Université Ferhat Abbas – Sétif		*2èmeAnnée LMD*
Faculté de technologie	*Contrôle de Physique 3*	*02 Février 2011*
Tronc Commun S.T.		*Temps alloué : 1h30*

Exercice 1 : Questions de cours (05 points)

Répondez avec **vrai** ou **faux** :

1. La forme générale des équations différentielles d'un système à 2 degrés de liberté, dans un couplage élastique sont de la forme :
$$\begin{cases} a_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + c_1x_1 = d_1\ddot{x}_2 + f_1x_2 \\ a_2\ddot{x}_2 + b_2\dot{x}_2 + c_2x_2 = d_2\ddot{x}_1 + f_2x_1 \end{cases}$$
2. La forme générale des équations différentielles d'un système à 2 degrés de liberté, dans un couplage inertiel sont de la forme :
$$\begin{cases} a_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + c_1x_1 = d_1\ddot{x}_2 + f_1x_2 \\ a_2\ddot{x}_2 + b_2\dot{x}_2 + c_2x_2 = d_2\ddot{x}_1 + f_2x_1 \end{cases}$$
3. La forme générale des équations différentielles d'un système à 2 degrés de liberté, dans un couplage visqueux sont de la forme :
$$\begin{cases} a_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 = d_1\dot{x}_2 \\ a_2\ddot{x}_2 + b_2\dot{x}_2 = d_2\dot{x}_1 \end{cases}$$
4. Les équations du mouvement d'un système à deux degrés de liberté sont couplées.
5. Dans un système à plusieurs degrés de liberté, il y a autant d'équations de Lagrange que de degrés de liberté.
6. Les modes d'oscillations ne peuvent pas être utilisés pour trouver la solution des équations différentielles.
7. Dans un système à plusieurs degrés de liberté, les valeurs propres peuvent être complexes.
8. Le couplage élastique est également connu sous le nom de "couplage dynamique" tandis que le couplage inertiel est également connu sous le nom de "couplage statique".
9. Le nombre de degrés de liberté d'un système vibratoire ne dépend que du nombre des masses.
10. Dans un système à plusieurs degrés de liberté, l'équation de Lagrange ne peut pas être utilisée pour déduire les équations du mouvement.

Exercice 2(09 points)

Le système de la figure N°1 est constitué d'une masse m, d'un ensemble de ressorts k_1, k_2, k_3 et d'un amortisseur de coefficient d'amortissement visqueux α.

1. Trouver le système équivalent. On donne : $k_1 = k, k_2 = k_3 = 2k$.

I. Etude du système libre non amorti

1. Trouver l'équation différentielle du mouvement.
2. Déduire la pulsation propre ω_0 et la solution de l'équation différentielle du mouvement.

II. Etude du système libre amorti

1. Donner l'équation différentielle du mouvement.
2. On donne $\alpha = \sqrt{\frac{km}{8}}$, calculer le facteur d'amortissement δ puis la pulsation des oscillations amorties ω_a.
3. Donner la solution de l'équation différentielle du mouvement dans le cas des oscillations faiblement amorties.

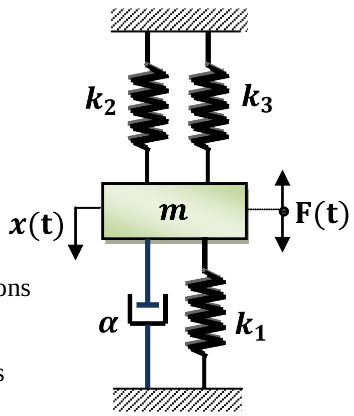


Figure N°1

III. Etude du système forcé amorti

Le système est soumis à une force extérieure $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ appliquée à la masse m.

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement forcé amorti.
2. Donner les expressions de l'amplitude $A(\Omega)$ et de la phase $\Phi(\Omega)$ de la solution particulière représentant le régime permanent.
3. Donner la solution générale de l'équation différentielle du mouvement.

Exercice 3 (06 points)

Un système constitué d'un disque, homogène de masse M et de rayon R, peut osciller sans frottements autour de son axe **O**. Ce disque est relié à un bâti fixe par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k, un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α et une masse m dont le mouvement est $y(t)$ (Voir figure N°2).

1. Déterminer le Lagrangien du système en fonction de θ.
2. Donner l'équation différentielle du mouvement.
3. Donner la solution dans le cas d'un système faiblement amorti.

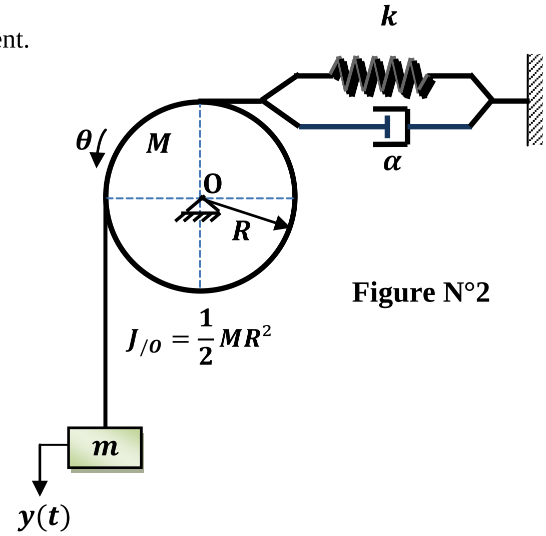


Figure N°2

Université Ferhat Abbas – Sétif
Faculté de technologie
Tronc Commun S.T

Correction du Contrôle de Physique 3

2ème Année LMD
02 Février 2011
Temps alloué : 1h30

Exercice 1 : Questions de cours (5 points)

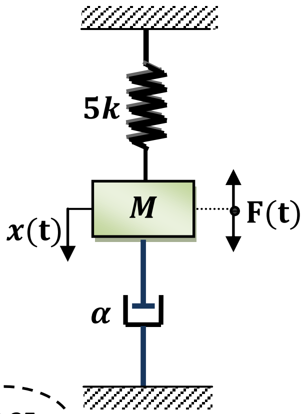
On répond avec vrai ou faux :

1-Faux 0.5	**3-Vrai** 0.5	**5-Vrai** 0.5	**7-Faux** 0.5	**9-Faux** 0.5
2-Faux 0.5	**4-Vrai** 0.5	**6-Faux** 0.5	**8-Faux** 0.5	**10-Faux** 0.5

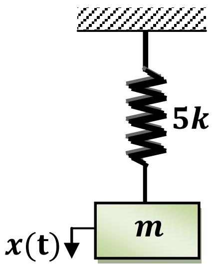
Exercice 2(09 points)

1. Ecriture du système équivalent :
   - Les 2 ressorts $k_2 et\ k_3$ sont en parallèles donc $k_{e1} = k_2 + k_3 = 4k$
   - Les 2 ressorts $k_1 et\ k_{e1}$ sont en parallèles : donc $\boldsymbol{k_{e2} = k + 4k = 5k}$ 1

   Donc on peut avoir le schéma ci contre.



I. Etude du système libre non amorti



- L'énergie cinétique : $\boldsymbol{T = \frac{1}{2} m\, \dot{x}^2}$ 0.5
- L'énergie potentielle : $\boldsymbol{U = \frac{5}{2} k\, x^2}$ 0.5
- La fonction de Lagrange:

$$\boldsymbol{L = T - U = \frac{1}{2} m\, \dot{x}^2 - \frac{5}{2} k\, x^2}$$ 0.5

Dans le cas d'un système libre non amorti, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}}\right.$$ 0.25 $$\boldsymbol{\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -5kx}$$ 0.25

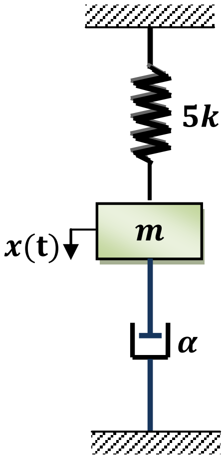
1. Ecriture de l'équation différentielle du mouvement : $\boldsymbol{m\ddot{x} + 5kx = 0}$ 1
2. a) Déduction de la pulsation propre ω_0 : On peut écrire l'équation différentielle sous la forme:

$$\ddot{x} + \frac{5k}{m} x = 0, \text{ tel que : } \boldsymbol{\omega_0^2 = \frac{5k}{m}} \text{ donc : } \boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{5k}{m}}}$$ 0.5

b) La solution de l'équation différentielle du mouvement : La solution est sinusoïdale du type :

$$\boldsymbol{x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)}$$ 0.5

II. Etude du système libre amorti



- La fonction de dissipation : $\boldsymbol{D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2}$ 0.25

Dans le cas d'un système libre amorti, l'équation de Lagrange s'écrit : $\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}\right.$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha\dot{x}}$$ 0.25

1. Ecriture de l'équation différentielle du mouvement : $\boldsymbol{m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + 5kx = 0}$ 0.5
2. Calcul du facteur d'amortissement δ puis la pulsation ω_a pour $\boldsymbol{\alpha = \sqrt{\frac{km}{8}}}$

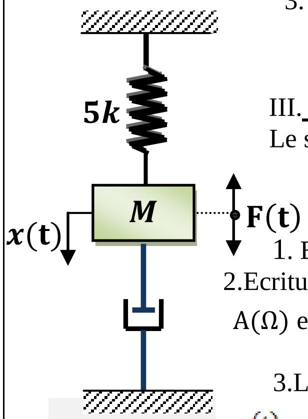
On peut écrire l'équation différentielle sous la forme : $\begin{cases} \ddot{x} + \frac{\alpha}{m} + \frac{5k}{m} x = 0 \\ \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \end{cases}$ tel que : $\delta = \frac{\alpha}{2m}$ $et\ \ \omega_0 = \sqrt{\frac{5k}{m}}$

$$\delta = \frac{1}{2m}\sqrt{\frac{km}{8}} \Longrightarrow \boldsymbol{\delta = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{2m}}}$$ 0.25 $$, \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{5k}{m} - \frac{k}{32m}} \Longrightarrow \boldsymbol{\omega_a = \sqrt{\frac{159k}{32m}}}$$ 0.25

3. La solution de l'équation différentielle du mouvement : $\delta < \omega_0 \rightarrow x(t) = C\, e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \varphi)$

$$\boldsymbol{x(t) = C\, e^{-\sqrt{\frac{k}{32m}}t} \sin\left(\sqrt{\frac{159k}{32m}}\,t + \varphi\right)}$$ 0.5

III. Etude du système forcé amorti



Le système est soumis à une force extérieure $F(t) = F_0 \cos\Omega t$ appliquée à la masse m.

Dans le cas d'un système forcé amorti l'équation de Lagrange devient :

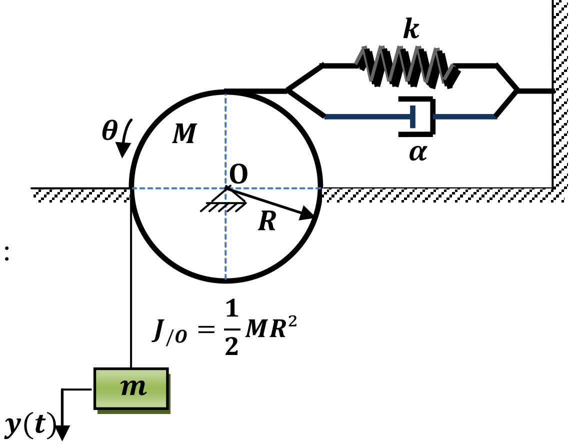
$$\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + F(t)\right.$$

1. Ecriture de l'équation différentielle du mouvement : $\boldsymbol{m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + 5kx = F_0 \cos\Omega t}$ 0.5

2. Ecriture de la solution de l'équation différentielle du mouvement en donnant l'expression de l'amplitude $A(\Omega)$ et de la phase $\Phi(\Omega)$: $\boldsymbol{A = \frac{B}{\sqrt{(\omega^2{}_0 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}}$ 0.5 , $\boldsymbol{\varphi = Arctg\ \frac{-2\delta\Omega}{(\omega^2{}_0 - \Omega^2)}}$ 0.5 ; $\boldsymbol{B} = \frac{F_0}{m}$

3. La solution générale de l'équation différentielle du mouvement :

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t) = \boldsymbol{C\, e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \emptyset) + \frac{B}{\sqrt{(\omega^2{}_0 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} \cos\left(\Omega t + Arctg\ \frac{-2\delta\Omega}{(\omega^2{}_0 - \Omega^2)}\right)}$$ 0.5



Exercice 3 (06 points)

1. Le Lagrangien du système en fonction de $\boldsymbol{\theta}$.

Les coordonnées des éléments du système :

- Le disque effectue une rotation autour de O donc : $M: R\theta$
- Le ressort $\boldsymbol{k}$ et l'amortisseur $\boldsymbol{\alpha}$ sont reliés au contour du disque :

  Donc :k : $R\theta$, $\boldsymbol{\alpha}$ **:** $R\theta \rightarrow R\dot{\theta}$
- La masse m se déplace avec $\boldsymbol{y(t)} = R\theta$

1. Détermination du Lagrangien du système en fonction de $\boldsymbol{\theta}$:

- L'énergie cinétique du système : $T = T_M + T_m$

- L'énergie cinétique de la masse M : $\boldsymbol{T_M} = \frac{1}{2}\boldsymbol{j_{/O}}\dot{\boldsymbol{\theta}}^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\boldsymbol{M\,R^2})\dot{\boldsymbol{\theta}}^2$

- L'énergie cinétique de la masse m : $\boldsymbol{T_m} = \frac{1}{2}\boldsymbol{mR^2\dot{\theta}^2}$

Donc l'énergie cinétique du système : $T = \frac{1}{2}(\frac{M}{2}+\boldsymbol{m})\boldsymbol{R^2\dot{\theta}^2}$ 0.5

- L'énergie potentielle du système : $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U_k} = \frac{1}{2}\boldsymbol{k(R\theta)^2}$ 0.5
- La fonction de dissipation **:** $\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha(R^2\dot{\theta}^2)^2}$ 0.5

La fonction de Lagrange : $L = T - U \Longrightarrow \boldsymbol{L} = \frac{1}{2}(\frac{M}{2}+\boldsymbol{m})\boldsymbol{R^2\dot{\theta}^2} - \frac{1}{2}\boldsymbol{k(R\theta)^2}$ 0.5

2. **Ecriture de l'équation différentielle du mouvement**.

L'équation de Lagrange s'écrit : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}}$ 0.5

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = (\frac{M}{2}+\boldsymbol{m})\boldsymbol{R^2}\,\ddot{\theta} & 0.5 \\ \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\boldsymbol{kR^2\theta} & 0.5 \\ \frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} = \boldsymbol{\alpha R^2\dot{\theta}} & 0.5 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow (\frac{M}{2}+\boldsymbol{m})\boldsymbol{R^2}\,\ddot{\theta} + \boldsymbol{\alpha R^2\dot{\theta}} + \boldsymbol{kR^2\theta} = \boldsymbol{0}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{M}{2}+\boldsymbol{m}\right)\ddot{\theta} + \boldsymbol{\alpha\dot{\theta}} + \boldsymbol{k\theta} = \boldsymbol{0}$$ 0.5

3. Ecriture de la solution dans le cas d'un système faiblement amorti : $\boldsymbol{\delta} < \boldsymbol{\omega_0} \Longrightarrow \boldsymbol{\theta(t)} = \boldsymbol{C\,e^{-\delta t}\sin(\omega_a t+\varphi)}$ 0.25

tel que: $\boldsymbol{\omega_a} = \sqrt{\boldsymbol{\omega_0^2 - \delta^2}}$ 0.25

On peut écrire l'équation comme suit : $\begin{cases} \ddot{\theta} + (\frac{\alpha}{\frac{M}{2}+m})\dot{\theta} + (\frac{k}{\frac{M}{2}+m})\theta = 0 \\ \ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \end{cases}$ 0.25

tel que : $2\delta = \frac{\alpha}{\frac{M}{2}+m} \Longrightarrow \boldsymbol{\delta} = \frac{\alpha}{M+2m}$ 0.25 *et* $\omega^2{}_0 = \frac{k}{\frac{M}{2}+m} \Longrightarrow \boldsymbol{\omega_0} = \sqrt{\frac{2k}{M+2m}}$ 0.25

$$\boldsymbol{\omega_a} = \sqrt{\frac{2k}{M+2m} - \frac{\alpha^2}{(M+2m)^2}}$$ 0.25

Université Ferhat Abbas – Sétif		*2ème Année LMD*
Faculté de technologie	*Contrôle Spécial de Physique 3*	*16 Février2011*
Tronc Commun S.T.		*Temps alloué : 1h30*

Exercice 1 : Questions de cours (05 points)

1- Le Lagrangien d'un système mécanique est donné par :

$$L = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \right)^2 + g(m_1 l_1 + m_2 l_2) \cos\theta_1 + m_2 g l_2 \cos\theta_2$$

a) Donnez le type de couplage.

b) Ecrire les équations différentielles du mouvement.

2- Le Lagrangien d'un système mécanique est donné par :

$$L = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_1 g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g l_2 \cos\theta_2 - \frac{1}{2} k a^2 (\sin\theta_1 - \sin\theta_2)^2$$

a) Donnez le type de couplage.

b) Ecrire les équations différentielles du mouvement

3- Donnez dans l'ordre la mise en équation d'un système couplé de 2 degrés de liberté :

1- On écrit les 2 solutions générales des équations différentielles du mouvement.
2- On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques.
3- On substitue ω_1 dans l'une des 2 équations et l'on obtient le 1er mode propre.
4- On écrit les 2 équations différentielles en fonction des coordonnées généralisées.
5- On obtient 2 pulsations propres ω_1 et ω_2.
6- On substitue ω_2 dans l'une des 2 équations et l'on obtient le 2ème mode propre.

Exercice 2(07 points)

Le système de la figure **N°1** est constitué d'une masse M attachée à un amortisseur De coefficient d'amortissement visqueux α et à deux ressorts ; le premier de masse négligeable et de constante de raideur $2k$, le deuxième de masse **m** et de constante de raideur k.

1. Trouver le système équivalent.

I. Etude du système libre non amorti

1. Trouver l'équation différentielle du mouvement.
2. Déduire la pulsation propre ω_0 et la solution de l'équation différentielle du mouvement.

II. Etude du système libre amorti

1. Trouver l'équation différentielle du mouvement.
2. Calculer le facteur d'amortissement δ, la pulsation des oscillations amorties ω_a et le décrément logarithmique **D**.
3. Donner la solution de l'équation différentielle du mouvement dans le cas des oscillations faiblement amorties.

III. Etude du système forcé amorti

Le système est soumis à une excitation extérieure de mouvement $S(t) = S_0 \sin \omega t$.

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement forcé amorti.

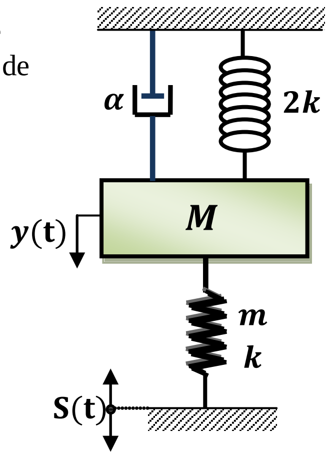


Figure N°1

Exercice 3 (08 points)

Dans le système de la figure 2, le disque de masse M et de rayon R roule sans glissement sur un plan horizontal. Sachant que :

$OA = R, et\ OB = \frac{L}{2}$.

1. Dessiner la nouvelle position du système après une rotation d'un angle θ autour du point O.
2. Trouver la l'équation différentielle du mouvement libre amorti.
3. Donner la solution de l'équation différentielle dans le cas d'un système faiblement amorti.
1. Déduire les valeurs de ω_0, δ et ω_a.

On donne le moment d'inertie du disque: $J/_O = \frac{1}{2} MR^2$

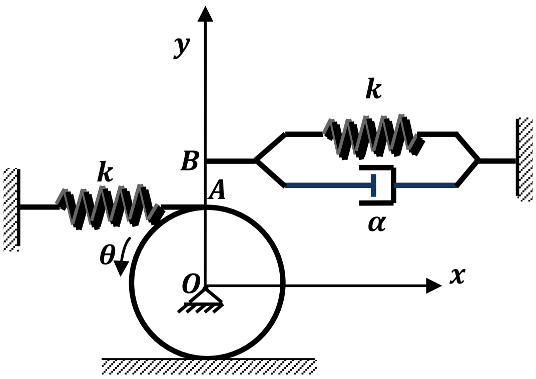


Figure N°2

Corrigé de l'examen spécial de Physique 3

<u>**Exercice 01**</u>

1.a) Couplage Inertiel……………………………………………………………..….0.5 point

b) $\begin{cases}(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + gl_1(m_1+m_2)\,\theta_1 = -m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2 \\ m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2gl_2.\theta_2 = -m_2l_2l_1\ddot{\theta}_1\end{cases}$ **……………………..………01point**

2.a) Couplage Elastique……………………………………………………..……0.5 point

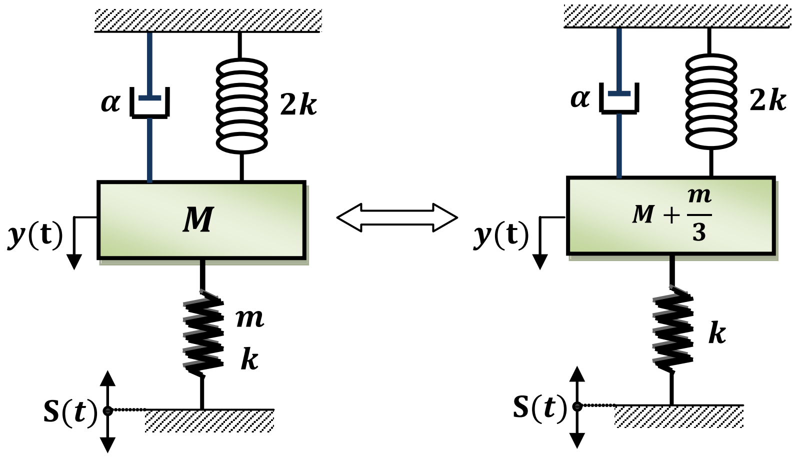
b) $\begin{cases}m_1l^2{}_1\ddot{\theta}_1 + (ka^2 + m_1gl_1)\theta_1 = ka^2\theta_2 \\ m_2l^2{}_2\ddot{\theta}_2 + (ka^2 + m_2gl_2)\theta_2 = ka^2\theta_1\end{cases}$ **……………………………………....01point**

3. La mise en équation du système couplé de 2 degrés de liberté passe par la méthode à suivre suivante :

1–On écrit les 2 équations différentielles en fonction des coordonnées généralisées...**0.5 point**
2–On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques…………**0.5 point**
3–On obtient 2 pulsations propres ω_1 et ω_2 ……………………………………………**0.5 point**
4–On substitue ω_1 dans l'une des 2 équations et l'on obtient le 1er mode propre……. **0.5 point**
5–On substitue ω_2 dans l'une des 2 équations et l'on obtient le 2ème mode propre…...**0.5 point**
6–On écrit les 2 solutions générales des équations différentielles du mouvement…...**0.5 point**

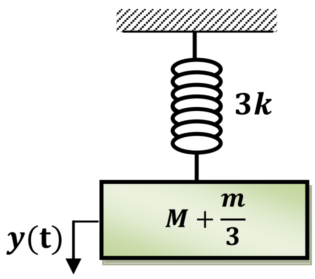
<u>**Exercice 02**</u>

1. <u>**Le système équivalent**</u> **:**
   - **Le ressort de masse m contribue seulement avec $\frac{m}{3}$ donc la masse totale du système est égale à : $M+\frac{m}{3}$**
   - **Les 02 ressorts ($2k$) et (k) n'ont pas le même déplacement ; ils ne sont pas en parallèles donc :**



I. <u>Etude du système libre non amorti</u>

1. L'équation différentielle du mouvement :
   Dans le cas d'un système libre non amorti : les 02 ressorts ont le même déplacement $y(t)$
   Donc on peut calculer le ressort équivalent : $k_e = 2k + k = 3k$



- **L'énergie cinétique du système:** $T = \frac{1}{2}\left(M+\frac{m}{3}\right)\dot{y}^2$
- **L'énergie potentielle du système:** $U = \frac{1}{2}(3k)\,y^2$
- <u>**La fonction de Lagrange :**</u> $L = T - U \Longrightarrow L = \frac{1}{2}\left(M+\frac{m}{3}\right)\dot{y}^2 - \frac{1}{2}(3k)\,y^2$
- <u>**L'équation de Lagrange**</u> : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0,$ $\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \left(M+\frac{m}{3}\right)\ddot{y} \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -3ky\end{cases}$

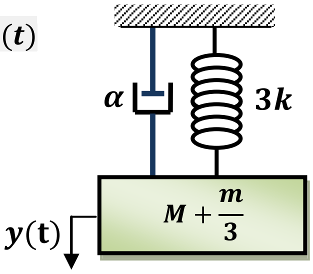
  En remplaçant dans l'équation de Lagrange on aura : $\left(M+\frac{m}{3}\right)\ddot{y} + 3ky = 0$

2. **a)** Déduire la pulsation propre ω_0 **:** $\left(M+\frac{m}{3}\right)\ddot{y} + 3ky = 0 \Longrightarrow \begin{cases}\ddot{y} + \frac{3k}{M+\frac{m}{3}}y = 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0\end{cases}$

$$\omega_0^2=\frac{3k}{M+\frac{m}{3}}=\frac{9k}{3M+m}\quad\Longrightarrow\quad \omega_0=\sqrt{\frac{9k}{3M+m}}$$

b) La solution de l'équation différentielle du mouvement : $\boldsymbol{y(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)}$

II. <u>Etude du système libre amorti</u>



Dans le cas d'un système libre amorti : les 02 ressorts ont le même déplacement $y(t)$

Donc on peut calculer le ressort équivalent : $\boldsymbol{k_e=2k+k=3k}$

- **L'énergie cinétique du système:** $T=\frac{1}{2}\left(M+\frac{m}{3}\right)\dot{y}^2$
- **L'énergie potentielle du système:** $U=\frac{1}{2}(3k)\,y^2$
- **La fonction de dissipation :** $D=\frac{1}{2}\alpha\dot{y}^2$
- **<u>La fonction de Lagrange :</u>** $L=T-U\Longrightarrow L=\frac{1}{2}\left(M+\frac{m}{3}\right)\dot{y}^2-\frac{1}{2}(3k)\,y^2$
- **<u>L'équation de Lagrange</u>** : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=-\frac{\partial D}{\partial\dot{y}}$

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}\right)=\left(M+\frac{m}{3}\right)\ddot{y}\\ \frac{\partial L}{\partial y}=-3ky\\ \frac{\partial D}{\partial\dot{y}}=\alpha\dot{y}\end{cases}$$

1. L'équation différentielle du mouvement : En remplaçant dans l'équation de Lagrange on aura :

$$\left(M+\frac{m}{3}\right)\ddot{y}+\alpha\dot{y}+3ky=0$$

2. Le facteur d'amortissement $\boldsymbol{\delta}$, la pulsation des oscillations amorties $\boldsymbol{\omega_a}$ et le décrément logarithmique **D**.

$$\left(M+\frac{m}{3}\right)\ddot{y}+\alpha\dot{y}+3ky=0\Longrightarrow\begin{cases}\ddot{y}+\frac{\alpha}{M+\frac{m}{3}}\dot{y}+\frac{9k}{3M+m}y=0\\ \ddot{y}+2\delta\dot{y}+\omega_0^2y=0\end{cases}$$

Donc : $2\delta=\frac{\alpha}{M+\frac{m}{3}}\Longrightarrow\delta=\frac{3\alpha}{6M+2m}$, $\omega_a=\sqrt{\omega_0^{\,2}-\delta^2}=\sqrt{\left(\frac{9k}{3M+m}\right)-\left(\frac{3\alpha}{6M+2m}\right)^2}$,

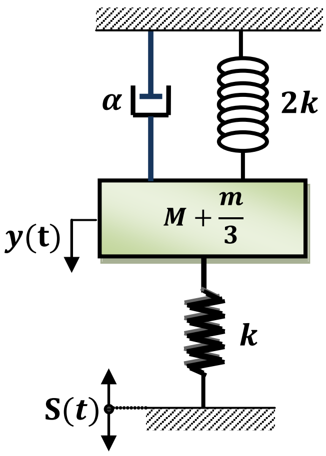
$$D=\delta T_a=\delta\,\frac{2\pi}{\omega_a}=\frac{3\alpha}{6M+2m}\,\frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{9k}{3M+m}\right)^2-\left(\frac{3\alpha}{6M+2m}\right)^2}}\Longrightarrow D=2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{3\alpha}{6M+2m}\right)^2}{\left(\frac{9k}{3M+m}\right)-\left(\frac{3\alpha}{6M+2m}\right)^2}}$$

3. La solution de l'équation différentielle du mouvement dans le cas des oscillations faiblement amorties.

$$\delta<\omega_0:\ y(t)=C\,e^{-\delta t}\sin(\omega_a t+\varphi)\Longrightarrow y(t)=C\,e^{-\left(\frac{3\alpha}{6M+2m}\right)t}\sin\left(\sqrt{\left(\frac{9k}{3M+m}\right)-\left(\frac{3\alpha}{6M+2m}\right)^2}\ t+\varphi\right)$$

I. <u>Etude du système forcé amorti</u>

Le système est soumis à une excitation extérieure de mouvement $\mathbf{S(t)=S_0\sin\omega t}$.



- **L'énergie cinétique du système:** $T=\frac{1}{2}\left(M+\frac{m}{3}\right)\dot{y}^2$
- **L'énergie potentielle du système:** $U=\frac{1}{2}(2k)\,y^2+\frac{1}{2}k\,(y-S)^2$
- **La fonction de dissipation :** $D=\frac{1}{2}\alpha\dot{y}^2$
- **<u>La fonction de Lagrange :</u>**

$$L=T-U\Longrightarrow L=\frac{1}{2}\left(M+\frac{m}{3}\right)\dot{y}^2-\frac{1}{2}(2k)\,y^2-\frac{1}{2}k\,(y-S)^2$$

- **<u>L'équation de Lagrange</u>** : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=-\frac{\partial D}{\partial\dot{y}}$

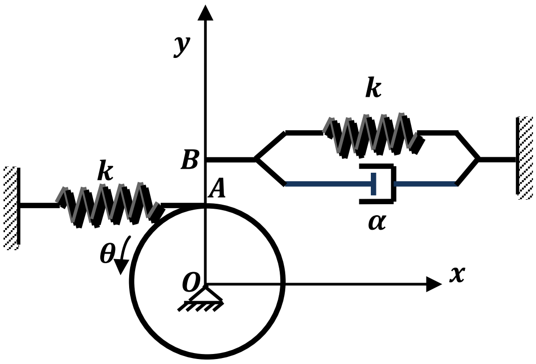
$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}\right)=\left(M+\frac{m}{3}\right)\ddot{y}\\ \frac{\partial L}{\partial y}=-2ky-k(y-S)\\ \frac{\partial D}{\partial\dot{y}}=\alpha\dot{y}\end{cases}$$

1. L'équation différentielle du mouvement forcé amorti: En remplaçant dans l'équation de Lagrange on aura :

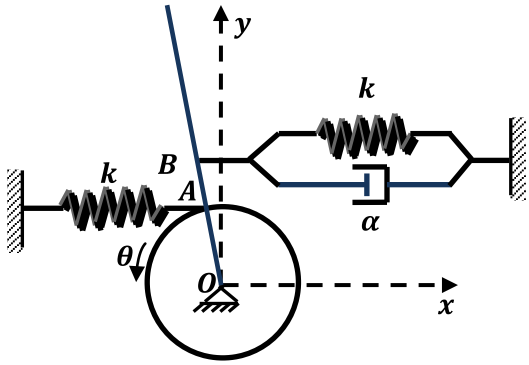
$$\left(M+\frac{m}{3}\right)\ddot{y}+\alpha\dot{y}+2ky+k(y-S)=0\Longleftrightarrow\left(M+\frac{m}{3}\right)\ddot{y}+\alpha\dot{y}+3ky=k\,S_0\sin\omega t$$

Exercice 3

1. On dessine la nouvelle position du système après une rotation d'un angle $\boldsymbol{\theta}$ autour du point **O**.



A l'équilibre



Au mouvement

- **Les coordonnées des éléments du système :**
- Le disque de masse **M** et de rayon tourne autour de O.
- Le ressort $\boldsymbol{k}$ est attaché en un point A du disque donc : $\boldsymbol{k}\{\boldsymbol{R\theta}$
- L'amortisseur $\boldsymbol{\alpha}$ est attaché en un point B donc : $\boldsymbol{\alpha}\left\{\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{\sin\theta} \rightarrow \frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{2}}\dot{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\cos\theta}\right.$
- le ressort $\boldsymbol{k}$ est attaché en un point B donc : $\boldsymbol{k}\left\{\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{\sin\theta}\right.$
- **L'énergie cinétique du système** : $T = T_M$
  - L'énergie cinétique de la masse M : $T_M = \frac{1}{2}j_{/O}\dot{\varphi}^2 \Longrightarrow \boldsymbol{T_M = \frac{1}{4}M\,R^2\dot{\theta}^2}$

L'énergie potentielle du système :$U = U_{kA} + U_{kB} = \boldsymbol{\frac{1}{2}k(R\theta)^2 + \frac{1}{2}k(\frac{L}{2}\sin\theta)^2}$

- **La fonction de dissipation** :$D = \frac{1}{2}\alpha(\boldsymbol{\frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta})^2$
- **La fonction de Lagrange :** $L = T - U \Longrightarrow \boldsymbol{L = \frac{1}{4}M\,R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(R\theta)^2 - \frac{1}{2}k(\frac{L}{2}\sin\theta)^2}$

L'équation de Lagrange s'écrit : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}}$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{1}{2}M\,R^2\ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial\theta} = -k(R^2 + \frac{L^2}{4})\theta \\ \frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} = \alpha\frac{L^2}{4}\dot{\theta} \end{cases} \qquad \boldsymbol{\frac{1}{2}M\,R^2\ddot{\theta} + \alpha\frac{L^2}{4}\dot{\theta} + k(R^2 + \frac{L^2}{4})\theta = 0}$$

C'est l'équation différentielle du mouvement libre amorti.

2. La pulsation propre du système $\boldsymbol{\omega_0}$ et le facteur d'amortissement $\boldsymbol{\delta}$

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} + \frac{\alpha L^2}{4}\dot{\theta} + k(R^2 + \frac{L^2}{4})\theta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{\theta} + \frac{\alpha L^2}{2MR^2}\dot{\theta} + \frac{k(4R^2+L^2)}{2MR^2}\theta = 0 \\ \ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{2\delta = \frac{\alpha L^2}{2MR^2} \rightarrow \delta = \frac{\alpha L^2}{4MR^2}} \qquad , \qquad \boldsymbol{\omega_0^2 = \frac{k(4R^2+L^2)}{2MR^2} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k(4R^2+L^2)}{2MR^2}}}$$

La pulsation des oscillations amorties $\boldsymbol{\omega_a}$: $\omega_a = \sqrt{{\omega_0}^2 - \delta^2} = \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{k(4R^2+L^2)}}{\boldsymbol{2MR^2}}\right) - \left(\frac{\boldsymbol{\alpha L^2}}{\boldsymbol{4MR^2}}\right)^2}$

3. La solution de l'équation différentielle dans le cas d'un système faiblement amorti.

$$\boldsymbol{\delta < \omega_0 : \theta(t) = C\,e^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \varphi) \Longrightarrow \theta(t) = C\,e^{-(\frac{\alpha L^2}{4MR^2})t}\sin\left(\sqrt{\left(\frac{k(4R^2+L^2)}{2MR^2}\right) - \left(\frac{\alpha L^2}{4MR^2}\right)^2}\;t + \varphi\right)}$$