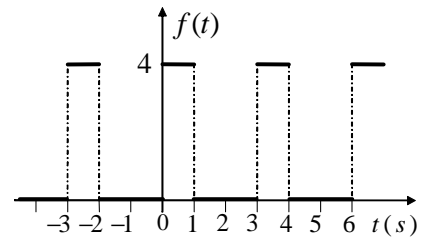


Exercice 1 Série de Fourier. 4 Points

Soit la fonction périodique $f(t)$ ci-contre.

1. Quelle est la période T de cette fonction.
2. Trouver le développement en série de Fourier de la fonction.



Rappel: La série de Fourier d'une fonction périodique $f(t)$ est:

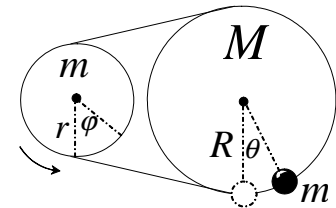
$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right).$$

Exercice 2 Système non amorti. 5 Points

Deux disques, de tailles différentes et reliés par un fil *non glissant* et *inextensible*, peuvent tourner librement autour de leurs axes *fixes*.

Le grand disque porte à sa périphérie une masse ponctuelle m .

À l'équilibre la masse était à la verticale (*représentée en pointillé*).



1. Trouver l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle U du système en termes de la variable $\theta \ll 1$.
2. Dédire le Lagrangien puis l'équation du mouvement et la pulsation propre ω_0 .
3. Écrire l'équation de conservation de l'énergie et retrouver l'équation du mouvement.

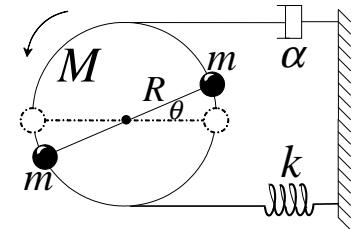
Rappels: Les moments d'inertie des disques autour de leurs axes sont $I_1 = \frac{1}{2}MR^2$ et $I_2 = \frac{1}{2}mr^2$.
 Pour $\theta \ll 1$: $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

Exercice 3 Système amorti. 8 Points

Un disque, de masse M et de rayon R , peut tourner librement autour de son axe *fixe*. Il porte à sa périphérie deux masses m ponctuelles.

Les frottements sont symbolisés par l'amortisseur de coefficient α .

À l'équilibre (*représenté en pointillé*), le ressort n'était *pas* déformé.



1. Trouver l'énergie cinétique T , l'énergie potentielle U , ainsi que la fonction de dissipation \mathcal{D} . ($\theta \ll 1$.)
2. Trouver le Lagrangien et déduire l'équation du mouvement.
3. Sachant que $\alpha=5\text{N.s/m}$, $M=m=1\text{kg}$, $k=5\text{N/m}$: trouver la nature du mouvement.
4. Calculer le temps τ au bout duquel l'amplitude diminue à $1/9$ de sa valeur.
5. Quelle est la valeur de α qui ne faut pas dépasser pour avoir encore des oscillations.

Rappels: Le moment d'inertie du disque autour de son axe est $I = \frac{1}{2}MR^2$.
 Pour $\theta \ll 1$: $\sin \theta \approx \theta$.
 L'équation de Lagrange du système amorti est $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}}$.

Questions de cours. 3 Points

1. La *forme générale* de l'équation du mouvement d'un système linéaire forcé est: $\ddot{q} + \dots = \dots$?
2. Qu'est-ce qu'une *pulsation de résonance* ? (Donner la définition, pas la formule.)
3. Quelle est l'équation à résoudre pour trouver cette pulsation: $A=0$, ou $\frac{\partial A}{\partial \Omega}=0$, ou $\frac{\partial^2 A}{\partial \Omega^2}=0$?

Bonnes vacances !

Exercice 1

1. La période de la fonction est $T=3s$. (1)

2. $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{3} \left[\int_0^1 4 dt + \int_1^3 0 dt \right] = \frac{4}{3}$. (0,5)

$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi n t}{T} dt = \frac{2}{3} \left[\int_0^1 4 \cos \frac{2\pi n t}{3} dt + \int_1^3 0 \cos \frac{2\pi n t}{3} dt \right] = \frac{4}{\pi n} \sin \frac{2\pi n}{3}$. (0,5)

$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2\pi n t}{T} dt = \frac{2}{3} \left[\int_0^1 4 \sin \frac{2\pi n t}{3} dt + \int_1^3 0 \sin \frac{2\pi n t}{3} dt \right] = \frac{4}{\pi n} (1 - \cos \frac{2\pi n}{3})$. (0,5)

Donc, $f(t) = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n} \sin \frac{2\pi n}{3} \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n} (1 - \cos \frac{2\pi n}{3}) \sin n\omega t$. ($\omega = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/s}$)

Exercice 2

1. Puisque le fil est non glissant et inextensible on a $r\dot{\varphi} = R\dot{\theta}$. (0,5) (Donc, $r\dot{\varphi} = R\dot{\theta}$)

$T = T_M + T_m + T_m = \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}mr^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{4}(M+3m)R^2\dot{\theta}^2$.

$U = U_m = mg(R - R\cos\theta) \approx \frac{1}{2}mgR\theta^2$. (0,5)

2. Avec le Lagrangien : $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{4}(M+3m)R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgR\theta^2$.

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \implies \ddot{\theta} + \frac{2mg}{(M+3m)R} \theta = 0$. ($\omega_0 = \sqrt{\frac{2mg}{(M+3m)R}}$) (0,5)

3. Avec l'équation de conservation : $E = T + U = \frac{1}{4}(M+3m)R^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgR\theta^2$.

$\frac{dE}{dt} = 0 \implies \frac{1}{2}(M+3m)R^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mgR\dot{\theta}\theta = 0 \implies \ddot{\theta} + \frac{2mg}{(M+3m)R} \theta = 0$.

Exercice 3

1. $T = T_M + T_m + T_m = \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{4}(M+4m)R^2\dot{\theta}^2$.

$U = U_k + U_m + U_m = \frac{1}{2}kR^2\theta^2 + mg \sin\theta - mg \sin\theta = \frac{1}{2}kR^2\theta^2$.

$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha R^2\dot{\theta}^2$. (0,5)

2. Le Lagrangien est: $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{4}(M+4m)R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kR^2\theta^2$.

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \theta} \implies \ddot{\theta} + \frac{2\alpha}{M+4m}\dot{\theta} + \frac{2k}{M+4m}\theta = 0$. (0,5)

3. L'équation est de la forme: $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$: avec $\lambda = \frac{\alpha}{M+4m}$. ($\omega_0^2 = \frac{2k}{M+4m}$) (0,5)

A.N: $\lambda^2 - \omega_0^2 = -1 < 0$. (0,5) Le mouvement est donc **pseudo-périodique**. (0,5)

4. $Ae^{-\lambda(t+\tau)} = \frac{1}{9}Ae^{-\lambda t} \implies \lambda\tau = \ln 9 \implies \tau = \frac{\ln 9}{\lambda} \approx 2,2s$. (0,5)

5. Pour avoir des oscillations il faut $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0 \implies \lambda < \omega_0 \implies \alpha < \sqrt{2k(M+4m)}$: $\alpha < 5\sqrt{2} \text{ Nm/s}$. (0,5)

Questions de cours

1. $\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2q = \frac{F}{a}$. (1)

2. C'est la pulsation d'excitation pour laquelle l'amplitude du système devient maximale. (1)

3. $\frac{\partial A}{\partial \Omega} = 0$. (1)