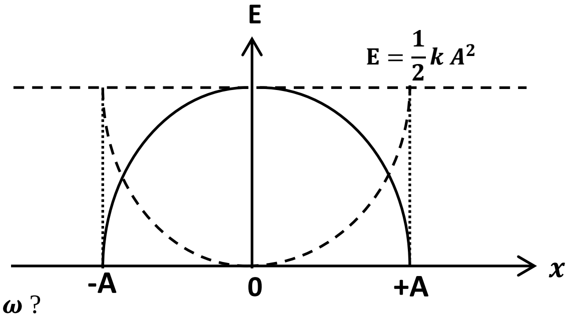
Université Ferhat Abbas – Sétif | *2èmeAnnée LMD*
Faculté de technologie | **Examen de Physique 3** | *25 Février 2012*
Tronc Commun S.T | *Temps alloué : 1h30*

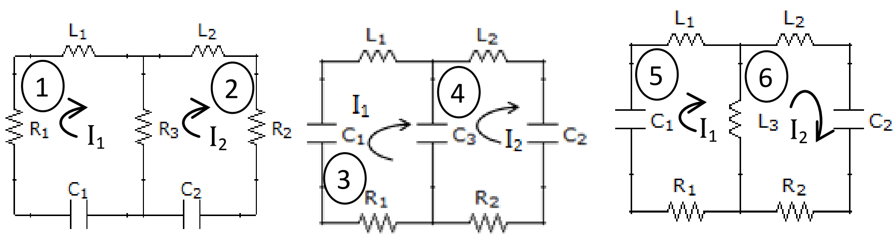
Exercice 1 : Questions de cours (05 points)

Donnez la bonne réponse :



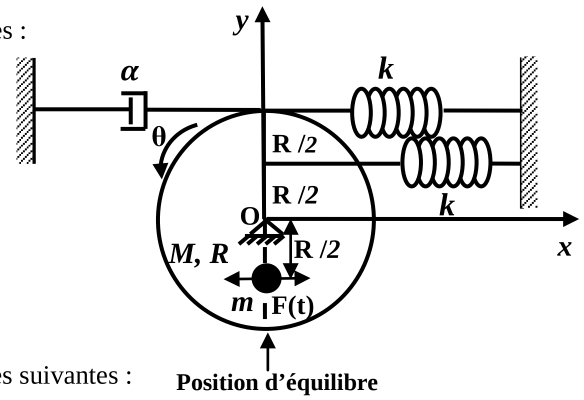
1- Dans la courbe ci contre, on trace l'énergie totale en fonction du déplacement x, pour un système libre non amorti (masse-ressort):
   a- L'énergie cinétique diminue en s'approchant de $\mathbf{0}$.
   b- L'énergie potentielle diminue en s'approchant de $\mathbf{0}$.
   c- L'énergie cinétique augmente en s'approchant de $\pm A$.
   d- L'énergie potentielle augmente en s'approchant de $\pm A$.
2- Pour un système amorti, la pulsation correspondante est ω_0, ω_a *ou* ω ?
3- On calcule le décrément logarithmique dans le cas d'un système : fortement amorti, faiblement amorti ou critique ?
4- Pour un amortissement critique, le système oscillant revient à l'équilibre lentement, rapidement ou jamais ?
5- Pour un système non amorti, l'amplitude à la résonance est infinie, maximale ou nulle ?
6- Pour un système amorti, l'amplitude à la résonance, est infinie, maximale ou nulle ?
7- Faites associer les équations suivantes avec les mailles correspondantes :

$$\begin{cases} L_1\ddot{q}_1 + (R_1+R_3)\dot{q}_1 + \frac{1}{C_1}q_1 = R_3\dot{q}_2 \\ L_1\ddot{q}_1 + R_1\dot{q}_1 + \left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_3}\right)q_1 = \frac{1}{C_3}q_2 \\ (L_1+L_3)\ddot{q}_1 + R_1\dot{q}_1 + \frac{1}{C_1}q_1 = L_3\ddot{q}_2 \\ L_2\ddot{q}_2 + (R_2+R_3)\dot{q}_2 + \frac{1}{C_2}q_2 = R_3\dot{q}_1 \\ L_2\ddot{q}_2 + R_2\dot{q}_2 + \left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}\right)q_2 = \frac{1}{C_3}q_1 \\ (L_2+L_3)\ddot{q}_2 + R_2\dot{q}_2 + \frac{1}{C_2}q_2 = L_3\ddot{q}_1 \end{cases}$$



Exercice 2(08 points)

Un système constitué d'un disque circulaire, homogène, de masse **M** et de rayon **R**, peut osciller sans frottement autour de son axe horizontal **O**. Ce disque est relié à un bâti par deux ressorts de raideur k, à une distance **R** et **R/2** successivement et d'un amortisseur de coefficient α. Une masse m est fixée au disque à une distance **R/2** de **O** et fait un mouvement circulaire avec le mouvement du disque. Cette masse est soumise à une force ***F(t)*** sinusoïdale, d'amplitude $\mathbf{F_0}$ et de pulsation ω, tel que $F(t) = F_0 sin\omega t$. En considérant les oscillations de faibles amplitudes :



1- Déterminer le Lagrangien du système en fonction de θ.
2- Déterminer l'équation différentielle du mouvement.
3- Calculer l'expression de l'amplitude $A(\omega)$ et la phase $\phi(\omega)$. On donne ($j_{/O} = \frac{1}{2}MR^2$)

Exercices 03 (07Points)

Les équations de mouvement d'un système à deux degrés de liberté sont les suivantes :

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} k & -2k \\ -2k & 2k \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

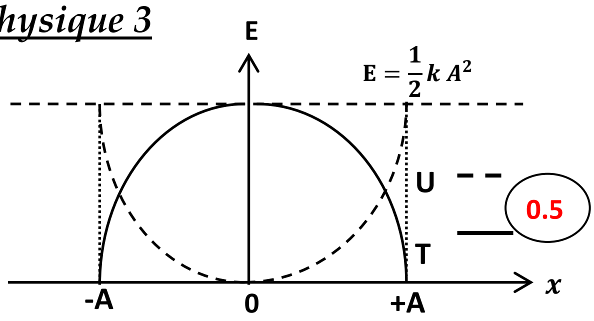
On fait l'hypothèse que le système admet des solutions sinusoïdales.

- Donnez la solution des équations différentielles du mouvement.

On donne les conditions d'équilibres suivantes : $x_1(0) = x_0$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$ et $\dot{x}_2(0) = 0$.

Bon courage

Solution de l'Examen de Physique 3



Exercice 1 : Questions de cours (05 points)

Donnez la bonne réponse :

1. Dans la courbe ci contre, on trace l'énergie totale en fonction du déplacement x, pour un système libre non amorti (masse-ressort):

L'énergie potentielle diminue en s'approchant de **0** 0.25

L'énergie potentielle augmente en s'approchant de $\pm A$. 0.25

2. Pour un système amorti, la pulsation correspondante est ω_a 0. 5

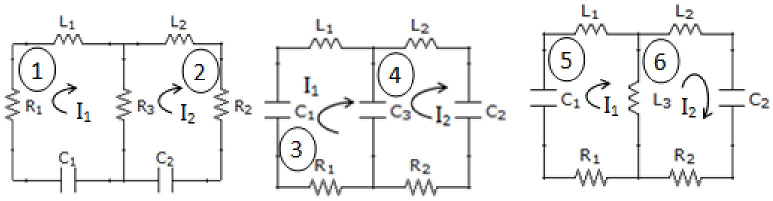
3. On calcule le décrément logarithmique dans le cas d'un système faiblement amorti. 0. 5

   Pour un amortissement critique, le système oscillant revient à l'équilibre rapidement 0. 5

4. Pour un système non amorti, l'amplitude à la résonance est infinie. 0. 5

5. Pour un système amorti, l'amplitude à la résonance maximale. 0. 5

6. On associe les équations suivantes avec les mailles correspondant :



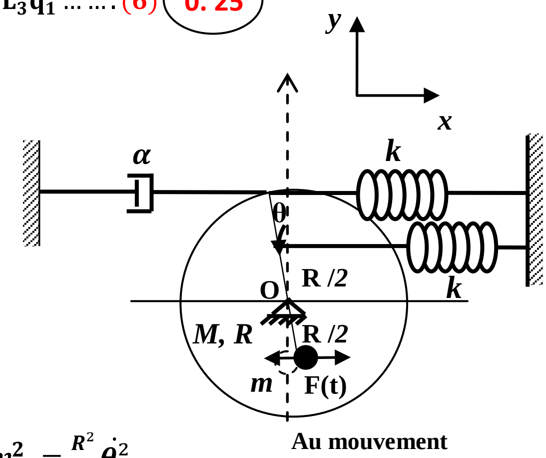
$$\begin{cases} L_1\ddot{q}_1 + (R_1+R_3)\dot{q}_1 + \frac{1}{C_1}q_1 = R_3\dot{q}_2 \;\ldots\ldots (1) & 0.25 \\ L_1\ddot{q}_1 + R_1\dot{q}_1 + \left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_3}\right)q_1 = \frac{1}{C_3}q_2 \;\ldots\ldots (3) & 0.25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (L_1+L_3)\ddot{q}_1 + R_1\dot{q}_1 + \frac{1}{C_1}q_1 = L_3\ddot{q}_2 \;\ldots\ldots (5) & 0.25 \\ L_2\ddot{q}_2 + (R_2+R_3)\dot{q}_2 + \frac{1}{C_2}q_2 = R_3\dot{q}_1 \;\ldots\ldots (2) & 0.25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_2\ddot{q}_2 + R_2\dot{q}_2 + \left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}\right)q_2 = \frac{1}{C_3}q_1 \;\ldots\ldots (4) & 0.25 \\ (L_2+L_3)\ddot{q}_2 + R_2\dot{q}_2 + \frac{1}{C_2}q_2 = L_3\ddot{q}_1 \;\ldots\ldots (6) & 0.25 \end{cases}$$

Exercice 2(08 points)

1. **Le Lagrangien du système en fonction de θ.**



- **Les coordonnées des éléments du système** :

❖ Le disque M effectue un mouvement de rotation autour de O donc: **Le déplacement de M :** $R\theta \rightarrow v_M^2 = R^2\dot{\theta}^2$

❖ La masse m se trouve à une distance $\frac{R}{2}$ de O et effectue un mouvement circulaire, donc :

Les coordonnées de m : $\begin{cases} x_m = \frac{R}{2}\sin\theta \\ y_m = -\frac{R}{2}\cos\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_m = \frac{R}{2}\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_m = \frac{R}{2}\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow v_m^2 = \frac{R^2}{4}\dot{\theta}^2$

❖ Le premier ressort est lié au disque en un point du contour et se déplace suivant (Ox) :
Donc : $x_k = R\theta$

❖ Le deuxième ressort est lié au disque en un point à une distance $\frac{R}{2}$ de **O** et se déplace suivant (Ox) :

Donc : $x_k = \frac{R}{2}\sin\theta$.

❖ L'amortisseur est lié au disque en un point du contour et se déplace suivant (Ox) :
Donc : $x_\alpha = R\theta \rightarrow \dot{x}_\alpha = R\dot{\theta}$

Solution de l'Examen de Physique 3(Suite)

- **L'énergie cinétique du système** : $T = T_M + T_m$
  - L'énergie cinétique de la masse M : $T_M = \frac{1}{2} J_{/O}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{4}\boldsymbol{MR^2\dot{\theta}^2}$
  - L'énergie cinétique de la masse m : $\boldsymbol{T_m = \frac{1}{2} m \frac{R^2}{4}\dot{\theta}^2}$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2} + \frac{m}{4}\right)R^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow \boldsymbol{T = \frac{1}{2}\left(\frac{2M+m}{4}\right)R^2\dot{\theta}^2}$$ 1pt

- **L'énergie potentielle du système** : $U_{Totale} = U_k + U_k + U_m \quad (U_m \neq 0)$
  On choisi l'axe (Ox) comme origine des énergies potentielles $(\mathrm{U}(0) = 0)$
- $U_k = \frac{1}{2}k\, {x_k}^2 = \frac{1}{2}k\, (\boldsymbol{R\theta})^2$
- $U_k = \frac{1}{2}k\, {x_k}^2 = \frac{1}{2}k\, (\boldsymbol{\frac{R}{2}sin\theta})^2$
- $U_m = mgh$ (h est la hauteur de m par rapport à un plan de référence choisi) donc :
  $\boldsymbol{U_m = -mg\frac{R}{2}cos\theta}$ (le signe (-) vient du fait que la masse m est au dessous du plan choisi)

Donc : $\boldsymbol{U_{Totale}} = \frac{1}{2}k\,(\boldsymbol{R\theta})^2 + \frac{1}{2}k\,(\boldsymbol{\frac{R}{2}sin\theta})^2 \boldsymbol{- mg\frac{R}{2}cos\theta}$ 1. 5

- **La fonction de dissipation:** $\boldsymbol{D = \frac{1}{2}\alpha {\dot{x}}^2_{\alpha} = \frac{1}{2}\alpha R^2\dot{\theta}^2}$ 0. 5
- La fonction de Lagrange : $\boldsymbol{L = T - U}$
  - $L = \frac{1}{2}\left(\frac{2M+m}{4}\right)\boldsymbol{R^2\dot{\theta}^2} - \frac{1}{2}k\,(\boldsymbol{R\theta})^2 - \frac{1}{2}k\,(\boldsymbol{\frac{R}{2}sin\theta})^2 \boldsymbol{+ mg\frac{R}{2}cos\theta}$ 0. 5

2. **L'équation différentielle du mouvement :**

- L'équation de Lagrange dans le cas d'une coordonnée généralisée θ et dans le cas d'un système forcé :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \left|\frac{\partial r}{\partial \theta}\right| . F_{ext}\ ; \begin{cases} \left|\frac{\partial r}{\partial \theta}\right| . F_{ext} : est\ le\ moment\ de\ la\ force \\ r : est\ la\ direction\ d'action\ de\ la\ force\ F(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left(\frac{2M+m}{4}\right)R^2\dot{\theta} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left(\frac{2M+m}{4}\right)R^2\ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -k\,R^2\theta - k\,\frac{R^2}{4}cos\theta sin\theta - mg\frac{R}{2}.sin\theta = -\left(k\,R^2 + k\,\frac{R^2}{4} + mg\frac{R}{2}\right)\theta; \quad cos\theta \approx 1, sin\theta \approx \theta \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha R^2\dot{\theta} \\ \mathrm{r} = \frac{R}{2}.sin\theta \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial \theta} = \frac{R}{2}cos\theta \approx \frac{R}{2} \end{cases}$$

Donc l'équation de Lagrange : $\left(\frac{2M+m}{4}\right)R^2\ddot{\theta} + \left(k\,R^2 + k\,\frac{R^2}{4} + mg\frac{R}{2}\right)\theta = -\alpha R^2\dot{\theta} + \frac{R}{2}F_0\,sin\omega t$

$$\Rightarrow \left(\frac{2M+m}{4}\right)R^2\ddot{\theta} + \alpha R^2\dot{\theta} + \left(k\,R^2 + k\,\frac{R^2}{4} + mg\frac{R}{2}\right)\theta = \frac{R}{2}F_0 sin\omega t$$ 1 pt

$$\Rightarrow \left(\frac{2M+m}{4}\right)R\ddot{\theta} + \alpha R\dot{\theta} + \left(k\,R + k\,\frac{R}{4} + \frac{mg}{2}\right)\theta = \frac{F_0}{2}sin\omega t$$

On divise sur $\left(\frac{2M+m}{4}\right)\boldsymbol{R} \quad \Rightarrow \qquad \ddot{\theta} + \frac{4\alpha R}{(2M+m)R}\dot{\theta} + \left(\frac{5kR+2mg}{(2M+m)R}\right)\theta = \frac{2F_0}{(2M+m)R}sin\omega t$

L'équation réduite est : $\boldsymbol{\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = Bsin\omega t}$ 0. 5

tel que : $\boldsymbol{\delta = \frac{2\alpha R}{(2M+m)R}}$, et $\boldsymbol{\omega_0^2 = \frac{5kR+2mg}{(2M+m)R}}, \boldsymbol{B = \frac{2F_0}{(2M+m)R}}$

3. **L'expression de l'amplitude $A(\omega)$ et la phase $\emptyset(\omega)$.**

La solution de l'équation différentielle du mouvement : $\boldsymbol{\theta(t) = \theta_H(t) + \theta_P(t)}$
Dans le cas des faibles oscillations ($\boldsymbol{\delta < \omega_0}$)

$$\boldsymbol{\theta_H(t) = C\,e^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \varphi)},$$ 0. 5

$$\boldsymbol{\theta_P(t) = A\,sin(\omega t + \emptyset) = A\,e^{j(\omega t + \emptyset)}}$$ 0. 5

Solution de l'Examen de Physique 3(Suite)

Avec $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{5kR+2mg}{(2M+m)R} - \left(\frac{2\alpha R}{(2M+m)R}\right)^2}$

Après calcul on trouve :

$$A = \frac{B}{\sqrt{({\omega^2}_0 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} \; tel\; que: B = \frac{2F_0}{(2M+m)R} \quad \text{1pt}$$

$$tg\emptyset = \frac{-2\delta\omega}{({\omega^2}_0 - \omega^2)} \quad \text{1pt}$$

Exercices 03 (07Points)

Les équations de mouvement d'un système à deux degrés de liberté sont les suivantes :

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} k & -2k \\ -2k & 2k \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + kx_1 - 2kx_2 = 0 \dots\dots \quad (1) \\ 2m\ddot{x}_2 + 2kx_2 - 2kx_1 = 0 \dots.(2) \end{cases}$$

- **Calcul des pulsations propres (valeurs propres) :**

On fait l'hypothèse que le système admet des solutions sinusoïdales donc : $\begin{cases} x_1 = A_1 sin\,(\omega t + \varphi_1) \rightarrow \ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 \\ x_2 = A_2 sin\,(\omega t + \varphi_2) \rightarrow \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2 \end{cases}$ **0. 5**

On remplace dans (1) et (2)

$\begin{cases} (k - m\omega^2)x_1 - 2kx_2 = 0 \dots\dots.(3) \\ -2kx_1 + 2(k - m\omega^2)x_2 = 0 \dots.(4) \end{cases}$ **1 pt** $\Rightarrow \begin{vmatrix} k - m\omega^2 & -2k \\ -2k & 2(k - m\omega^2) \end{vmatrix} = 0$

$\left[\sqrt{2}(k - m\omega^2)\right]^2 - (2k)^2 = 0$ **1pt** $\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}(k - m\omega^2) = 2k \\ ou \\ \sqrt{2}(k - m\omega^2) = -2k \end{cases}$

On remplace dans les équations (3) et (4), on trouve : $\begin{cases} \omega_1^2 = \frac{k(\sqrt{2}+2)}{m\sqrt{2}} \\ \omega_2^2 = \frac{k(\sqrt{2}-2)}{m\sqrt{2}} \end{cases}$ **1pt**

- **Les modes propres :** On remplace dans (1) et (2) :

1er mode : $\omega^2 = \omega_1^2 = \frac{k(\sqrt{2}+2)}{m\sqrt{2}} \Rightarrow x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1$ **0.2 5** $\Rightarrow \vec{V}_1\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ **0. 25**

2ème mode : $\omega^2 = \omega_2^2 = \frac{k(\sqrt{2}-2)}{m\sqrt{2}} \Rightarrow x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1$ **0. 25** $\Rightarrow \vec{V}_2\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ **0.2 5**

- **La solution est générale est :**

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A\vec{V}_1 sin\,(\omega_1 t + \varphi_1) + B\vec{V}_2 sin\,(\omega_2 t + \varphi_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1(t) = Asin\,(\omega_1 t + \varphi_1) + Bsin\,(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}Asin\,(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{\sqrt{2}}{2}Bsin\,(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \quad \text{1pt}$$

- Pour les conditions d'équilibres suivantes : $x_1(0) = x_0,\; x_2(0) = 0,\; \dot{x}_1(0) = 0$ **et** $\dot{x}_2(0) = 0.$

Donc :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A\omega_1 cos\,(\omega_1 t + \varphi_1) + B\omega_2 cos\,(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_1 Asin\,(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_2 Bsin\,(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

On remplace avec les conditions d'équilibres et on trouve :

$$\begin{cases} x_1(0) = Asin\,\varphi_1 + Bsin\,\varphi_2 = x_0 \dots\dots\dots\dots\dots(5) \\ x_2(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}Asin\,\varphi_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}Bsin\,\varphi_2 = 0 \dots\dots(6) \\ \dot{x}_1(t) = A\omega_1 cos\,\varphi_1 + B\omega_2 cos\,\varphi_2 = 0 \dots\dots\dots(7) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}A\omega_1 cos\,\varphi_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}B\omega_2 cos\,\varphi_2 = 0 \dots(8) \end{cases}$$

de(6): $-Asin\,\varphi_1 + Bsin\,\varphi_2 = 0$

de (8): $-A\omega_1 cos\,\varphi_1 + B\omega_2 cos\,\varphi_2 = 0$

$$x_1(0) = A\sin\varphi_1 + B\sin\varphi_2 = x_0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (5)$$
$$x_2(0) = -A\sin\varphi_1 + B\sin\varphi_2 = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (6)'$$
$$\dot{x}_1(t) = A\omega_1\cos\varphi_1 + B\omega_2\cos\varphi_2 = 0 \dots\dots\dots\dots (7)$$
$$\dot{x}_2(t) = -A\omega_1\cos\varphi_1 + B\omega_2\cos\varphi_2 = 0 \dots\dots\dots\dots (8)'$$

(5)+(6)': $2\,B\sin\varphi_2 = x_0$

(5)-(6): $2\,A\sin\varphi_1 = x_0$

(7)+(8)': $2\,B\omega_2\cos\varphi_2 = 0$

(7)-(8)' : $2A\omega_1\cos\varphi_1=0$

$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \\ A = B = \frac{x_0}{2} \end{cases}$ 1pt

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \frac{x_0}{2}\left[(\sin\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{2}\right)\right] \\ x_2(t) = \frac{x_0}{2}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{2}\right)\right] \end{cases}$$ 0. 5