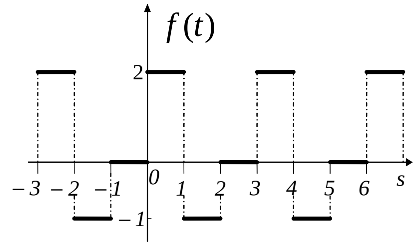
Exercice 1 Série de Fourier. 4 Points

Soit la fonction périodique $f(t)$ ci-contre.

1. Quelle est la période T de cette fonction.

2. Trouver le développement en série de Fourier de la fonction.

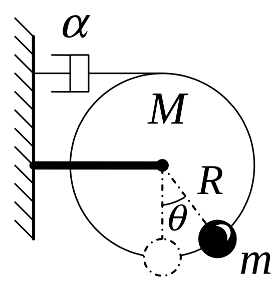


Rappel: La série de Fourier d'une fonction périodique $f(t)$ est:

$$f(t)=a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(\frac{2\pi n}{T}t)+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(\frac{2\pi n}{T}t).$$

Exercice 2 Système amorti. 8 Points

Un disque de masse M et de rayon R (suspendu verticalement) peut tourner librement autour de son axe fixe. Une masse ponctuelle m est soudée à sa périphérie. L'ensemble des frottements est symbolisé par l'amortisseur de coefficient α.
À l'équilibre la masse m était à la verticale (*représentée en pointillé*).



1. Trouver l'énergie cinétique T, l'énergie potentielle U, ainsi que la fonction de dissipation $\mathcal{D}$. $(\theta \ll 1.)$

2. Trouver le Lagrangien et déduire l'équation du mouvement.

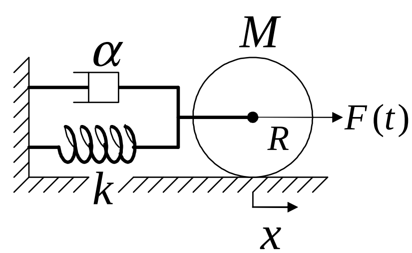
3. Sachant que α=**20**N.s/m, M=m=**1**kg, R=**15**cm, g=**10**m/s^2 : trouver la nature du mouvement.

4. En remplaçant α par α', le système oscille mais son amplitude diminue au cours du temps. Trouver α' si l'amplitude diminue à **1/7** de sa valeur après **2** oscillations complètes.

Rappels: Le moment d'inertie du disque autour de son axe est $I = \frac{1}{2}MR^2$.
Pour $\theta \ll 1$: $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

Exercice 3 Système forcé. 8 Points

Un disque de masse M et de rayon R peut rouler *sans glissement* sur le plan horizontal. Le disque est relié par son centre à un ressort de raideur k et un amortisseur de coefficient α.
Une excitation sinusoïdale $F(t)$=$F_0\cos\Omega t$ est appliquée sur le disque en son centre.



1. Trouver l'énergie cinétique T, l'énergie potentielle U, ainsi que la fonction de dissipation $\mathcal{D}$. (*Pour la variable x.*)

2. Trouver le Lagrangien et déduire l'équation du mouvement.

3. En utilisant la représentation complexe, trouver l'amplitude A et la phase ϕ de la solution permanente $x(t)$=$A\cos(\Omega t+\phi)$ de l'équation du mouvement.

4. Écrire la condition de résonance d'amplitude et donner la pulsation de résonance Ω_R.

Rappels: Le moment d'inertie du disque autour de son axe est $I = \frac{1}{2}MR^2$.
L'équation de Lagrange du système forcé est $\frac{d}{dt}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{x}} + F$.

Exercice 1

1. La période de la fonction est $\boxed{\mathrm{T=\mathbf{3s}}}$. 0,5

2. $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\ \mathrm{d}t$ 0,5 $= \frac{1}{3}\left[\int_0^1 2.\mathrm{d}t - \int_1^2 1.\mathrm{d}t + \int_2^3 0.\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{3}$. 0,5

$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}\ \mathrm{d}t$ 0,5 $= \frac{2}{3}\left[\int_0^1 2.\cos\frac{2\pi nt}{3}\mathrm{d}t - \int_1^2 1.\cos\frac{2\pi nt}{3}\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{\pi\mathbf{n}}(3\sin\frac{2\pi\mathbf{n}}{3} - \sin\frac{4\pi\mathbf{n}}{3})$. 0,5

$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}\ \mathrm{d}t$ 0,5 $= \frac{2}{3}\left[\int_0^1 2.\sin\frac{2\pi nt}{3}\mathrm{d}t - \int_1^2 1.\sin\frac{2\pi nt}{3}\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{\pi\mathbf{n}}(2 + \cos\frac{4\pi\mathbf{n}}{3} - 3\cos\frac{2\pi\mathbf{n}}{3})$. 0,5

Donc, $f(t) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi\mathbf{n}}(3\sin\frac{2\pi\mathbf{n}}{3} - \sin\frac{4\pi\mathbf{n}}{3})\cos\frac{2\pi nt}{T} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi\mathbf{n}}(2 + \cos\frac{4\pi\mathbf{n}}{3} - 3\cos\frac{2\pi\mathbf{n}}{3})\sin\frac{2\pi nt}{T}$. 0,5

Exercice 2

1. $T = \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 = \boxed{\frac{1}{4}(M+2m)R^2\dot{\theta}^2.}$ 0,5 $\boxed{\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha R^2\dot{\theta}^2.}$ 0,5

$U = mg(R - R\cos\theta) \approx \boxed{\frac{1}{2}mgR\theta^2.}$ 0,5

2. Le Lagrangien est: $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{4}(M+2m)R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgR\theta^2$.

$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{\theta}}}$ 0,5 $\Longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{2\alpha}{M+2m}\dot{\theta} + \frac{2mg}{(M+2m)R}\theta = 0.}$ 0,5

3. L'équation est de la forme: $\boxed{\ddot{\theta}+2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0}$ 0,5 : avec $\boxed{\lambda = \frac{\alpha}{M+2m}\ ,\ \omega_0^2 = \frac{2mg}{(M+2m)R}.}$ 0,5

A.N: $\boxed{\lambda^2 - \omega_0^2}$ 0,5 $= \boxed{\mathbf{0}.}$ 0,5 Le mouvement est donc en régime **critique.** 0,5

4. $\boxed{Ae^{-\lambda'(t+2T')} = \frac{1}{7}Ae^{-\lambda' t}.}$ 0,5 $\Longrightarrow \boxed{2\lambda' T' = \ln 7}$ 0,5 $\Longrightarrow \boxed{\frac{4\pi\lambda'}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda_0'^2}} = \ln 7}$ 0,5

$\boxed{\lambda' = \frac{\omega_0\ln 7}{\sqrt{(4\pi)^2 + (\ln 7)^2}}}$ 0,5.

A.N: $\boxed{\lambda' \approx \mathbf{1}\ \mathrm{s}^{-1}.}$ 0,5 $\Longrightarrow \alpha' = (M+2m)\lambda' \approx \boxed{\mathbf{3}\ \mathrm{N.s/m.}}$ 0,5

Exercice 3

1. $T = \boxed{\frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2}$ 0,5 $= \frac{3}{4}M\dot{x}^2$. $\boxed{(\text{Car } x=R\theta.)}$ 0,5

$U = \boxed{\frac{1}{2}kx^2.}$ 0,5 $\mathcal{D} = \boxed{\frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2.}$ 0,5

2. Le Lagrangien est: $\mathcal{L} = T - U = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$.

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{x}} + F \Longrightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{2\alpha}{3M}\dot{x} + \frac{2k}{3M}x = \frac{2F}{3M}.}$ 0,5

L'équation est de la forme: $\boxed{\ddot{x}+2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{2F}{3M}}$ 0,5 : avec $\boxed{\lambda = \frac{\alpha}{3M}\ ,\ \omega_0^2 = \frac{2k}{3M}.}$ 0,5

3. En utilisant la représentation complexe

$\boxed{\begin{array}{l} F_0\cos(\Omega t) \longrightarrow \underline{F} = F_0 e^{j\Omega t} \\ x = A\cos(\Omega t+\phi) \longrightarrow \underline{x} = \underline{A}e^{j\Omega t}\end{array}}$ 0,5 0,5 $: \ddot{\underline{x}} + 2\lambda\dot{\underline{x}} + \omega_0^2\underline{x} = \frac{2F}{3M} \Rightarrow \boxed{(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2j\lambda\Omega)\underline{A} = \frac{2F_0}{3M}}$ 0,5

$\Longrightarrow \boxed{\underline{A} = \frac{2F_0/3M}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2j\lambda\Omega}}$ 0,5 $\Longrightarrow \boxed{A = \frac{2F_0/3M}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}}$ 0,5 et $\boxed{\tan\phi = \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.}$ 0,5

4. La condition de résonance d'amplitude est $\boxed{\frac{\partial A}{\partial\Omega} = 0}$ 0,5, la pulsation est $\Omega_R = \boxed{\sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}.}$ 0,5