

$$\theta_P(t) = A\, e^{j(\omega t+\varphi)} \text{ et } F(t) = F_0 e^{j\omega t}$$ 0. 5

Calcul de l'amplitude A

$\theta_P(t)$ Vérifie l'équation différentielle avec second membre : $\ddot{\theta}_P + 2\delta\,\dot{\theta}_P + \omega^2{}_0\theta_P = Be^{j\omega t}$ **(*)**

Calculons la dérivée première puis le dérivé second :

$$\theta_P(t) = A\, e^{j(\omega t+\varphi)} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{\theta}_P(t) = A\, j\omega\, e^{j(\omega t+\varphi)} = j\omega\, \theta_P(t) \\ \ddot{\theta}_P(t) = Aj^2\omega^2 e^{j(\omega t+\varphi)} = -\omega^2\, \theta_P(t) \end{array}\right.$$

On remplace dans **(*)** et on trouve : $-\omega^2\, \mathfrak{z}_P(t) + 2\delta j\omega\, \mathfrak{z}_P(t) + \omega^2{}_0\, \mathfrak{z}_P(t) = Be^{j\omega t}$

$$\Longrightarrow [(\omega^2{}_0 - \omega^2) + 2\delta\omega j]\, \mathfrak{z}_P(t) = [(\omega^2{}_0 - \omega^2) + 2\delta\omega j]\, A\, e^{j(\cancel{\omega t}+\varphi)} = \boldsymbol{B}e^{\cancel{j\omega t}}$$

$$\Longrightarrow [(\omega^2{}_0 - \omega^2) + 2\delta\omega j]\, Ae^{j\varphi} = B$$

On divise sur "$e^{j\varphi}$" et on trouve: $[(\omega^2{}_0 - \omega^2) + 2\delta\omega j]\, A = Be^{-j\varphi}$ … … … (1)

Le conjugué de cette équation est la suivante : $[(\omega^2{}_0 - \omega^2) - 2\delta\omega j]\, A = Be^{j\varphi}$ … … … (2)

$$(1) \text{ X } (2) \Longrightarrow A^2[(\omega^2{}_0 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2] = B^2 \Longrightarrow \boldsymbol{A} = \frac{B}{\sqrt{(\omega^2{}_0 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} = \text{cte}$$ 1

Calcul de ∅

$$[(\omega^2{}_0-\omega^2)+2\delta\omega j]\,A=\begin{cases} Be^{-j\varphi} \\ B\,(\cos\varphi - j\,\sin\varphi)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(\omega^2{}_0-\omega^2)=B\cos\varphi \\ 2\delta\omega A=-B\sin\varphi\end{cases}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{tg\emptyset}=\frac{\boldsymbol{-2\delta\omega}}{\boldsymbol{(\omega^2{}_0-\omega^2)}} \quad 1 \quad \Rightarrow \emptyset = Arctg\,(\frac{-2\delta\omega}{(\omega^2{}_0-\omega^2)}$$

Donc : $\boldsymbol{\theta_P(t)}=\frac{\boldsymbol{B}}{\sqrt{(\omega^2{}_0-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}}\boldsymbol{sin}\left[\boldsymbol{\omega \mathrm{t}+Arctg}\ \frac{\boldsymbol{-2\delta\omega}}{\boldsymbol{(\omega^2{}_0-\omega^2)}}\right]$

1.1 La solution de l'équation différentielle dans le cas ou l'amortissement est faible :

La solution générale de l'équation différentielle: $\boldsymbol{\theta(t)=\theta_H(t)+\ \theta_P(t)}$

$\boldsymbol{\theta_H(t)}$ est la solution de l'équation différentielle sans le second membre :

$$\boldsymbol{\ddot{\theta}+2\delta\dot{\theta}+\omega_0{}^2\theta=0}$$

La solution homogène est celle d'un oscillateur harmonique amorti en régime libre dans le cas des oscillations faiblement amorties : $\boldsymbol{\theta_H(t)=C\,e^{-\delta t}\sin(\omega_a t+\varphi)}$ avec $\boldsymbol{\omega_a=\sqrt{\omega_0{}^2\ -\delta^2}}$

Donc : $\boldsymbol{\theta(t)=C\,e^{-\delta t}\sin(\omega_a t+\varphi)}+\frac{\boldsymbol{B}}{\sqrt{(\omega^2{}_0-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}}\boldsymbol{sin}\left[\boldsymbol{\omega \mathrm{t}+Arctg}\ \frac{\boldsymbol{-2\delta\omega}}{\boldsymbol{(\omega^2{}_0-\omega^2)}}\right]$ **0.5**

Exercice 3 : (06 points)

1. Les équations différentielles du mouvement :

- L'énergie cinétique :

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}J_{/0}\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}J_{/0}\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}mR_1{}^2)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}mR_2{}^2)\dot{\theta}^2$$

$$\boldsymbol{T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{4}m(R_1{}^2+R_2{}^2)\dot{\theta}^2} \quad \mathbf{0.5}$$

- L'énergie potentielle :

$$\boldsymbol{U=\frac{1}{2}kR_1{}^2\theta^2+\frac{1}{2}k(R_2\theta-x)^2} \quad \mathbf{0.5}$$

La fonction de Lagrange :

$$\boldsymbol{T=L-U=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{4}m(R_1{}^2+R_2{}^2)\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}kR_1{}^2\theta^2-\frac{1}{2}k(R_2\theta-x)^2} \quad \mathbf{0.5}$$

On voit bien deux coordonnées généralisés, donc les équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial\theta}\right)=0} \\ \boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)=0}\end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{1}{2}m(R_1{}^2+R_2{}^2)\dot{\theta}} \\ \boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=\frac{1}{2}m(R_1{}^2+R_2{}^2)\ddot{\theta}} \quad \mathbf{0.25} \\ \boldsymbol{\frac{\partial L}{\partial\theta}=-kR^2{}_1\theta-kR_2(R_2\theta-x)} \quad \mathbf{0.5}\end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{1}{2}m(R_1{}^2+R_2{}^2)\ddot{\theta}+kR^2{}_1\theta+kR_2(R_2\theta-x)=0}$$

On déduit la première équation différentielle du mouvement :

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}m\left(R_1{}^2+R_2{}^2\right)\ddot{\theta}+k(R^2{}_1+R^2{}_2)\theta-kR_2x=0}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=m\dot{x}} \quad \mathbf{0.25} \\ \boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)=m\ddot{x}} \\ \boldsymbol{\frac{\partial L}{\partial x}=+k(R_2\theta-x)} \quad \mathbf{0.25}\end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{m\ddot{x}-k(R_2\theta-x)=0} \quad \mathbf{0.25}$$

On déduit la deuxième équation différentielle du mouvement :

$$m\ddot{x} + kx - kR_2\theta = 0 \quad 0.25$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m\left({R_1}^2 + {R_2}^2\right)\ddot{\theta} + k({R^2}_1 + {R^2}_2)\theta - kR_2x = 0 \\ m\ddot{x} + kx - kR_2\theta = 0 \end{cases}$$

2. Les pulsations propres du système : $R_2 = 2R_1$

Les équations différentielles s deviennent :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m\left({R_1}^2 + 4{R_1}^2\right)\ddot{\theta} + k({R^2}_1 + 4{R^2}_1)\theta - 2kR_1x = 0 \\ m\ddot{x} + kx - 2kR_1\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{2}m{R_1}^2\ddot{\theta} + 5k{R_1}^2\theta - 2kR_1x = 0 \\ m\ddot{x} + kx - 2kR_1\theta = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} \frac{5}{2}mR_1\ddot{\theta} + 5kR_1\theta - 2kx = 0 \\ m\ddot{x} + kx - 2kR_1\theta = 0 \end{cases}$ **On divise sur $\frac{5}{2}R_1$** $\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{\theta} + 2k\theta - \frac{4}{5R_1}kx = 0 \\ m\ddot{x} + kx - 2kR_1\theta = 0 \end{cases}$

On suppose que les solutions sont sinusoïdales donc : $\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x \\ \ddot{\theta} = -\omega^2\theta \end{cases}$ 0.25

$$\begin{cases} (2k - m\omega^2)\theta - \frac{4}{5R_1}kx = 0 \\ -2kR_1\theta + (k - m\omega^2)x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} (2k - m\omega^2) & -\frac{4}{5R_1}k \\ -2kR_1 & (k - m\omega^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C'est deux équations admettent une solution si : $\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -\frac{4}{5R_1}k \\ -2kR_1 & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$ 0. 5

$$(2k - m\omega^2)(k - m\omega^2) - 2kR_1.\frac{4}{5R_1}k = 0$$

$$\Rightarrow (2k - m\omega^2)(k - m\omega^2) - \frac{8}{5}k^2 = 0 \Rightarrow m^2\omega^4 - 3km\omega^2 + \frac{2}{5}k^2 = 0 \quad 0.25$$

Pour cela, nous allons réaliser un changement d'inconnue.

On pose $\omega^2 = w \Rightarrow m^2w^2 - 3kmw + \frac{2}{5}k^2 =$ 0.25

$\Delta = 7.4m^2k^2 > 0$

$\begin{cases} w1 = \omega_1^2 = 2.86\ \frac{k}{m} & 0.25 \\ w2 = \omega_{21}^2 = 0.14\ \frac{k}{m} & 0.25 \end{cases}$

Recherche des modes propres : on remplace les pulsations dans $\begin{cases} (2k - m\omega^2)\theta - \frac{4}{5R_1}kx = 0 \\ -2kR_1\theta + (k - m\omega^2)x = 0 \end{cases}$

$\omega_1^2 = 2.86\ \frac{k}{m} \Rightarrow \frac{\theta}{x} = -\frac{0.93}{R_1}$

$\rightarrow \overrightarrow{V1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1.1R_1 \end{pmatrix}$ 0.25

$\omega_2^2 = 0.14\ \frac{k}{m} \Rightarrow \frac{\theta}{x} = \frac{0.43}{R_1}$

$\rightarrow \overrightarrow{V2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2.3R_1 \end{pmatrix}$ 0.25

Donc la solution est :

$$\begin{pmatrix} \theta(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}1R_1 \end{pmatrix} \sin(\omega_1 t + \varphi) + B\begin{pmatrix} 1 \\ 2.3R_1 \end{pmatrix} \sin(\omega_2 t + \varphi')$$

$$\begin{cases} \theta(t) = A\sin(\omega_1 t + \varphi) + B\sin(\omega_2 t + \varphi') \\ x(t) = -1{,}1\boldsymbol{R_1}A\sin(\omega_1 t + \varphi) + 2.3\boldsymbol{R_1}\sin(\omega_2 t + \varphi') \end{cases} \quad 0.5$$

Université Ferhat Abbas – Sétif
Faculté de technologie
Tronc Commun S.T.

2ème Année LMD
05 Février 2013
Temps alloué : 1h30

Examen spécial du module Physique 3

Exercice 1 : Questions de cours (06 points)
A : Démonstration : **(03 points)**

Soit un phénomène de propagation $S(r,t)$. Ecrire l'équation d'onde « de propagation » et trouver ses dérivées partielles si on considère le changement de variables suivant :

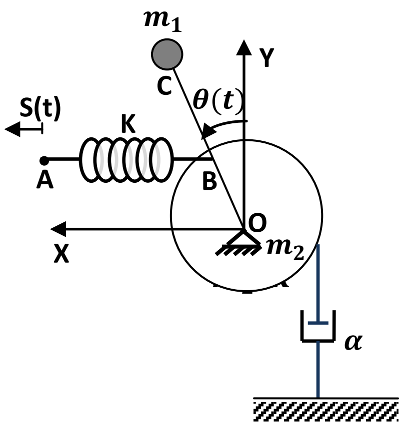
$$x = t - \frac{r}{v} \quad \text{et} \quad y = t + \frac{r}{v}$$

B : Répondez par **Oui « vrai »** ou **Non « faux »** : **(03 points)**

1. Pour une onde progressive périodique, la relation qui relie la longueur d'onde $\lambda = V.T.$
2. La direction de propagation est perpendiculaire au plan d'ondes.
3. Une onde est dite transversale, si la perturbation est perpendiculaire à la direction de propagation.
4. Les ondes électromagnétiques peuvent se propager dans le vide.
5. Les ondes sonores sont considérées comme des ondes tridimensionnelles.

Exercice 02 (07points)

Une barre, sans masse et de longueur **L** porte à son extrémité une masse m_1, et un disque homogène (m_2, R) sont solidaires et peuvent osciller autour d'un axe fixe **O**. L'ensemble est relié avec un ressort **K** et un amortisseur α. Le point **A** est soumis à un déplacement horizontal sinusoïdal **:** $S(t) = S_0\cos(\Omega t)$, à l'équilibre $\theta = 0$, (voir figure).



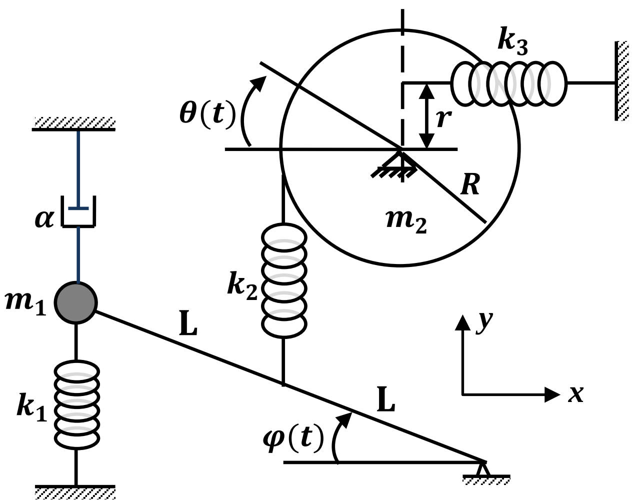
On prendra : $4m_1 = \frac{m_2}{2} = m$, $\alpha = \frac{\sqrt{km}}{2}$

$$J/_O = \frac{1}{2} m_2 R^2 \,, \overline{OB} = \overline{BC} = \frac{L}{2} = R$$

1. Calculer le Lagrangien du système.
2. Déduire l'équation différentielle du mouvement forcé amorti.
3. Trouver les expressions de l'amplitude A et de la phase Φ de la solution particulière représentant le régime permanent.

Exercice 03 (07points)

Un pendule simple $(m_1, 2L)$ est attaché à un disque (m_2, R) qui peut tourner autour de son centre de gravité. Les deux masses oscillent d'une façon libre et forment deux petits angles $\theta(t)$ et $\varphi(t)$ (Voir figure).



1. Donner les équations différentielles du mouvement.
2. Donner la solution des équations du mouvement.

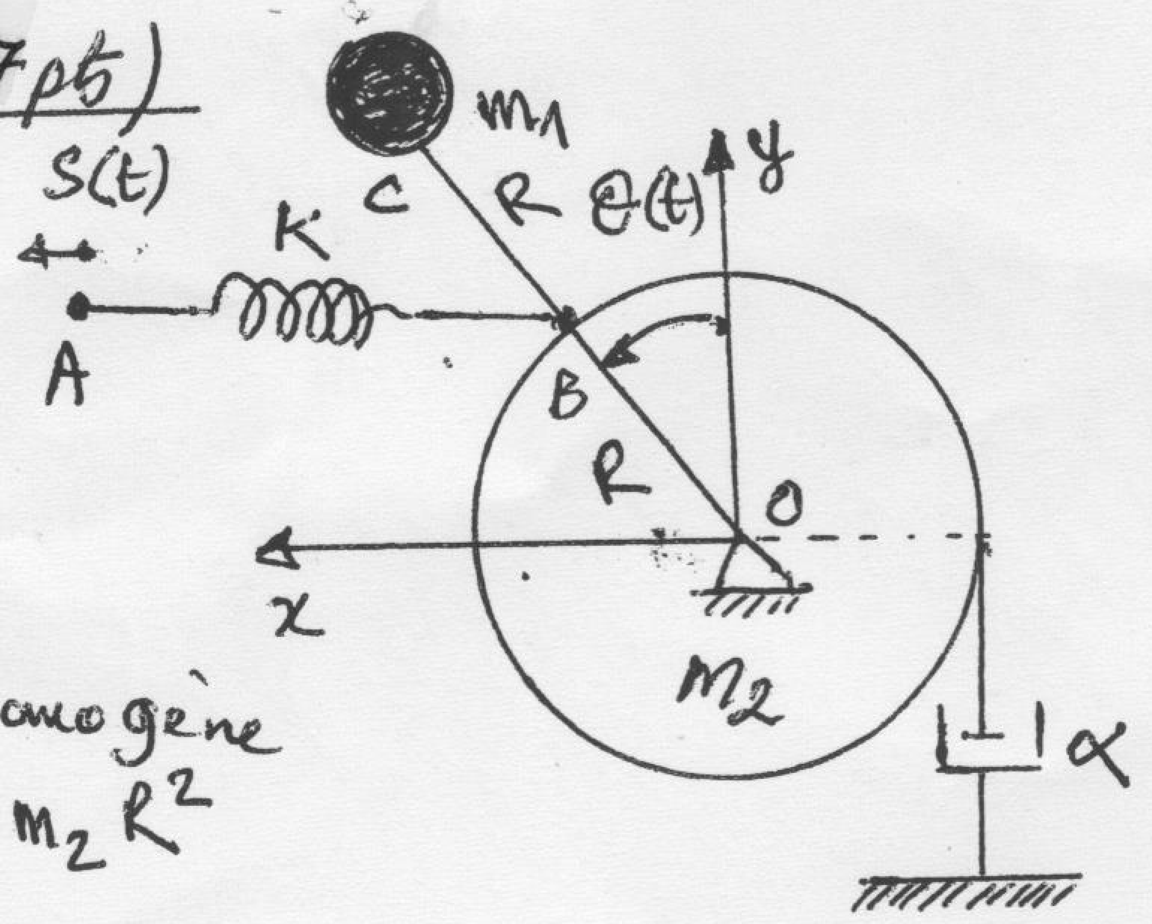
   On donne: $J_{/o} = \frac{1}{2}MR^2$

   $L = R = 2r$, $m_1 = m$,

   $m_2 = 2m$ et $\alpha = 0$

   $k_1 = k_2 = k$ et $k_3 = 4k$

Exo2 (07pts)



disque homogène
$J_{/O} = \frac{1}{2} m_2 R^2$

$S(t) = S_0 \cos \Omega t$

$4m_1 = \frac{m_2}{2} = m$, $\alpha = \frac{\sqrt{Km}}{2}$, $\overline{OB} = \overline{OC} = \frac{L}{2} = R$

1- Ecriture de l'équa. diff. du mvt forcé amorti

* Coordonnées de m_1

$$m_1 \begin{cases} +2R\sin\theta \\ +2R\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2R\dot\theta\cos\theta \\ -2R\dot\theta\sin\theta \end{cases}$$

• Energie cinétique $T = T_{m_1} + T_{m_2}$

$$T = \frac{1}{2} m_1 (2R\dot\theta)^2 + \frac{1}{2} J_{/O}\dot\theta^2 \rightarrow 1pt$$

• Energie potentielle $U = U_{m_1} + U_K$ 1pt

$$U = 2m_1 gR\cos\theta + \frac{1}{2} K(S(t) - R\theta)^2$$

• fonction de dissipation $D = \frac{1}{2}\alpha(R\dot\theta)^2 \rightarrow 0,5$

• Fonction de Lagrange $L = T - U$

$$L = \frac{1}{2} m_1 (2R\dot\theta)^2 + \frac{1}{2} J_{/O}\dot\theta^2 - 2m_1 gR\cos\theta - \frac{1}{2} K(S - R\theta)^2$$

• Formalisme de Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot\theta}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = m_1 (2R\dot\theta)(2R) + J_{/O}\dot\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = (4m_1R^2 + J_{/O})\ddot\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 2m_1 gR\sin\theta - K(-R)(S - R\theta)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot\theta} = \alpha R^2 \dot\theta$$

1pt

L'équa. diff. s'écrit comme

$$(4m_1R^2 + J_{/O})\ddot\theta - 2m_1 gR\sin\theta - KR(S - R\theta) = -\alpha R^2\dot\theta \Rightarrow$$

$$(4m_1R^2 + J_{/O})\ddot\theta + \alpha R^2\dot\theta + (KR^2 - 2m_1 gR)\theta = KR\,S(t) \quad (1)$$

2- Trouvons les expressions de l'amplitude A et de la phase ϕ de la solut. parti. représentant le régime permanent

En remplaçant par les données de m,

$$2mR^2\ddot\theta + \alpha R^2\dot\theta + \left(KR^2 - \frac{mgR}{2}\right)\theta = KR\,S(t) \quad (2)$$

• On peut écrire (2) comme 0,25

$$\ddot\theta + 2\delta\dot\theta + \omega_0^2\theta = B\cos\Omega t \quad \text{tel que} \quad (3)$$

$$2\delta = \frac{\alpha}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{KR^2 - mgR/2}{2mR^2}, \quad B = \frac{KRS_0}{2mR^2}$$

0,25 0,25

la solution $\theta(t) = \theta_h(t) + \theta_p(t)$

qd $\delta < \omega_0$ $\theta_h(t) = Ce^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \varphi)$ 0,25

$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$$\theta_p(t) = Ae^{j(\Omega t + \phi)} \rightarrow 0,5$$

$$\dot\theta_p(t) = A(j\Omega)e^{j(\Omega t + \phi)}$$

$$\ddot\theta_p(t) = -A\Omega^2 e^{j(\Omega t + \phi)}$$ dans (3)

En remplaçant $\ddot\theta_p$, $\dot\theta_p$ et θ_p

$$\Rightarrow -A\Omega^2 e^{j(\Omega t + \phi)} + 2\delta A(j\Omega)e^{j(\Omega t + \phi)} + \omega_0^2 A e^{j(\Omega t + \phi)} = Be^{j\Omega t}$$

$$Ae^{j(\Omega t + \phi)}\left[(\omega_0^2 - \Omega^2) + j(2\delta\Omega)\right] = Be^{j\Omega t}$$

$$A\left[(\omega_0^2 - \Omega^2) + j(2\delta\Omega)\right] = B(\cos\phi - j\sin\phi)$$

$$\begin{cases} A(\omega_0^2 - \Omega^2) = B\cos\phi \quad (4) \\ A(2\delta\Omega) = -B\sin\phi \quad (5) \end{cases}$$

$(4)^2 + (5)^2 \Rightarrow A^2\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2\right] = B^2$

$$A = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} \rightarrow 1pt$$

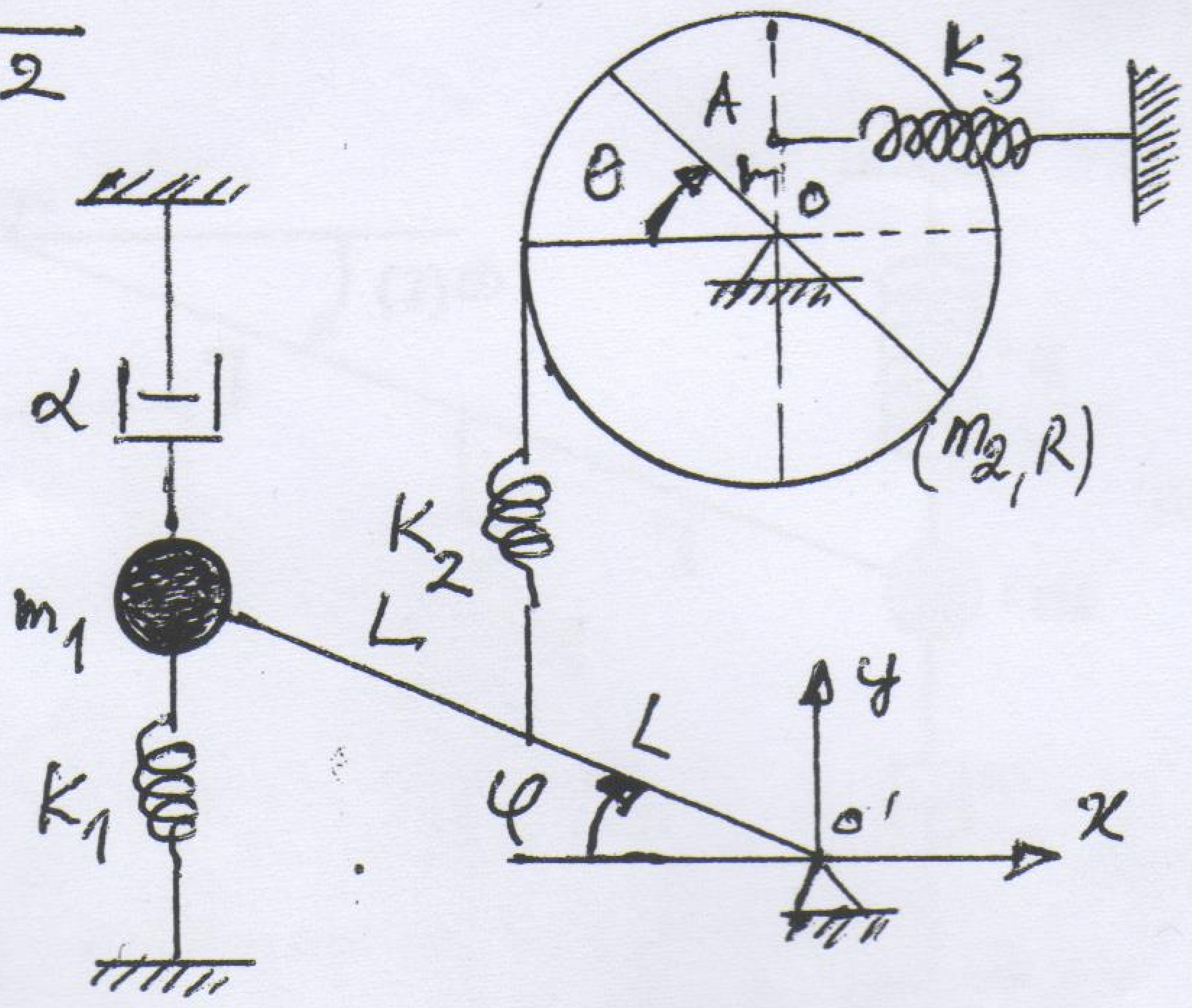
$\frac{(5)}{(4)} \Rightarrow tg\phi = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \Rightarrow$

$$\phi = Arctg - \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \rightarrow 1pt$$

Exercice 03

$OA = r = \frac{R}{2}$

$J_{/0} = \frac{1}{2} m_2 R^2$



1- Calcul des équa. diff. du mvt

- Coordonnées de la masse m_1

$m_1 \begin{cases} -2L\cos\varphi \\ +2L\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2L\dot\varphi\sin\varphi \\ 2L\dot\varphi\cos\varphi \end{cases}$

- Energie cinétique $T = T_{m_1} + T_{m_2}$

$T = \frac{1}{2} m_1 (2L\dot\varphi)^2 + \frac{1}{2} J_{/0}\dot\theta^2$ (1pt)

- Energie potentielle $U = U_{K_1} + U_{K_2} + U_{K_3}$

$U = \frac{1}{2} K_1 (2L\sin\varphi)^2 + \frac{1}{2} K_2 (R\theta - L\sin\varphi)^2 + \frac{1}{2} K_3 (r\sin\theta)^2$ (1,5)

- Fonction de Dissipation $D = \frac{1}{2}\alpha(2L\dot\varphi\cos\varphi)^2$ (0,5)

- Fonction de Lagrange $L = T - U$

$L = \frac{1}{2} m_1 (2L\dot\varphi)^2 + \frac{1}{2} J_{/0}\dot\theta^2 - \frac{1}{2} K_1 (2L\sin\varphi)^2 - \frac{1}{2} K_2 (R\theta - L\sin\varphi)^2 - \frac{1}{2} K_3 (r\sin\theta)^2$

- Formalismes de Lagrange $\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{\partial D}{\partial \dot\varphi} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot\theta} = 0 \end{cases}$

$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m_1 (2L)^2\dot\varphi \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) = 4 m_1 l^2 \ddot\varphi$

$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -K_1 (2L\cos\varphi)(2L\sin\varphi) - K_2(-L\cos\varphi)(R\theta - L\sin\varphi)$

$\frac{\partial D}{\partial \dot\varphi} = \alpha(2L\cos\varphi)(2L\dot\varphi\cos\varphi)$

$4 m_1 L^2 \ddot\varphi + 4\alpha L^2 \dot\varphi + 4 K_1 l^2 \varphi - K_2 L (R\theta - L\varphi) = 0$

$\Rightarrow 4 m_1 L^2 \ddot\varphi + 4\alpha L^2 \dot\varphi + 4L^2(K_1 + K_2)\varphi - K_2 L R\theta = 0$ (0,5)

$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = J_{/0}\dot\theta \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = J_{/0}\ddot\theta$

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -K_2 (R)(R\theta - L\sin\varphi) - K_3 (r\cos\theta)(r\sin\theta)$

$J_{/0}\ddot\theta + K_2 R (R\theta - L\varphi) + K_3 r^2 \theta = 0$

$J_{/0}\ddot\theta + (K_2 R^2 + K_3 r^2)\theta - K_2 R L \varphi = 0$ (0,5)

2- Ecriture des solutions du mvt qd

$L = R = 2r$, $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $\alpha = 0$

$K_1 = K_2 = K$, $K_3 = 4K$ + Solutions sinusoïdales

$\begin{cases} 4mL^2\ddot\varphi + 4L^2(2K)\varphi - KL^2\theta = 0 \\ mL^2\ddot\theta + 2KL^2\theta - KL^2\varphi = 0 \end{cases}$

des sol. sin. donc $\begin{cases} \ddot\varphi = -\omega^2\varphi \\ \ddot\theta = -\omega^2\theta \end{cases}$ (0,5)

$(I)\begin{cases} (8K - 4m\omega^2)\varphi - K\theta = 0 \\ -K\varphi + (2K - m\omega^2)\theta = 0 \end{cases}$

on peut écrire l'ensemble (I) comme

$\begin{pmatrix} 4(2K - m\omega^2) & -K \\ -K & 2K - m\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

l'équation aux valeurs propres satisfait

$\begin{vmatrix} 4(2K - m\omega^2) & -K \\ -K & 2K - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$ (0,5)

$4(2K - m\omega^2)^2 - K^2 = 0$ Equa. aux valeurs propres

$(2(2K - m\omega^2) + K)(2(2K - m\omega^2) - K) = 0$

$\omega_1^2 = \frac{5K}{2m}$ $\omega_2^2 = \frac{3K}{2m}$ (0,5)

- Recherche des modes propres

* 1er Mode propre qd $\omega^2 = \omega_1^2 = \frac{5K}{2m}$

$\begin{pmatrix} 4(2K - m\omega_1^2) & -K \\ -K & 2K - m\omega_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (0,5)

$-K\varphi + \left(2K - m\frac{5K}{2m}\right)\theta = 0$

$-K\varphi - \frac{K}{2}\theta = 0 \Rightarrow \frac{\varphi}{\theta} = -1/2 \Rightarrow \vec V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

* 2ème Mode propre qd $\omega^2 = \omega_2^2 = \frac{3K}{2m}$ (0,5)

$-K\varphi + \left(2K - m\frac{3K}{2m}\right)\theta = 0$

$-K\varphi + \frac{K}{2}\theta \Rightarrow \frac{\varphi}{\theta} = 1/2 \Rightarrow \vec V_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$