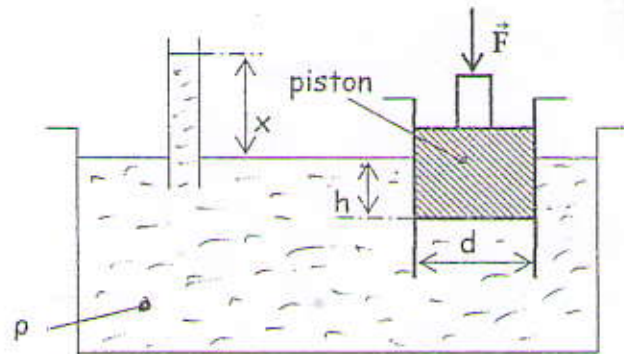


EXAMEN FINAL

Durée 02 heures. Documents non autorisés

Exercice 1 (04pts)



Dans le dispositif de la figure ci-contre, le piston a une masse m et un diamètre d .

Déterminer la valeur de x affichée par le piézomètre.

On donne :

$$\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3 ; g = 10 \text{ m/s}^2 ; m = 12 \text{ kg} ;$$

$$F = 200 \text{ N} ; h = 30 \text{ cm} ; d = 20 \text{ cm}.$$

Exercice 2 (08pts)

Le bassin d'eau de la figure ci-contre est fermé par une porte rectangulaire AB de dimensions $L \times l$ et de masse négligeable. La porte est maintenue par un câble AA' perpendiculaire à AB et peut pivoter autour d'un axe horizontal placé en D à la distance $AD=2\text{m}$ du bord supérieur.

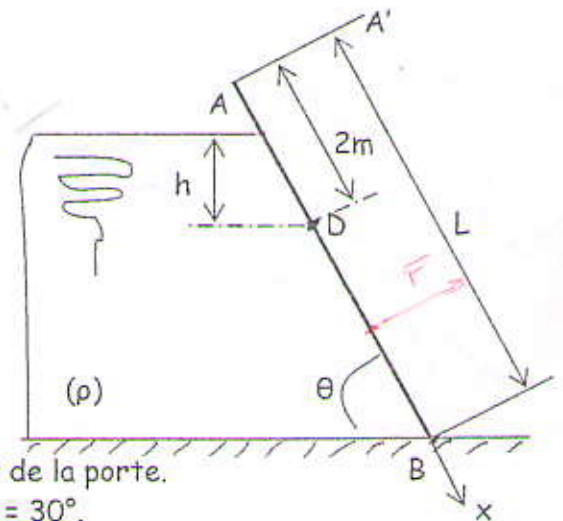
On désigne par h la hauteur de l'eau au dessus de l'axe D .

1°)- Exprimer en fonction de h :

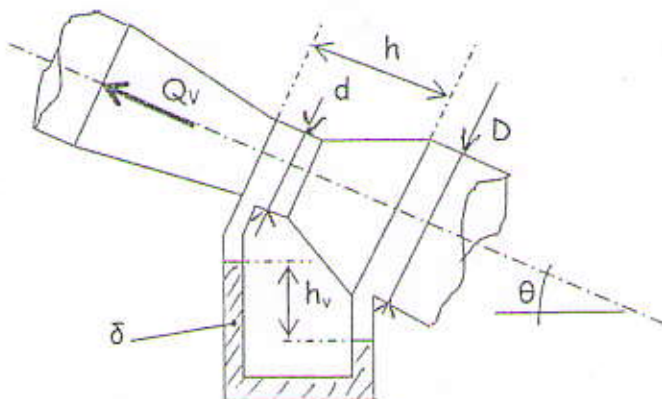
- a)- La poussée hydrostatique \vec{F} s'exerçant sur la porte.
- b)- La position X_c du centre de poussée dans le plan de la porte
- c)- La tension T dans le câble AA' .

2°)- Faire une application numérique lorsque l'eau atteint le sommet de la porte.

On donne : $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3 ; g = 10 \text{ m/s}^2 ; L = 6 \text{ m} ; l = 2 \text{ m} ; \theta = 30^\circ$.



Exercice 3 (05pts)



Dans le venturi de la figure ci-contre, de l'eau circule de bas en haut sans frottement.

Calculer :

1°)- La chute de pression dans le col

2°)- Le débit d'eau Q_v qui traverse le venturi.

On donne :

$$\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3 ; g = 10 \text{ m/s}^2 ; \delta = 13.6 ; h_v = 20 \text{ cm} ;$$

$$h = 30 \text{ cm} ; D = 36 \text{ cm} ; d = 18 \text{ cm} ; \theta = 45^\circ .$$

Questions de cours (03pts)

Pour un écoulement plan permanent de fluide isovolume, écrire :

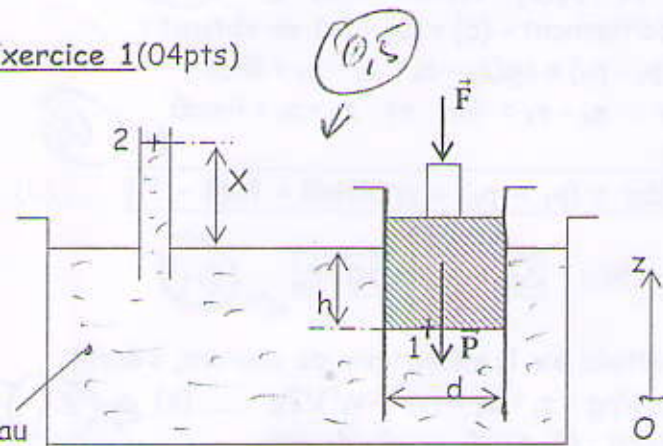
1°)- La définition du potentiel des vitesses

2°)- La définition de la fonction de courant

3°)- L'expression de l'équation de continuité en fonction du potentiel des vitesses.

CORRIGE DE L'EXAMEN FINAL

Exercice 1 (04pts)



L'EFH appliquée aux points (1) et (2) donne :

$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2$$

$$\Leftrightarrow p_1 - p_2 = \rho g(z_2 - z_1) \dots \dots \dots (a) \leftarrow (1)$$

Or :

$$p_2 = p_{at} \quad (z_2 - z_1) = x + h \leftarrow (0,5)$$

$$\text{et } p_1 = (F + P)/S + p_{at} = 4(F + mg)/\pi d^2 + p_{at}$$

En remplaçant dans (a) et après arrangement on trouve :

$$x = 4(F + mg)/\rho g \pi d^2 - h \leftarrow (0,5)$$

A.N.: $x = 72 \text{ cm}$ $\leftarrow (0,5)$

Exercice 2 (08pts)

1°)- a) Poussée hydrostatique \vec{F} s'exerçant sur la porte.

Soient Oxy un repère dans le plan de la porte et Oz un axe vertical descendant tels que sur la figure.

on a : $F = \rho g Z_G S$; où :

$$Z_G = (h + h')/2 \quad ; \quad \text{avec : } h' = DB \sin \theta = 2 \text{ m}$$

$$\Rightarrow Z_G = (h + 2)/2 \leftarrow (0,5)$$

$$S = l \times OB = 2 \times OB \quad ; \quad \text{avec : } OB = (h + h')/\sin \theta = 2(h + 2)$$

$$\text{soit : } S = 4(h + 2) \leftarrow (0,5)$$

$$\Rightarrow F = 2\rho g(h + 2)^2 \leftarrow (1)$$

\vec{F} est perpendiculaire à AB, dirigée vers la droite et

appliquée en C défini par son abscisse X_c

b)- Abscisse X_c du centre de poussée

\vec{F} est appliquée au point C défini dans Oxy par :

$$X_c = OC = 2OB/3 \quad \Leftrightarrow \quad X_c = 4(h + 2)/3$$

c)- Tension T dans le câble AA'

la tension T sera déterminée en écrivant que :

$$\sum M_O(\vec{F}_{ex}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2T + F \cdot CD = 0 \leftarrow (0,5)$$

$$\Leftrightarrow T = F \cdot CD/2 \quad \text{avec :} \leftarrow (0,5)$$

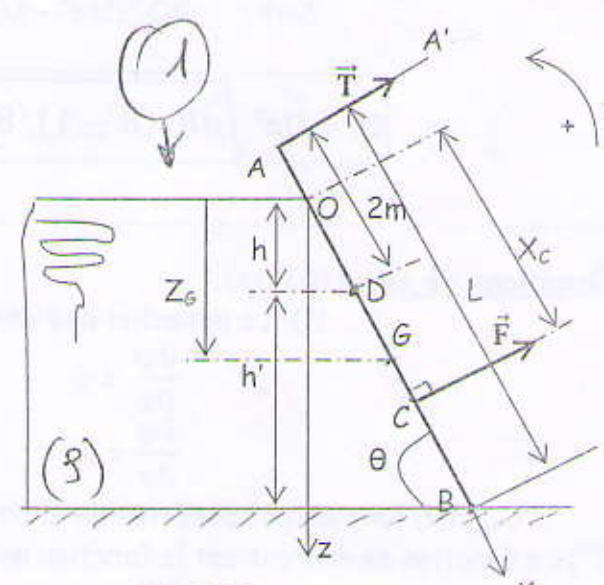
$$CD = DB - CB = 4 - OB/3 = 4 - 2(h + 2)/3 = 2(4 - h)/3$$

$$\Rightarrow T = 2\rho g(h + 2)^2(4 - h)/3 \leftarrow (0,5)$$

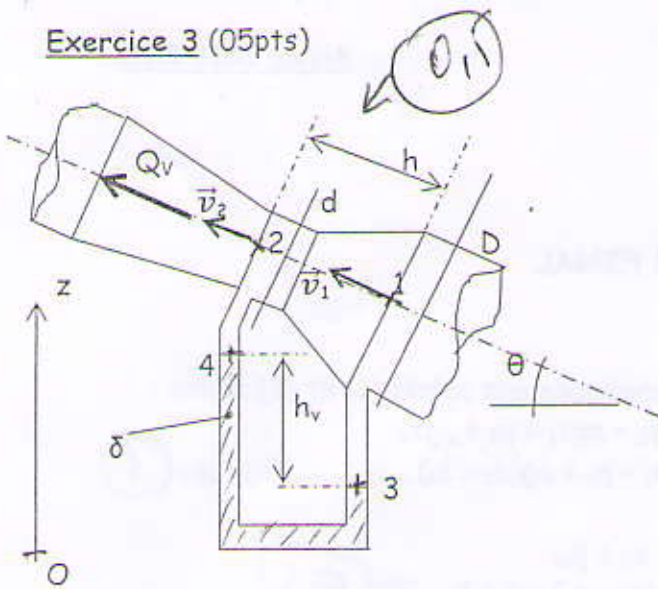
2°)- Application numérique

Lorsque l'eau atteint le sommet de la porte, on a : $h = 2 \sin \theta = 1 \text{ m}$; soit :

$$F = 18 \cdot 10^4 \text{ N} \quad ; \quad X_c = AC = 4 \text{ m} \quad ; \quad T = 18 \cdot 10^4 \text{ N}$$



Exercice 3 (05pts)



1°)- Chute de pression dans le col

L'EFH appliquée entre les points (1) et (3); (3) et (4); et (4) et (2) nous donne :

$$p_3 - p_1 = \rho g(z_1 - z_3) \dots \dots \dots (a)$$

$$p_3 - p_4 = \rho g \delta h_v \dots \dots \dots (b)$$

$$p_4 - p_2 = \rho g(z_2 - z_4) \dots \dots \dots (c)$$

En additionnant - (a) + (b) + (c), on obtient :

$$(p_1 - p_2) = \rho g(z_3 - z_1 + z_2 - z_4 + \delta h_v)$$

$$\text{Or : } z_3 - z_4 = -h_v \text{ et } z_2 - z_1 = h \sin \theta$$

soit :

$$\Delta p = (p_1 - p_2) = \rho g [h \sin \theta + h_v (\delta - 1)] \dots \dots \dots (d)$$

A.N. : $\Delta p = 2,73 \cdot 10^4 \text{ Pa}$

2°)- Débit d'eau Q_v traversant le venturi

Le théorème de Bernoulli appliqué aux points (1) et (2) situés sur la même ligne de courant, s'écrit :

$$p_1/\rho g + v_1^2/2g + z_1 = p_2/\rho g + v_2^2/2g + z_2 \Leftrightarrow (p_1 - p_2)/\rho g + z_1 - z_2 = (v_2^2 - v_1^2)/2g \dots \dots \dots (e)$$

Par ailleurs, la conservation de masse s'écrit : $Q_v = v_1 S_1 = v_2 S_2$

$$\Rightarrow v_1 = 4Q_v/\pi D^2 \text{ et } v_2 = 4Q_v/\pi d^2$$

$$(e) \Leftrightarrow (p_1 - p_2)/\rho g + z_1 - z_2 = 8Q_v^2(1/d^4 - 1/D^4)/g\pi$$

Or, d'après l'équation (d) on a : $(p_1 - p_2)/\rho g + z_1 - z_2 = h_v(\delta - 1)$

$$\text{Soit : } 8Q_v^2(1/d^4 - 1/D^4)/g\pi^2 = h_v(\delta - 1)$$

$$\Rightarrow Q_v = \pi d^2 \sqrt{gh_v(\delta - 1)/8[1 - (d/D)^4]}$$

A.N. : $Q_v = 0,186 \text{ m}^3/\text{s}$

Questions de cours (03pts)

1°)- Le potentiel des vitesses est une fonction notée $\varphi(x, y)$ et définie par :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = v$$

Où (u,v) sont les composantes de la vitesse des particules fluides.

2°)- La fonction de courant est la fonction notée $\Psi(x, y)$ et définie par :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = u$$

3°)- L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

En remplaçant u et v par leur valeur en fonction de φ , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow \nabla^2 \varphi = 0$$

ou Laplacien $\varphi = 0$