جامعة منتوري

قسم التكنولوجيا

السنة 2007-2008

امتحان الاول Phys 3

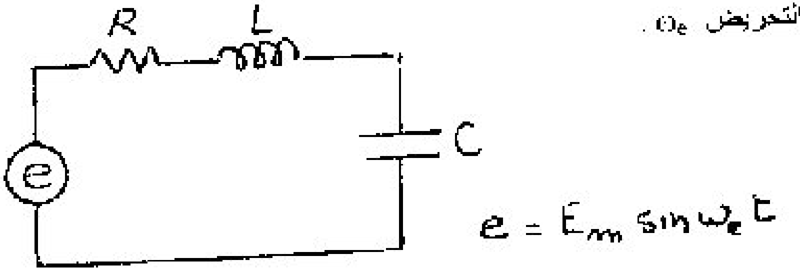
المدة ساعة و نصف

التمرين الأول

1) أوجد المعادلة التفاضلية الممثلة لتغيرات فرق الكمون V_c بين طرفي المكثفة C في الشكل (1).

2) ما هي عبارة الحل المتجانس V_{c0} في حالة $R=100\Omega$ $L=5\ mH$ $C=0.2\ \mu F$.

3) أوجد عبارة سعة الحل الدائم A_e بدلالة نبض التحريض ω_e.



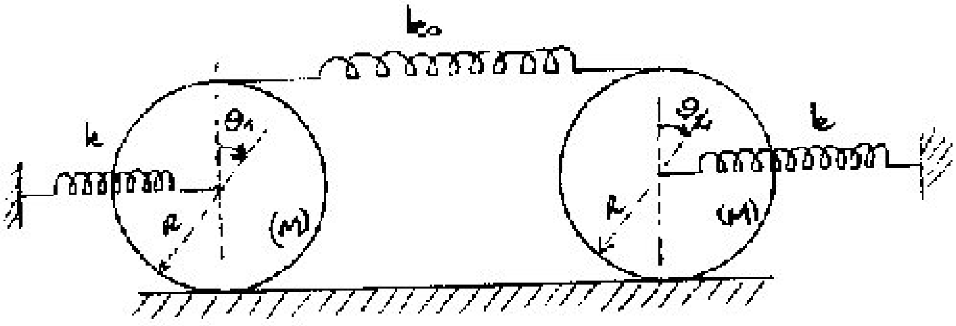
شكل (1)

التمرين الثاني

ليكن النظام الميكانيكي الممثل في الشكل (2).

1) أوجد المعادلات التفاضلية الممثلة لتغيرات θ_1 و θ_2 عند إهتزازات صغيرة.

2) حدد الحل في حالة $\theta_1(0)=\theta_0$ ، $\dot{\theta}_1(0)=0$ ، $\theta_2(0)=\theta_0$ و $\dot{\theta}_2(0)=0$.



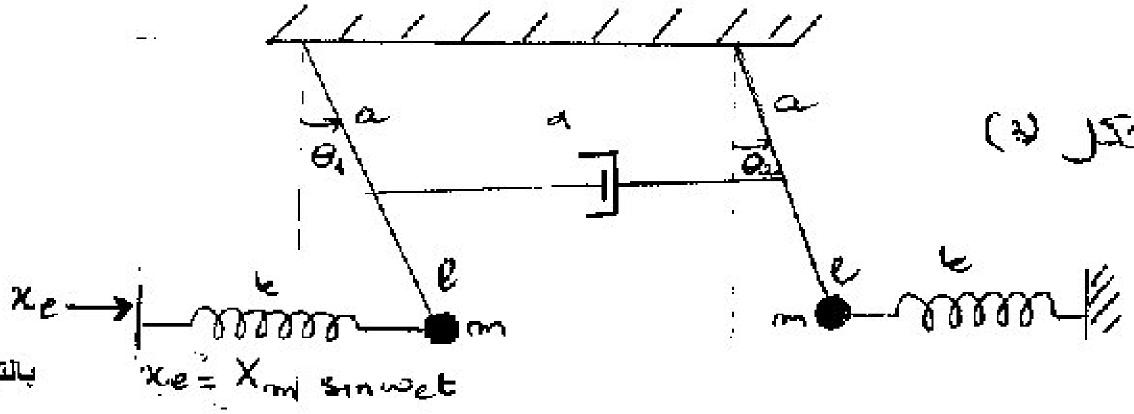
شكل (2)

التمرين الثالث

ليكن النظام الميكانيكي الممثل في الشكل (3).

1) أوجد المعادلات التفاضلية الممثلة لتغيرات θ_1 و θ_2 عند إهتزازات صغيرة.

2) أوجد عبارة سعة الحل الخاص θ_{e2} للنظام الجزئي الثاني بدلالة نبض التحريض ω_e.



شكل (3)

بالتوفيق

التمرين 1

1) $e(t) = rI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I\,dt \Rightarrow \ddot{V}_c + \frac{r}{L}\dot{V}_c + \frac{1}{LC}V_c = \frac{1}{LC}e(t)$

$\ddot{V}_c + 2\lambda\dot{V}_c + \omega_0^2 V_c = \omega_0^2 E_m \sin\omega t$

2) $\ddot{V}_{ch} + 2\lambda\dot{V}_{ch} + \omega_0^2 V_{ch} = 0$ $\qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 10^9 (rd/s)^2 \; ; \; \lambda^2 = \left(\frac{r}{2L}\right)^2 = 10^8\, s^{-2}$

$\omega_0 > \lambda \Rightarrow V_{ch} = A e^{-\lambda t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,t + \varphi\right)$; $\omega = \sqrt{\omega_0^2-\lambda^2} = 3\,10^4$ rd/s

$\lambda = 10^4\, s^{-1}$

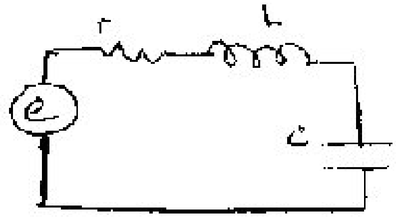
3) $V_{ch} \to 0$ $\qquad V_c = V_{ch} + V_{cp}$ ، الحل الدائم $\qquad V_{cp} = A_e \sin(\omega t - \varphi_e)$

أي الحل الدائم $V_c = V_{cp}$. $\qquad \bar{A}_e = A_e e^{-j\varphi_e} \qquad \bar{V}_{cp} = \bar{A}_e e^{j\omega t}$

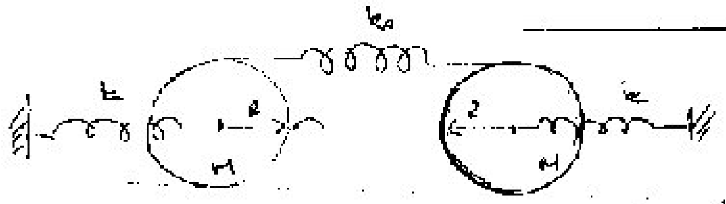
بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد

$$A_e = \frac{\omega_0^2 E_m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_e^2)^2 + 4\lambda^2\omega_e^2}}$$

الشكل



التمرين 2



1) $J = \frac{1}{2}MR^2$

$L = T - V$

$L = \frac{3}{4}MR^2\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right) - \frac{1}{2}kR^2\left(\theta_1^2+\theta_2^2\right) - 2k_0 R^2(\theta_1-\theta_2)^2$

معادلات لاغرانج $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0 \quad i = 1,2$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \frac{k+4k_0}{\frac{3M}{2}}\theta_1 = \frac{4k_0}{\frac{3M}{2}}\theta_2 \\ \ddot{\theta}_2 + \frac{k+4k_0}{3M/2}\theta_2 = \frac{4k_0}{3M/2}\theta_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_1 = a\,\theta_2 \\ \ddot{\theta}_2 + \omega_0^2\theta_2 = a\,\theta_1 \end{cases}$$

حيث $\omega_0^2 = \frac{2(k+4k_0)}{3M}$ و $a = \frac{8k_0}{3M}$

2) الاحداثيات الناظمية $Y_2 = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$; $Y_1 = \frac{\theta_1+\theta_2}{2}$

فنحصل على المعادلتين : $\ddot{Y}_2 + (\omega_0^2 + a)Y_2 = 0$; $\ddot{Y}_1 + (\omega_0^2 - a)Y_1 = 0$

$Y_1 = A_1 \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - a}\, t + \varphi_1\right) \quad ; \quad Y_2 = A_2 \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + a}\, t + \varphi_2\right)$

$$\theta_1 = A_1 \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - a}\, t + \varphi_1\right) + A_2 \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + a}\, t + \varphi_2\right)$$

$$\theta_2 = A_1 \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - a}\, t + \varphi_1\right) - A_2 \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + a}\, t + \varphi_2\right)$$

2

الشروط الابتدائية $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0 \; ; \; \theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_0$ تحدد قيمة الثوابت

$$A_1 = \theta_0 \; ; \; A_2 = 0 \; ; \; \varphi_1 = 0, \; \varphi_2 = 0 \Leftarrow$$

$$\theta_1 = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - a}\, t\right)$$

$$\theta_2 = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - a}\, t\right)$$

2

النظام يتحرك في النمط الاول

التمرين 3 (1

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right) - \frac{1}{2} k \left(l\theta_1 - x_e\right)^2 - \frac{k}{2} l^2 \theta_2 + mgl\left(\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right)$$

$$D = \frac{1}{2} \alpha a^2 \left(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2\right)^2 \; ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_i} = 0$$

معادلة لاغرانج

حيث $i = 1, 2$ نتحصل على المعادلات $\Leftarrow$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \dfrac{\alpha a^2}{m l^2} \dot{\theta}_1 + \dfrac{k l^2 + mgl}{m l^2} \theta_1 = \dfrac{\alpha a^2}{m l^2} \dot{\theta}_2 + \dfrac{k}{m} X_m \sin \omega t \\[2ex] \ddot{\theta}_2 + \dfrac{\alpha a^2}{m l^2} \dot{\theta}_2 + \dfrac{k l^2 + mgl}{m l^2} \theta_2 = \dfrac{\alpha a^2}{m l^2} \dot{\theta}_1 \end{cases}$$

1 ن

2) الحل الخاص $\theta_{e_1} = A_{e_1} \sin(\omega_e t - \varphi_{e_1})$ و $\theta_{e_2} = A_{e_2} \sin(\omega_e t - \varphi_{e_2})$ بالتعويض في الجملة نتحصل على

$$\begin{cases} \left(\omega_0^2 - \omega_e^2 + j\, 2\lambda \omega_e\right) \bar{A}_{e_1} - j\, b\, \omega_e \bar{A}_{e_2} = X_0 \\ - j\, b\, \omega_e \bar{A}_{e_1} + \left(\omega_0^2 - \omega_e^2 + j\, 2\lambda \omega_e\right) \bar{A}_{e_2} = 0 \end{cases}$$

حيث

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \dfrac{k}{m} + \dfrac{g}{l} \\ 2\lambda = b = \dfrac{\alpha a^2}{m l^2} \\ X_0 = \dfrac{k}{m} X_m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{A}_{e_2} = \frac{j\, b\, \omega_e X_0}{\left(\omega_0^2 - \omega_e^2 + j\, 2\lambda \omega_e\right)^2 - b^2 \omega_e^2}$$

$$A_{e_2} = \frac{b\, \omega_e X_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_e^2 - b\omega\right)^2 + b^2 \omega_e^2}\; \sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_e^2 + b\omega\right)^2 + b^2 \omega_e^2}}$$